

Approximation par différences finies de l'équation de transport

- Schéma de Lax Friedrichs
- Convergence du schéma de Lax Friedrichs et Théorème de Lax
- Schémas à 2 pas de temps
- Schémas implicites

Rappel sur le schéma explicite centré

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

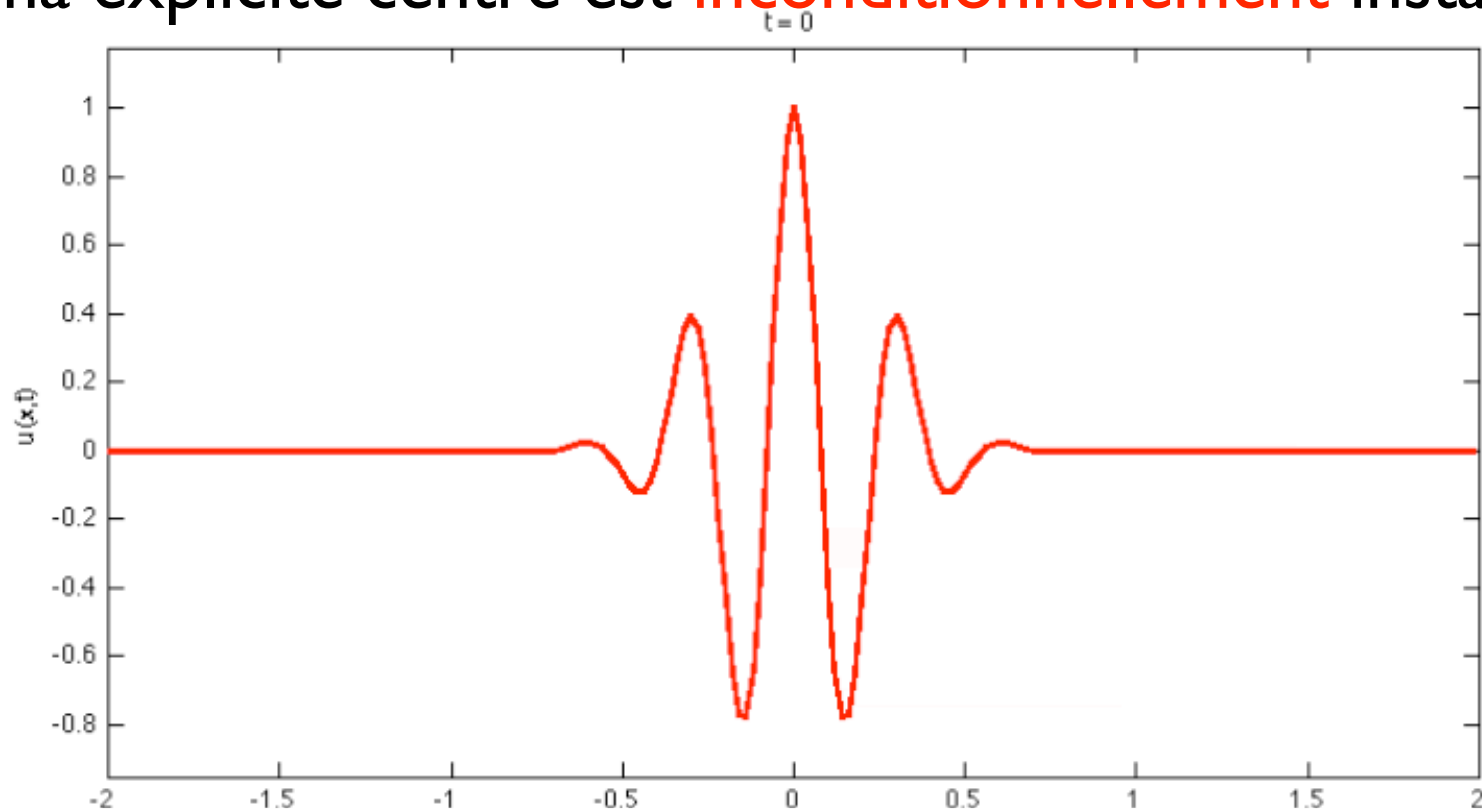
Trouver u_j^n

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_j^0 = u^0(x_j) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Le schéma est d'ordre **1** en **temps** et **2** en **espace**.

Le schéma explicite centré est **inconditionnellement instable**



Simulations numériques : $h=0.02, \alpha = 1$

Rappel sur le schéma explicite centré

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

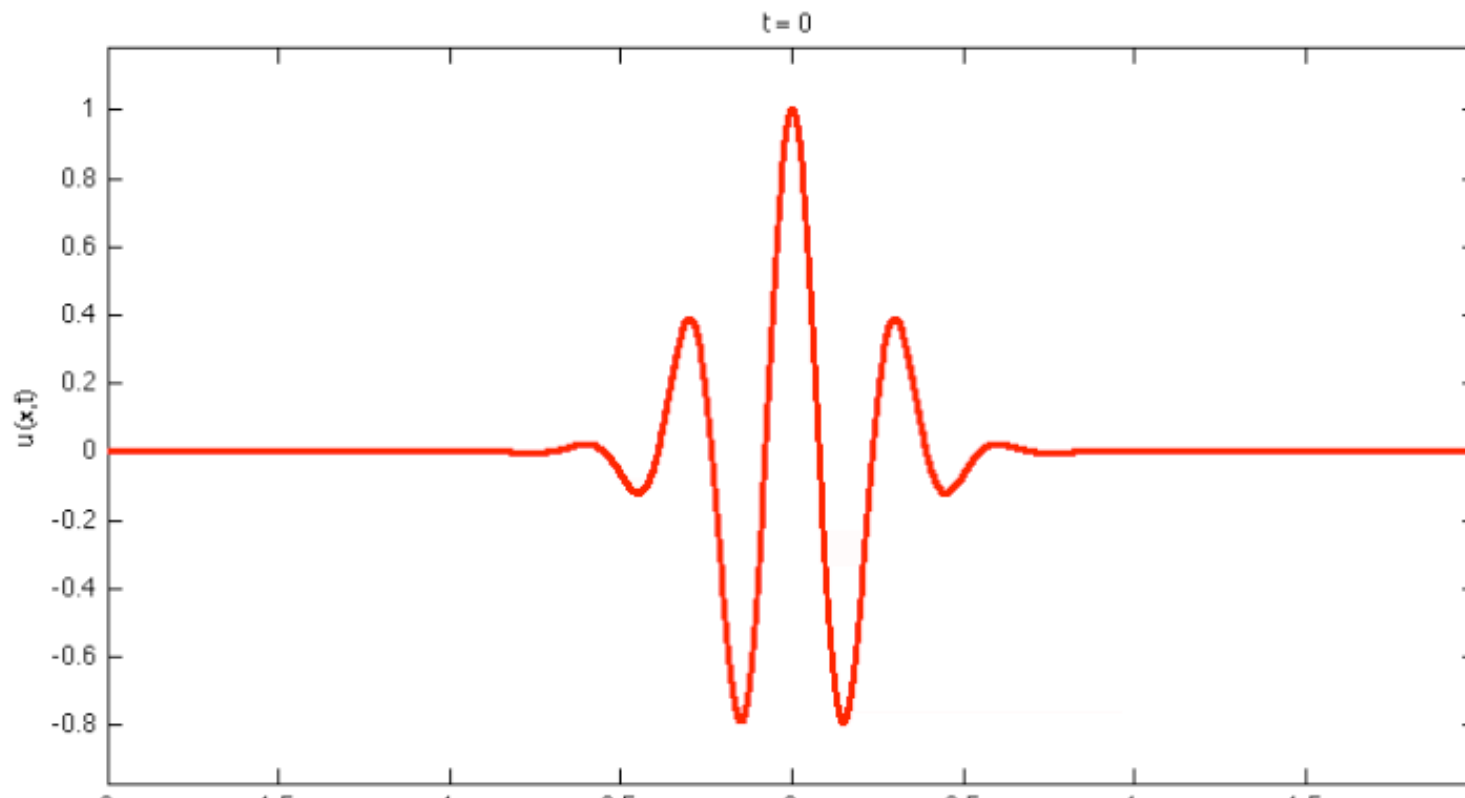
Trouver u_j^n

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_j^0 = u^0(x_j) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Le schéma est d'ordre **1** en **temps** et **2** en **espace**.

Le schéma explicite centré est **inconditionnellement instable**



Simulations numériques : $h=0.005$, $\alpha = 1$

Le schéma de Lax Friedrichs

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le schéma explicite centré est instable (voir l'amphi 4). On va le modifier

$$\begin{aligned} \partial_x u(x_j, t^n) &\simeq \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \\ \partial_t u(x_j, t^n) &\simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{On remplace } u_j^n \text{ par } \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}} \frac{u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}\right)}{\Delta t}$$

On obtient le schéma de Lax Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}\right)}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

qui se réécrit

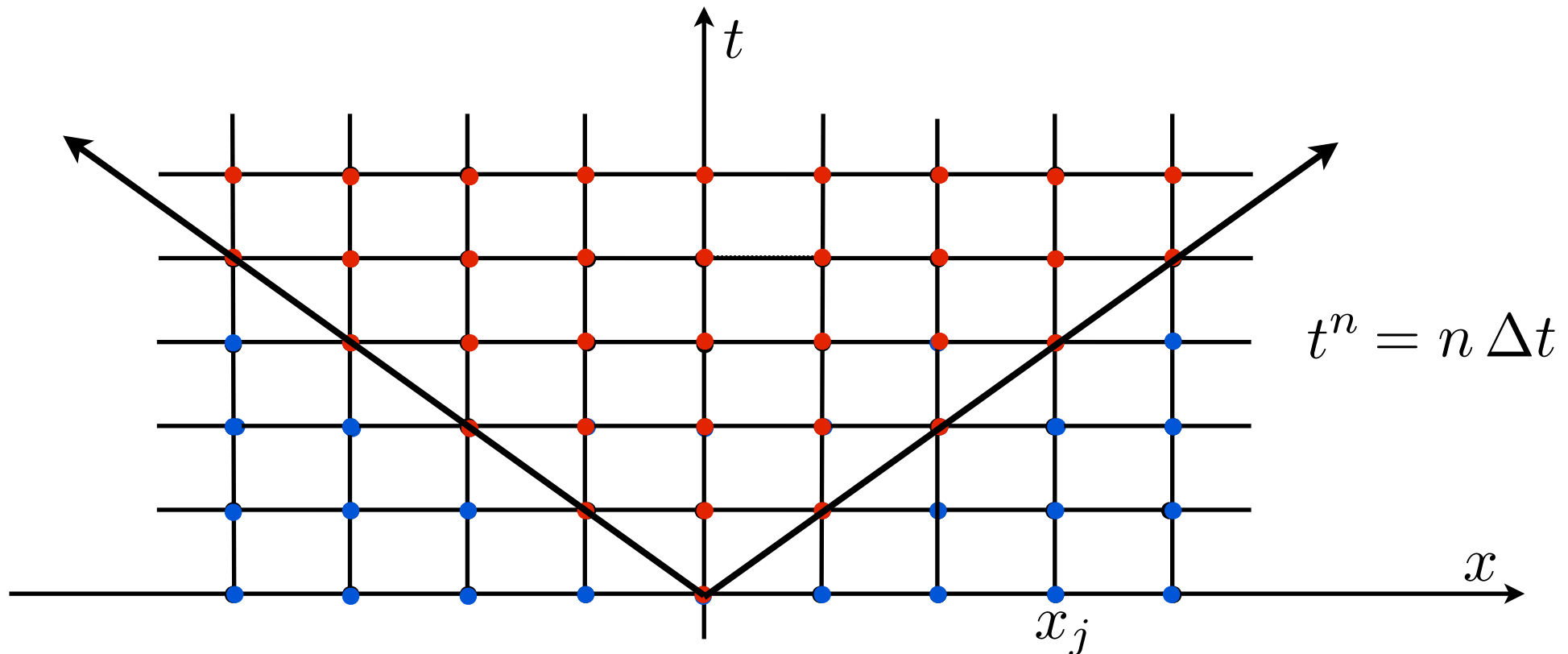
$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_{j-1}^n \quad \text{où } \alpha = \frac{c \Delta t}{h}.$$

C'est un schéma explicite à un pas de temps.

Le schéma de Lax Friedrichs

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_{j-1}^n \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{c \Delta t}{h}.$$

Comme pour le schéma explicite centré, on montre que la **vitesse de propagation numérique** est $V_{num} = h / \Delta t$



Une **condition nécessaire de convergence** est donnée par la CFL

$$V_{num} \geq c \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha := \frac{c \Delta t}{h} \leq 1$$

Consistance du schéma de Lax Friedrichs

Si on note $U_j^n := u(x_j, t^n)$ l'erreur de troncature est donnée par

$$\varepsilon_j^n := \frac{U_j^{n+1} - \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}$$

Rappel :

Le schéma est **consistant** ssi $\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \varepsilon_j^n = 0$

Le schéma est précis d'**ordre** k en **temps** et p en **espace** ssi

$$\varepsilon_j^n = O(\Delta t^p + h^k) \quad ((p, k) \in \mathbb{N}^2)$$

Consistance du schéma de Lax Friedrichs

Si on note $U_j^n := u(x_j, t^n)$ l'erreur de troncature est donnée par

$$\varepsilon_j^n := \frac{U_j^{n+1} - \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}$$

En remarquant que $\frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} = U_j^n + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2}$ on trouve

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \underbrace{\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}}_{= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^4)} - \frac{1}{2\Delta t} \underbrace{\left(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right)}_{= h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(h^4)} \\ & \quad \text{(voir l'amphi 4)} \qquad \qquad \qquad \text{(voir l'amphi 4)} \end{aligned}$$

En réécrivant $\frac{h^2}{2\Delta t} = \frac{ch}{2\alpha}$, on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^4) - \frac{ch}{2\alpha} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(h^2) \right] \\ &= \frac{c(c\alpha\Delta t - h)}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2) \quad \text{(car } u \text{ est sol. de l'eq. de transport)} \end{aligned}$$

Rappel : si u est solution de l'équation de transport $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Consistance du schéma de Lax Friedrichs

Si on note $U_j^n := u(x_j, t^n)$ l'erreur de troncature est donnée par

$$\varepsilon_j^n := \frac{U_j^{n+1} - \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}$$

En remarquant que $\frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} = U_j^n + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2}$ on trouve

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \underbrace{\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}}_{= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^4)} - \frac{1}{2\Delta t} \underbrace{\left(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right)}_{= h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(h^4)} \\ & \quad \text{(voir l'amphi 4)} \qquad \qquad \qquad \text{(voir l'amphi 4)} \end{aligned}$$

En réécrivant $\frac{h^2}{2\Delta t} = \frac{ch}{2\alpha}$, on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^4) - \frac{ch}{2\alpha} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(h^2) \right] \\ &= \frac{c(c\alpha\Delta t - h)}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2) \quad \text{(car } u \text{ est sol. de l'eq. de transport)} \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 1$, le schéma est consistant **d'ordre 1 en temps et en espace** à α fixé.

Si $\alpha = 1$, on montre qu'il est consistant **d'ordre infini en temps et en espace**

Stabilité du schéma de Lax Friedrichs

Le schéma se réécrit

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_{j-1}^n$$

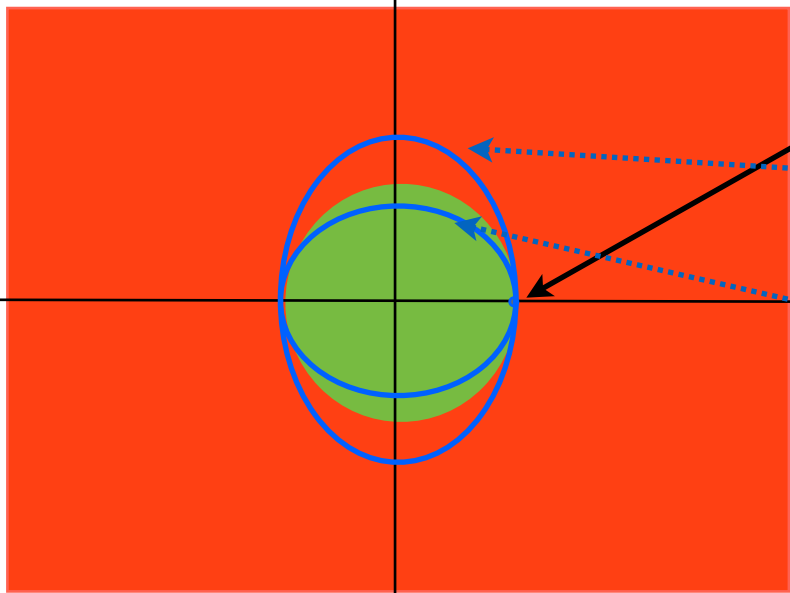
On utilise la méthode de Fourier-Von Neumann et on cherche les solutions sous la forme

$$u_j^n = \hat{u}^n(\xi) e^{i\xi x_j}$$

ce qui mène à $\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t) \hat{u}^n(\xi)$ avec

$$\hat{S}_h(\xi, \Delta t) = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) e^{i\xi h} + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) e^{-i\xi h} = \cos \xi h - i\alpha \sin \xi h$$

$Im\ z$



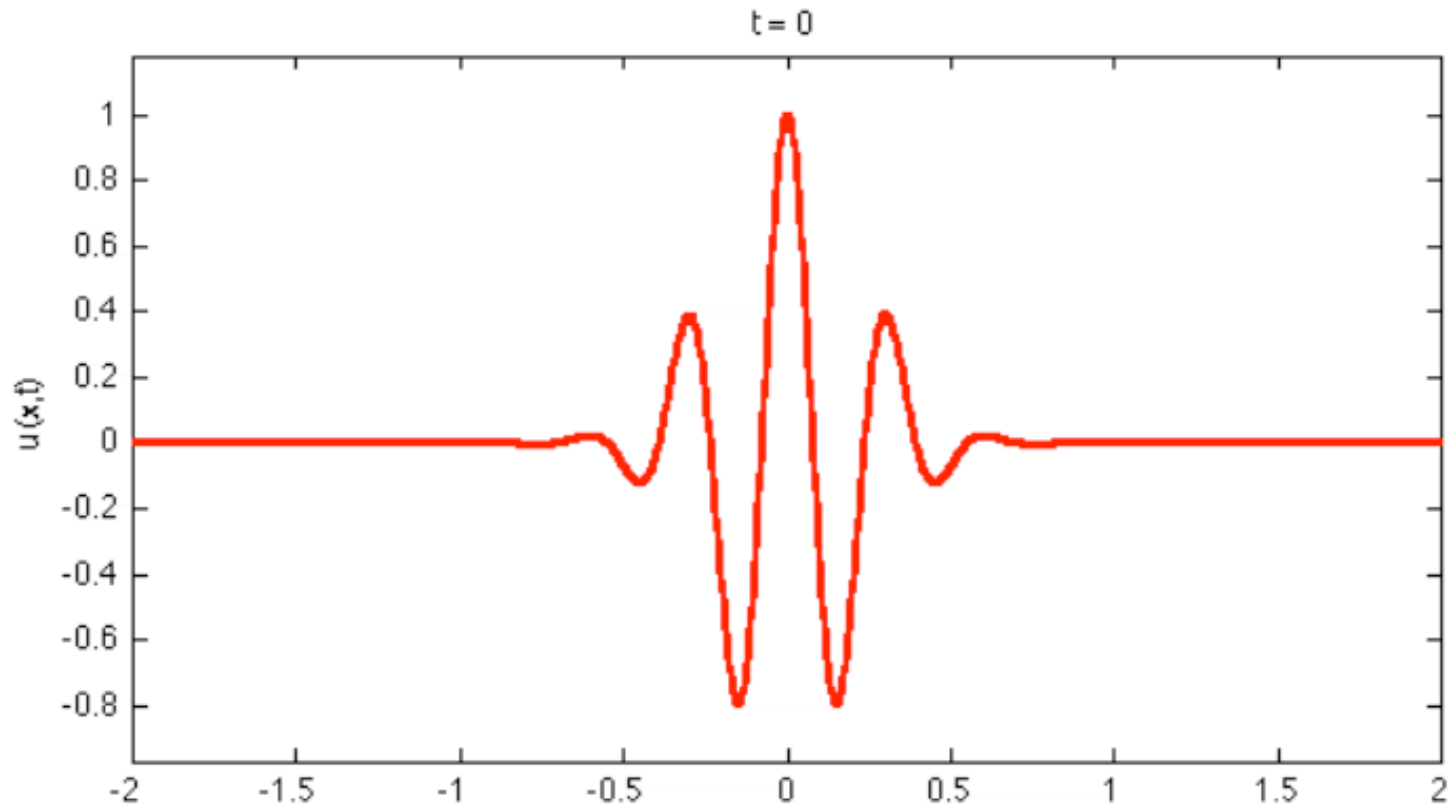
$\xi = 0$

$\alpha > 1$: Le schéma est **instable**

$\alpha \leq 1$: Le schéma est **stable**

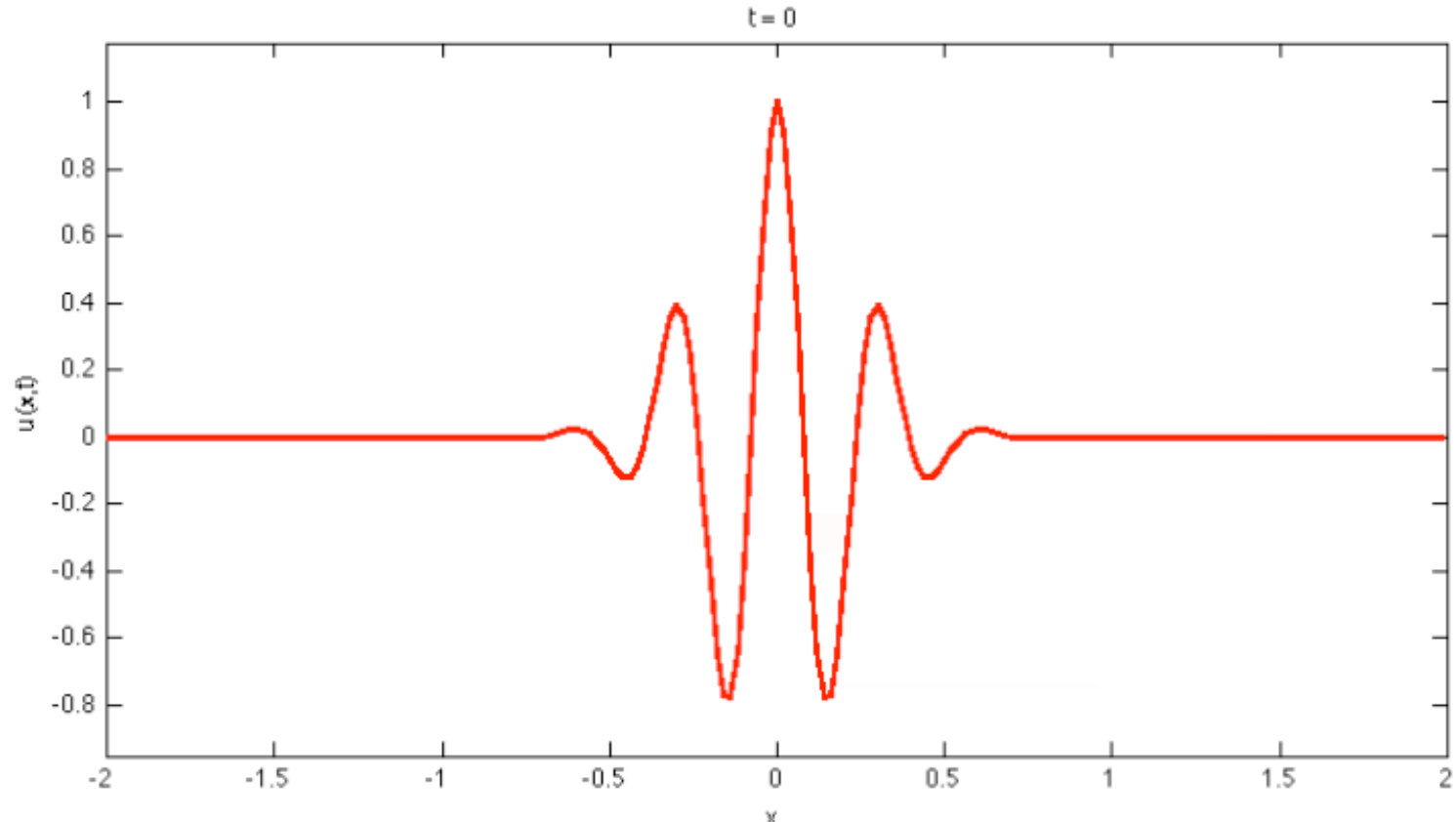
$Re\ z$

Simulations pour le schéma de Lax-Friedrichs



Simulations numériques : $h=0.005$, $\alpha = 1.05$

Simulations pour le schéma de Lax-Friedrichs

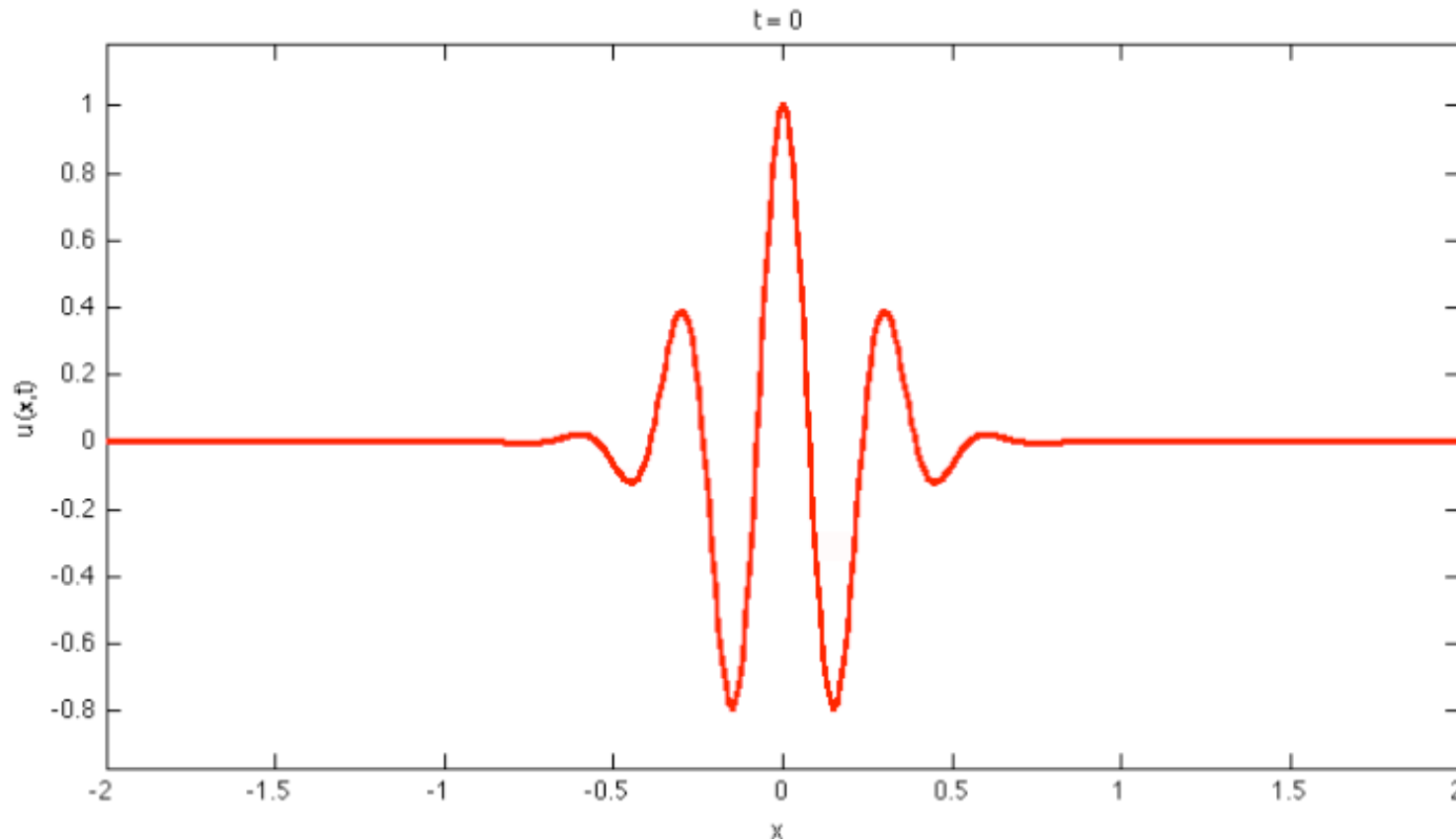


Simulations numériques : $h=0.02$, $\alpha = 0.99$

Simulations pour le schéma de Lax-Friedrichs

La solution d'un schéma **consistant et stable** approche-t-elle la solution de l'équation continue ? La réponse est **OUI**. C'est le **théorème de Lax**

Stabilité + Consistance \implies Convergence

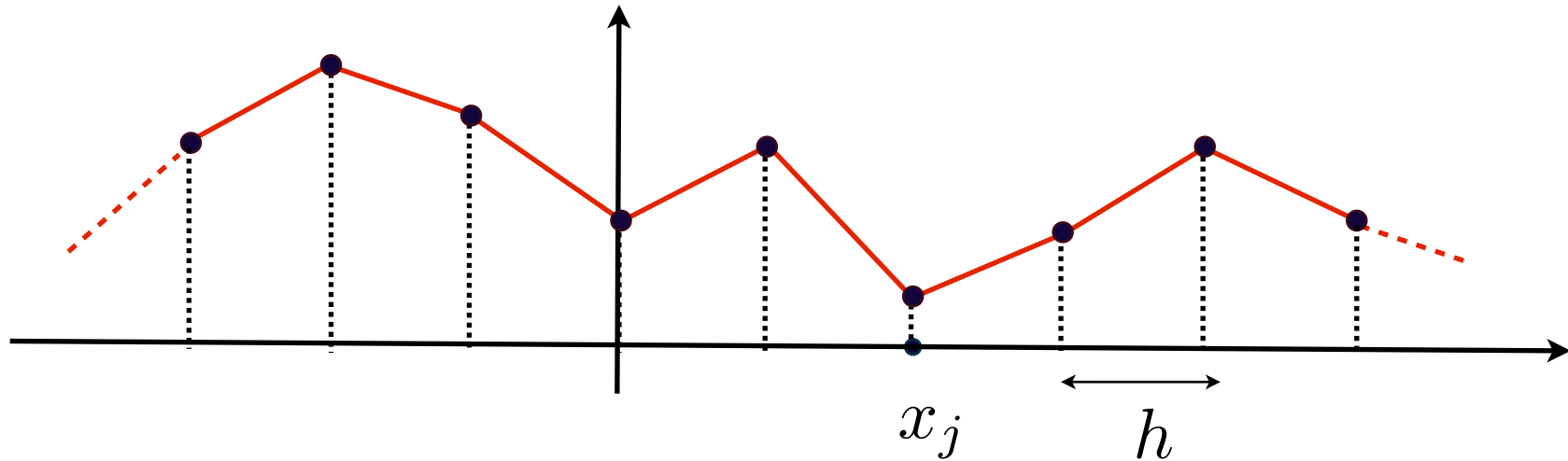


Simulations numériques : $h=0.01$, $\alpha = 0.99$

Notions de convergence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit, à partir des $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$, une fonction u_h^n dans $V = L^2(\mathbb{R})$ via une **interpolation linéaire**

$$u_h^n \in V_h = \{u_h \in V \cap C^0(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}, u_h|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1\}$$



Définition : Le schéma est **convergent dans** $L^\infty(0, T; L^2)$ ssi

$$\forall u_0 \in L^2, \quad \lim_{(\Delta t, h) \rightarrow 0} \sup_{t^n \leq T} \|u(\cdot, t^n) - u_h^n\|_{L^2} = 0.$$

Convergence du schéma de Lax-Friedrichs

Le schéma de Lax Friedrichs

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_{j-1}^n \quad \text{où } \alpha = \frac{\Delta t}{h}.$$

se réécrit

$$u_h^{n+1}(x) = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_h^n(x+h) + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_h^n(x-h) := S_h(\Delta t) u_h^n(x)$$

L'erreur de troncature (version continue) est donnée par

$$\varepsilon_h^n(x) := \frac{u(x, t^{n+1}) - \frac{u(x+h, t^n) + u(x-h, t^n)}{2}}{\Delta t} + c \frac{u(x+h, t^n) - u(x-h, t^n)}{2h}$$

si bien que la solution exacte vérifie $\varepsilon_h^n = \frac{1}{\Delta t} [u(\cdot, t^{n+1}) - S_h(\Delta t) u(\cdot, t^n)]$

soit $u(\cdot, t^{n+1}) = S_h(\Delta t) u(\cdot, t^n) + \Delta t \varepsilon_h^n$

Introduisons l'erreur : $e_h^n = u_h^n - u(\cdot, t^n) \in L^2$

alors elle vérifie $e_h^{n+1} = S_h(\Delta t) e_h^n + \Delta t \varepsilon_h^n$ et par récurrence

$$e_h^n = S_h(\Delta t)^n e_h^0 + \Delta t \sum_{k=1}^n S_h(\Delta t)^{n-k} \varepsilon_h^{k-1}$$

Convergence du schéma de Lax-Friedrichs

On a donc l'estimation

$$\|e_h^n\|_{L^2} \leq \|S_h(\Delta t)^n\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|e_h^0\|_{L^2} + \Delta t \sum_{k=1}^n \|S_h(\Delta t)^{n-k}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|\varepsilon_h^{k-1}\|_{L^2}$$

I. Estimation L^2 de l'erreur de consistance

Un développement de Taylor avec **reste intégral** montre que (la solution est supposée assez régulière)

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|\varepsilon_h^k\|_{L^2} \leq C(\alpha) \left(\Delta t \sup_{t \in [t^k, t^{k+1}]} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t) \right\|_{L^2} + h \sup_{t \in [t^k, t^{k+1}]} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot, t) \right\|_{L^2} \right)$$

ce qui pour la solution de l'équation de transport donne ($u(x, t) = u^0(x - ct) \forall (x, t)$)

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|\varepsilon_h^k\|_{L^2} \leq C(\alpha) (\Delta t + h) \left\| \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} \right\|_{L^2}$$

Convergence du schéma de Lax-Friedrichs

On a donc l'estimation

$$\|e_h^n\|_{L^2} \leq \|S_h(\Delta t)^n\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|e_h^0\|_{L^2} + \Delta t \sum_{k=1}^n \|S_h(\Delta t)^{n-k}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|\varepsilon_h^{k-1}\|_{L^2}$$

1. Estimation L^2 de l'erreur de consistance

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\varepsilon_h^k\|_{L^2} \leq C(\alpha) (\Delta t + h) \left\| \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} \right\|_{L^2}$$

2. Estimation de $\|S_h(\Delta t)^k\|_{\mathcal{L}(L^2)}$, $\forall k \leq n$

On a

$$S_h(\Delta t) u(x) = \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) u(x+h) + \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) u(x-h)$$

Si on applique la Transformée de Fourier

$$\mathcal{F}[S_h(\Delta t) u](\xi) = \hat{S}_h(\Delta t, \xi) \hat{u}(\xi)$$

ce qui donne

$$\|S_h(\Delta t) u\|_{L^2} \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{S}_h(\Delta t, \xi)| \|u\|_{L^2} \leq (1 + \nu \Delta t) \|u\|_{L^2}$$

↑
Stabilité si $\alpha \leq 1$

soit

$$\|S_h(\Delta t)^k\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq e^{\nu t^k} \leq e^{\nu T}, \quad \forall t^k \leq T. \quad \text{où on a utilisé } (1 + s/k)^k \leq e^s$$

Convergence du schéma de Lax-Friedrichs

On a donc l'estimation

$$\|e_h^n\|_{L^2} \leq \|S_h(\Delta t)^n\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|e_h^0\|_{L^2} + \Delta t \sum_{k=1}^n \|S_h(\Delta t)^{n-k}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|\varepsilon_h^{k-1}\|_{L^2}$$

1. Estimation L^2 de l'erreur de consistance

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\varepsilon_h^k\|_{L^2} \leq C(\alpha) (\Delta t + h) \left\| \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} \right\|_{L^2}$$

2. Estimation de $\|S_h(\Delta t)^k\|_{\mathcal{L}(L^2)}$, $\forall k \leq n$

$$\|S_h(\Delta t)^k\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq e^{\nu t^k} \leq e^{\nu T}, \quad \forall t^k \leq T. \quad \text{si } \alpha \leq 1$$

3. Estimation de $e_h^0 = u_h^0 - u^0$. On montre que $\|e_h^0\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2)$.

Conclusion

$$\begin{aligned} \forall n, t^n \leq T, \quad \|e_h^n\|_{L^2} &\leq C e^{\nu T} h^2 + \Delta t \sum_{k=1}^n e^{\nu T} C(\alpha) (\Delta t + h) \left\| \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} \right\|_{L^2} \\ &\leq T e^{\nu T} C(\alpha) (\Delta t + h) \left\| \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} \right\|_{L^2} \end{aligned}$$

Comme la stabilité est uniforme $\nu = 0$,

$$\boxed{\sup_{t^n < T} \|e_h^n\|_{L^2} \leq T C(\alpha) (\Delta t + h) \left\| \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} \right\|_{L^2} \quad \text{si } \alpha \leq 1}$$

Convergence des schémas

On vient de montrer pour le schéma de Lax Friedrichs, le théorème

Théorème de Lax

Soit u la solution de l'équation de transport supposée suffisamment régulière et u_j^n la solution discrète d'un schéma telle que $u_j^0 = u^0(x_j)$

Si le schéma est **consistant** et **stable** (potentiellement sous condition sur $(\Delta t, h)$) alors il est convergent dans le sens où

$$\lim_{(\Delta t, h) \rightarrow 0} \sup_{t^n \leq T} \|u(\cdot, t^n) - u_h^n\|_{L^2} = 0.$$

Si le schéma est **d'ordre p en temps et q en espace** (*) alors

$$\exists C(T), \quad \sup_{t^n \leq T} \|u(\cdot, t^n) - u_h^n\|_{L^2} \leq C(T) (\Delta t^p + h^q)$$

(*) Pour les schémas à 2 pas de temps ou plus, il faut aussi que le schéma de démarrage ait le même ordre que le schéma (voir le schéma 3 du TD4).

Le schéma de Lax Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}\right)}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

☑ C'est un schéma **explicite** à un pas de temps.

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_{j-1}^n$$

Les schémas explicites sont très peu coûteux (en terme de calcul et de stockage)

☑ La **vitesse de propagation numérique** est $V_{num} = h / \Delta t$

Condition nécessaire de convergence $V_{num} \geq c \iff \alpha := \frac{c \Delta t}{h} \leq 1$

☑ Si $\alpha \neq 1$, le schéma est consistant **d'ordre 1 en temps et en espace** à α fixé.

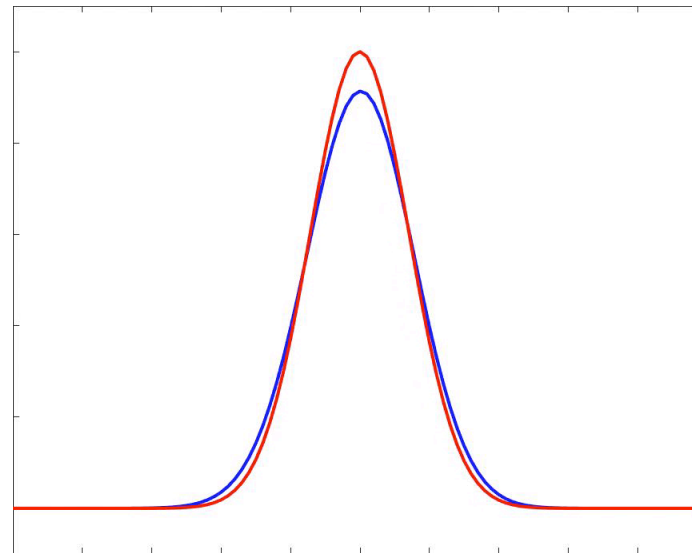
$$\varepsilon_j^n = \frac{c(ca\Delta t - h)}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2) = -\frac{ch(1-\alpha^2)}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2)$$

voir l'amphi 6 (eq. équivalente)

☑ Le schéma est **stable** si et seulement si $\alpha \leq 1$.

☑ Il est donc convergent d'ordre 1 en temps et en espace ssi $\alpha \leq 1$

Le schéma de Lax Friedrichs

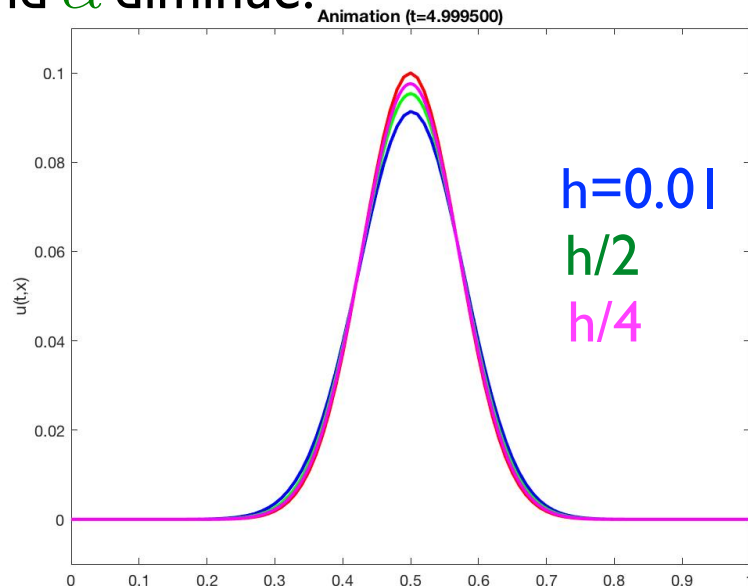


solution de l'EDP
solution du schéma

La solution au cours du temps : $h=0.01$, $\alpha = 0.99$

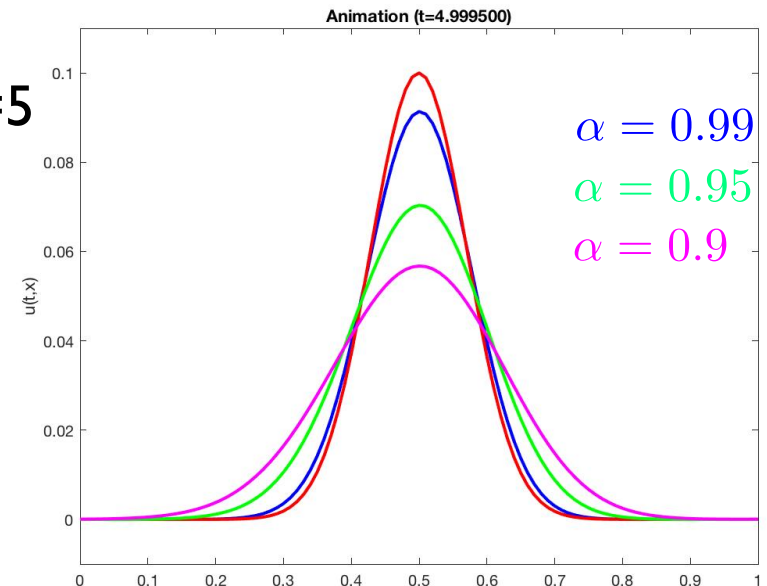
Sous condition CFL le schéma est bien convergent quand $(\Delta t, h) \rightarrow 0$

Mais à $(\Delta t, h)$ fixé, on observe un phénomène de dissipation numérique qui s'accroît quand α diminue.



$h=0.01$
 $h/2$
 $h/4$

Solution à $T=5$



$\alpha = 0.99$
 $\alpha = 0.95$
 $\alpha = 0.9$

...pour différentes valeurs de h , α fixé

... pour différentes valeurs de α , h fixé

Le schéma de Lax Friedrichs

Dans le cas d'une vitesse variable, par exemple $c = c(t)$, la condition CFL doit être satisfaite en tout temps

$$\forall n, |c(t^n)| \frac{\Delta t}{h} \leq 1$$

Le rapport $\frac{\Delta t}{h}$ est donc contraint par $\max_t |c(t)|$.

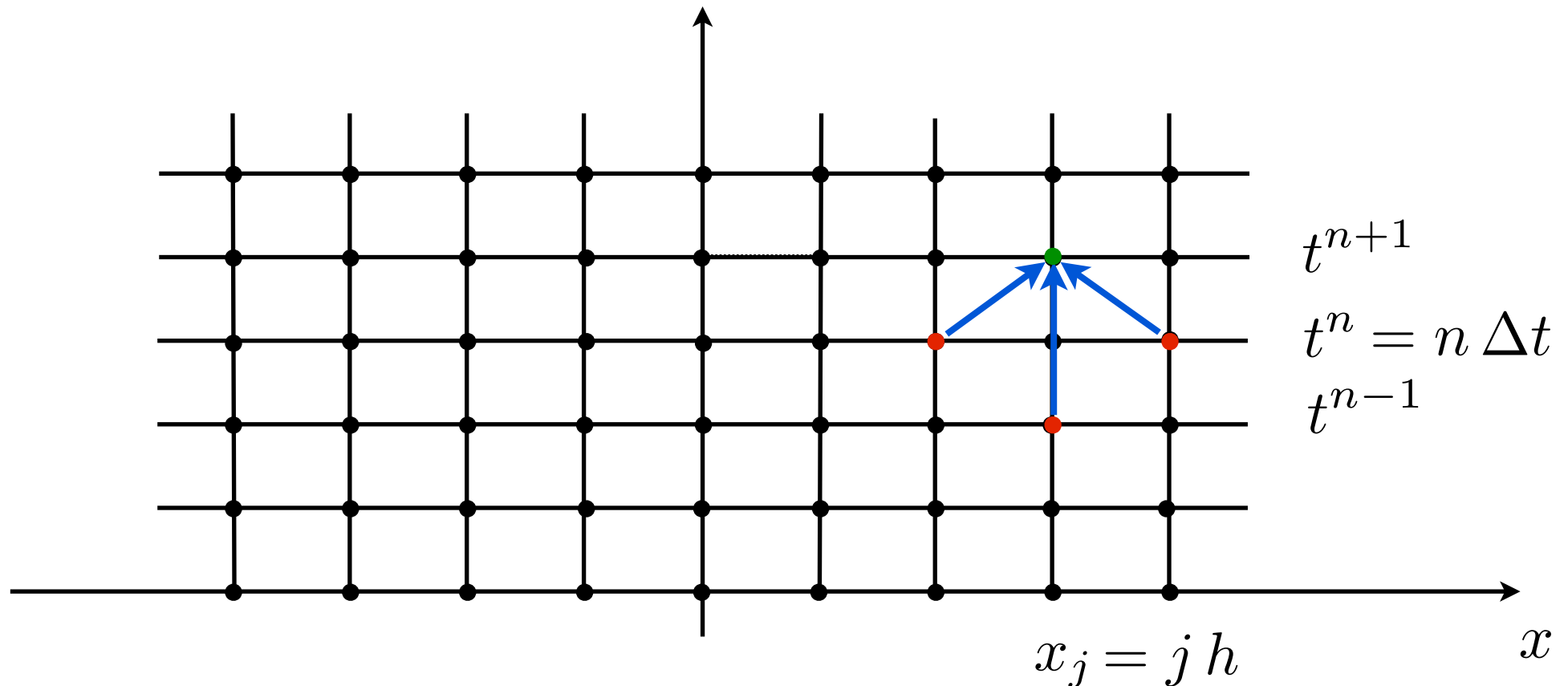
Pour des grandes variations de la vitesse, la dissipation peut être très importante.

Remarques sur les schémas à 2 pas de temps

Un schéma est dit à **2 pas de temps** quand il fait intervenir les pas de temps $n - 1$, n et $n + 1$.

Exemple: le schéma du TD4 Ex1

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$



Remarques sur les schémas à 2 pas de temps

Un schéma est dit à **2 pas de temps** quand il fait intervenir les pas de temps $n - 1$, n et $n + 1$.

Exemple: le schéma 3 du TD4

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

Ces schémas nécessitent un schéma de démarrage à 2 pas de temps:

$$\left| \begin{array}{l} u_j^0 = u^0(x_j), \quad \forall j \\ u_j^1 = ??? \end{array} \right. \quad \text{Il n'est pas naturel d'imposer } u_j^1 \text{ pour l'équation de transport.}$$

On peut utiliser des développements de Taylor pour la solution:

$$\begin{aligned} U_j^1 &= U_j^0 + \mathcal{O}(\Delta t) \quad \Longrightarrow \quad u_j^1 = u_j^0 \\ \text{ou } U_j^1 &= U_j^0 + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^0 + \mathcal{O}(\Delta t^2) = U_j^0 - c\Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^0 + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &\quad \Longrightarrow \quad u_j^1 = u_j^0 - c\Delta t u^{0'}(x_j) \end{aligned}$$

La précision du schéma de démarrage doit être du même ordre que le schéma pour préserver l'ordre de convergence!

Remarques sur les schémas à 2 pas de temps

Pour étudier la stabilité, on utilise la méthode de Fourier-Von Neumann et on cherche les solutions sous la forme

$$u_j^n = \widehat{u}^n(\xi) e^{i\xi x_j}$$

Dans ce cas, on est en général ramené à la relation

$$\widehat{u}_h^{n+1}(\xi) + \widehat{S}_h^1(\xi, \Delta t) \widehat{u}_h^n(\xi) + \widehat{S}_h^2(\xi, \Delta t) \widehat{u}_h^{n-1}(\xi) = 0$$

dont la solution générale est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \widehat{u}_h^n(\xi) = [\widehat{r}_h^{(1)}(\xi, \Delta t)]^n \widehat{\alpha}_h^0(\xi) + [\widehat{r}_h^{(2)}(\xi, \Delta t)]^n \widehat{\alpha}_h^1(\xi)$$

où $\widehat{r}_h^{(1)}(\xi, \Delta t)$, $\widehat{r}_h^{(2)}(\xi, \Delta t)$ sont solutions de l'équation caractéristique

$$r^2 + \widehat{S}_h^1(\xi, \Delta t) r + \widehat{S}_h^2(\xi, \Delta t) = 0$$

Théorème : Un schéma à 2 pas de temps est L^2 stable ssi

$$\exists \nu \geq 0 \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{r}_h^{(1)}(\xi, \Delta t)| \leq 1 + \nu \Delta t \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{r}_h^{(2)}(\xi, \Delta t)| \leq 1 + \nu \Delta t$$

Un schéma implicite (voir Exo I du TD4)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} \right) + c \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) = 0$$

☑ C'est un schéma **implicite** à un pas de temps.

On ne peut pas calculer les $\{u_j^{n+1}, j \in \mathbb{Z}\}$ indépendamment les uns des autres.

Systeme linéaire à résoudre dans le cas de conditions périodiques

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\alpha & 1+\alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1+\alpha & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 1-\alpha & 1+\alpha & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \cdots & 0 & 1-\alpha & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 1-\alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 1-\alpha & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 1+\alpha & 1-\alpha & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \cdots & 0 & 1+\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^n \end{bmatrix}$$

Les schémas implicites sont plus coûteux (en terme de stockage (stockage des matrices) et de calcul (il faut inverser la matrice \mathbb{A})).

Un schéma implicite (voir Exo I du TD4)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} \right) + c \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) = 0$$

☑ C'est un schéma **implicite** à **un pas de temps**.

On ne peut pas calculer les $\{u_j^{n+1}, j \in \mathbb{Z}\}$ indépendamment les uns des autres.

Les schémas implicites sont plus coûteux (en terme de stockage (stockage de la matrice) et de calcul (il faut l'inverser)).

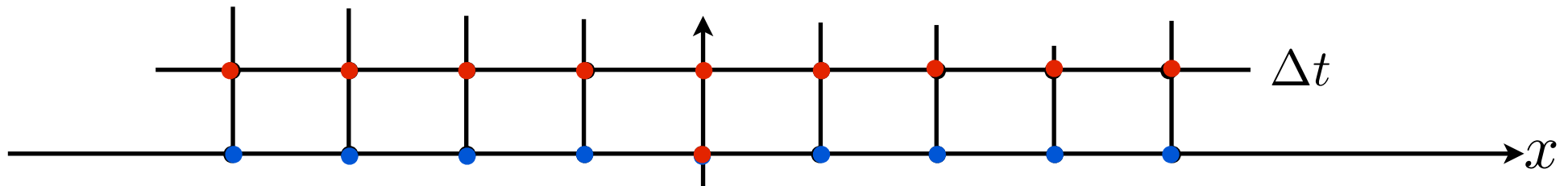
☑ La **vitesse de propagation numérique** est infinie.

On peut réécrire le schéma sous la forme

$$(u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + \alpha (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) = (u_j^n + u_{j+1}^n) - \alpha (u_{j+1}^n - u_j^n)$$

Supposons $u_j^0 = 1$ si $j = 0$ et 0 sinon et $\alpha \neq \pm 1$

$$\forall j \geq 1 \text{ et } j \leq -2, (u_j^1 + u_{j+1}^1) + \alpha (u_{j+1}^1 - u_j^1) = 0 \Rightarrow u_j^1 = A \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^j$$



Un schéma implicite (voir Exo I du TD4)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} \right) + c \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) = 0$$

☑ C'est un schéma **implicite** à **un pas de temps**.

On ne peut pas calculer les $\{u_j^{n+1}, j \in \mathbb{Z}\}$ indépendamment les uns des autres.

Les schémas implicites sont plus coûteux (en terme de stockage (stockage de la matrice) et de calcul (il faut l'inverser)).

☑ La **vitesse de propagation numérique** est infinie.

C'est en général le cas pour les schémas implicites (pas de condition nécessaire de CV)

☑ Le schéma est consistant **d'ordre 2 en temps et en espace** et on a

$$\varepsilon_j^n = C(\alpha) h^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{j+1/2}^{n+1/2} + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3)$$

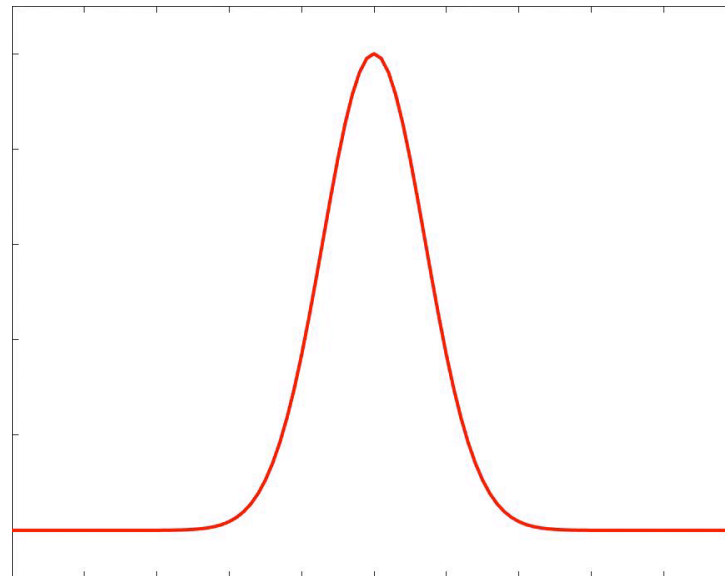
voir l'amphi 6 (eq. équivalente)

☑ Le schéma est **inconditionnellement stable**.

Il n'y a aucune contrainte sur la discrétisation, i.e. sur le rapport $\frac{\Delta t}{h}$

☑ Il est donc convergent d'ordre 2 en temps et en espace.

Un schéma implicite (voir Exo I du TD4)

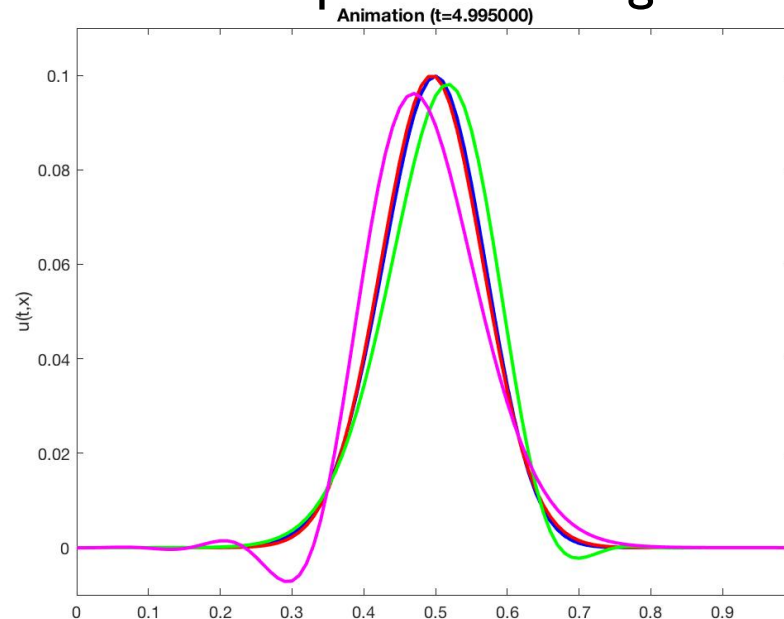


solution de l'EDP
solution du schéma

La solution au cours du temps : $h=0.01$, $\alpha = 1.5$

Le schéma est stable quelle que soit la valeur de α . On observe un phénomène de dispersion numérique qui s'accroît quand α s'éloigne de 1

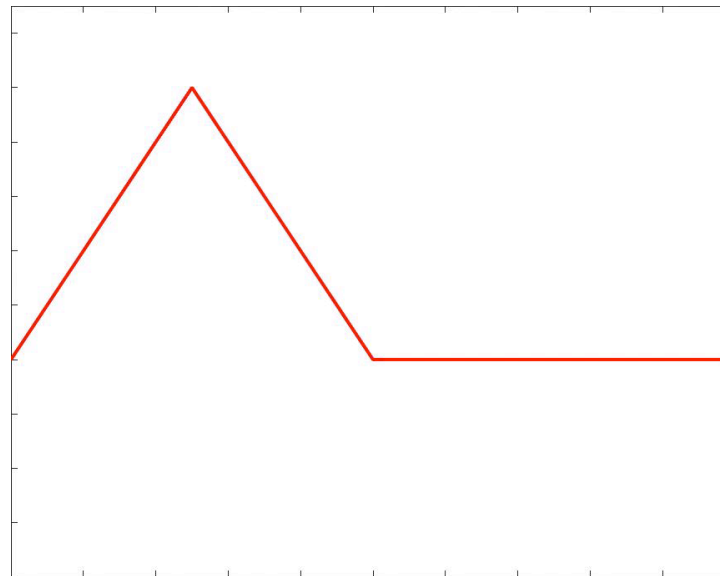
Solution à $T=5$...



$\alpha = 0.9$
 $\alpha = 0.5$
 $\alpha = 1.5$

... pour différentes valeurs de α , h fixé

Un schéma implicite (voir Exo I du TD4)

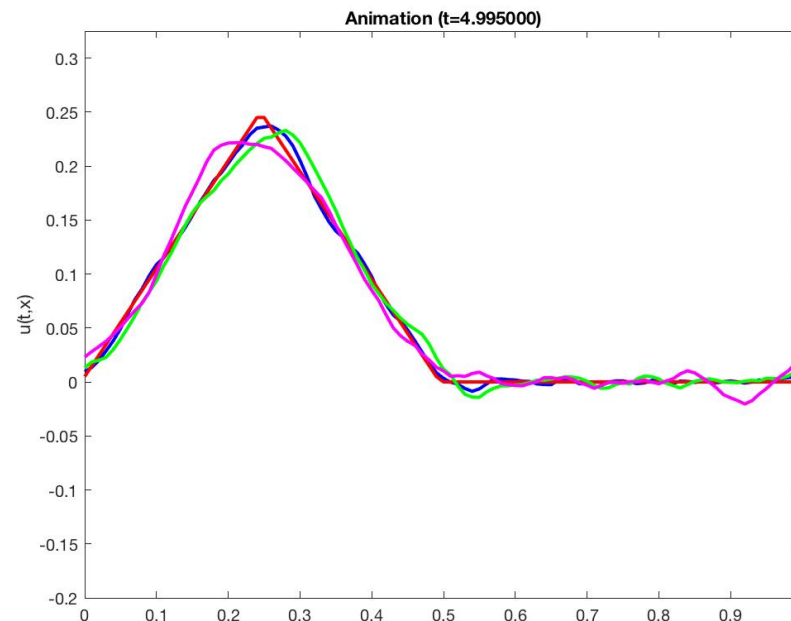


solution de l'EDP
solution du schéma

La solution au cours du temps : $h=0.01$, $\alpha = 1.5$

Le phénomène s'accroît pour une donnée initiale moins régulière!

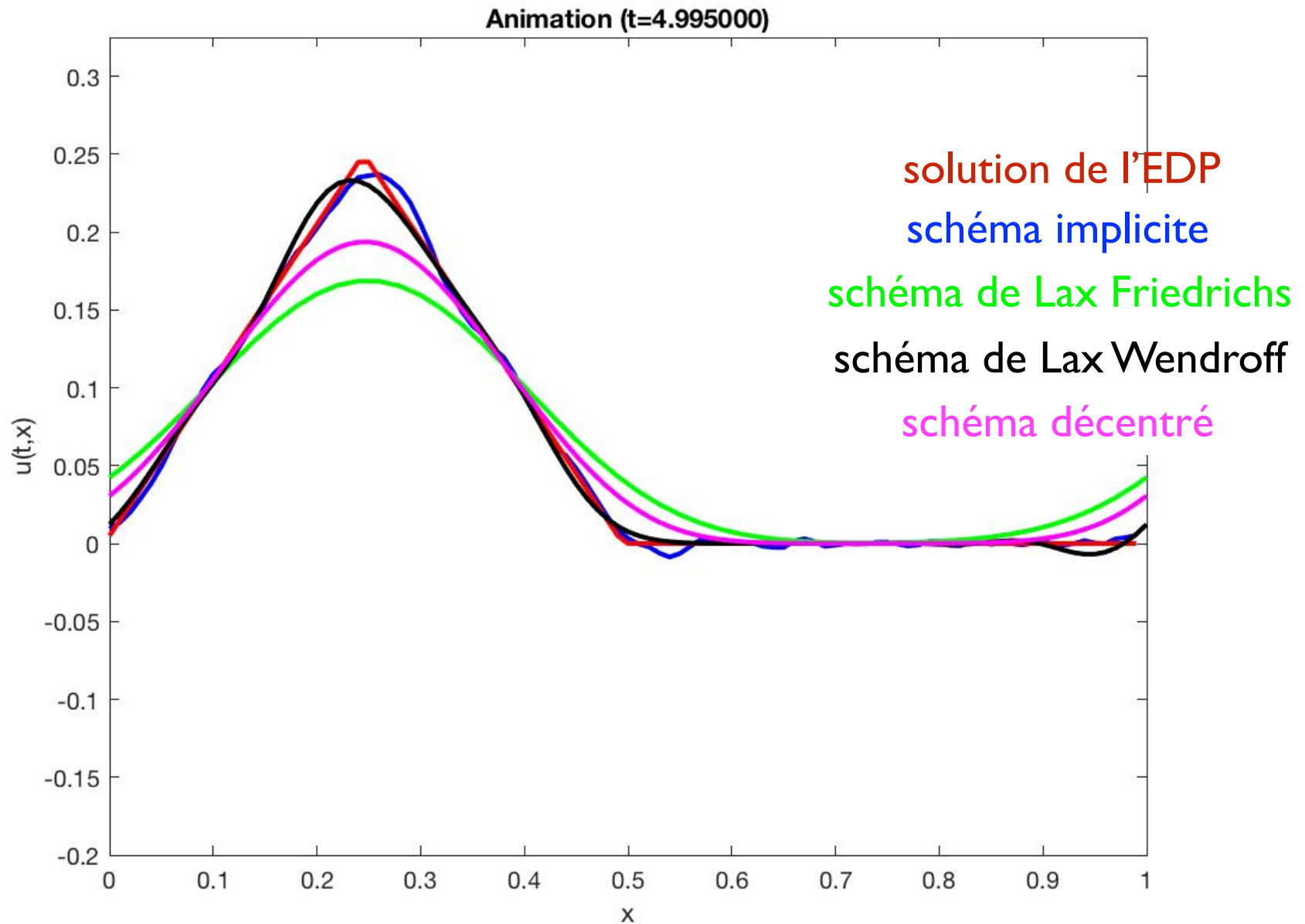
Solution à $T=5$...



$\alpha = 0.9$
 $\alpha = 0.5$
 $\alpha = 1.5$

... pour différentes valeurs de α , h fixé

Comparaison de schémas



En plus de l'ordre de consistance et la stabilité, la dissipation numérique et la dispersion numérique constitue d'autres éléments de comparaison.