

Approximation par différences finies de l'équation de transport

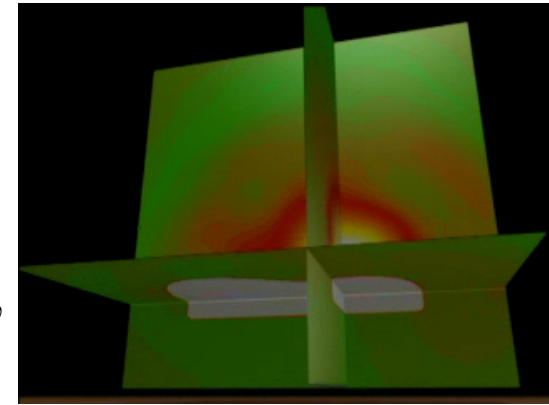
- Principe de la méthode des différences finies
- Application à l'équation de transport : Schéma explicite centré
- Vitesse de propagation numérique
- Consistance des schémas
- Stabilité des schémas

Diffraction d'une onde **électromagnétique**



$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{H} = 0, \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \end{cases}$$

Onde **acoustique** produite par une guitare



$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = 0, \\ \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases}$$

En général, la solution de ces EDPs ne peut pas être calculée analytiquement, on va donc chercher une approximation de cette solution, que nous sommes capables de calculer avec un ordinateur.

La méthode de discrétisation vue dans ce cours est la **méthode des Différences Finies** que nous appliquons à **l'équation de transport à vitesse constante** (Amphi 4 et 5).

On approche l'EDP par une équation discrète/un schéma (**consistance**) et on espère que la solution du schéma approche bien la solution de l'EDP (**convergence**). MAIS ce n'est pas toujours le cas (la **stabilité** est **nécessaire** dans le cas linéaire).

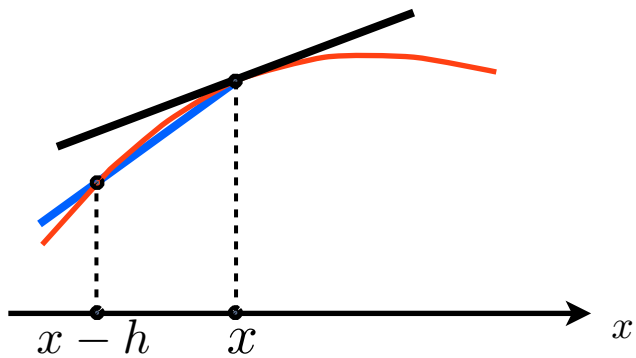
Principe de la méthode des différences finies

Objectif : Construire des approximations de la dérivée d'une fonction à l'aide de valeurs discrètes de celle-ci, sur un maillage régulier de pas $h > 0$

$$u'(x) \simeq D_h u(x)$$

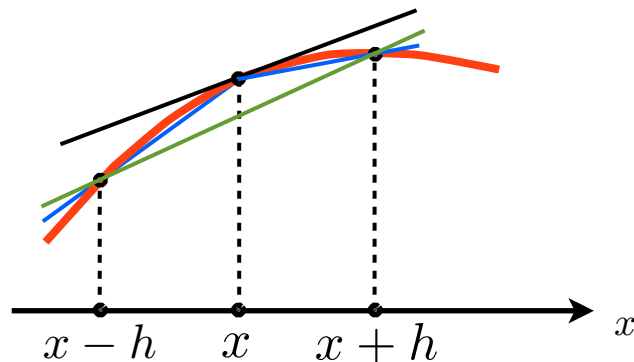
Approximation
décentrée à gauche

$$D_h^- u(x) := \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$



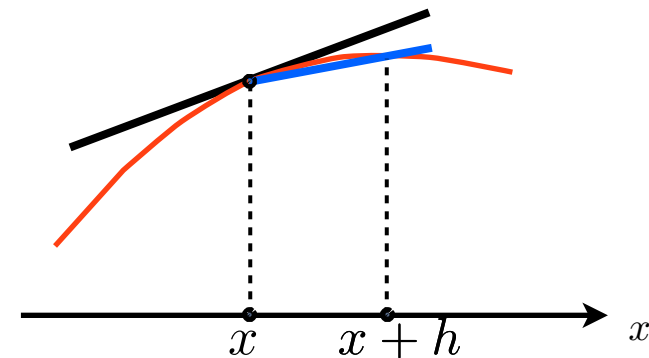
Approximation
centrée

$$D_h^0 u(x) := \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$



Approximation
décentrée à droite

$$D_h^+ u(x) := \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$



Il n'y a pas unicité des formules d'approximation.

Principe de la méthode des différences finies

Soit un maillage de pas $h > 0$ et D_h un opérateur d'approximation aux différences de $\frac{d}{dx}$, on appelle **erreur de troncature** la quantité

$$\varepsilon(x, h) := D_h u(x) - u'(x)$$

L'approximation est **consistante** si, pour u régulière $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(x, h) = 0$.

L'approximation est **d'ordre** $k \in \mathbb{N}$ si $\varepsilon(x, h) = \mathcal{O}(h^k)$

Pour l'étude de la consistance, il faut utiliser des **développements de Taylor**.

Exemple - L'approximation décentrée à droite est consistante et d'ordre 1 :

$$u(x+h) = u(x) + h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$\Rightarrow \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) = \frac{h}{2} u''(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon^+(x, h) = \mathcal{O}(h)$$

Principe de la méthode des différences finies

Exemple - L'approximation centrée est consistante et d'ordre 2 :

$$u(x+h) = u(x) + h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$u(x-h) = u(x) - h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) - \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\Rightarrow u(x+h) - u(x-h) = 2h u'(x) + \frac{h^3}{3} u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\Rightarrow \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) = \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^3) \Rightarrow \varepsilon^0(x, h) = \mathcal{O}(h^2)$$

On peut obtenir des approximations plus précises en utilisant plus de points.

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\frac{u(x+2h) - u(x-2h)}{4h} = u'(x) + 4 \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + (1-\alpha) \frac{u(x+2h) - u(x-2h)}{4h} \\ = u'(x) + [\alpha + 4(1-\alpha)] \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

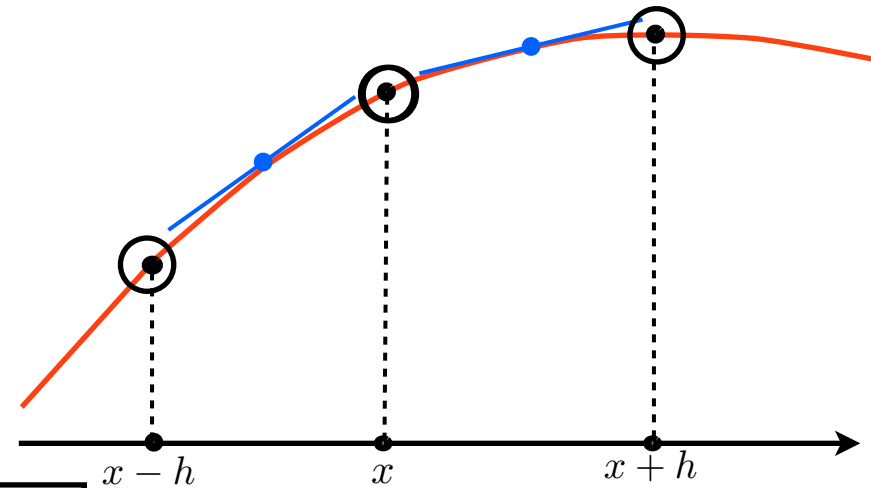
On obtient une approximation d'ordre 4 avec $\alpha = 4/3$

Principe de la méthode des différences finies

Avec le même principe, on peut approcher des dérivées d'ordre supérieur

$$u''(x) \simeq \frac{u'(x + h/2) - u'(x - h/2)}{h}$$

$$u'(x + h/2) \simeq \frac{u(x + h) - u(x)}{h} \quad u'(x - h/2) \simeq \frac{u(x) - u(x - h)}{h}$$



$$u''(x) \simeq D_h^2 u(x) := \frac{u(x + h) - 2u(x) + u(x - h))}{h^2}$$

Erreur de consistance

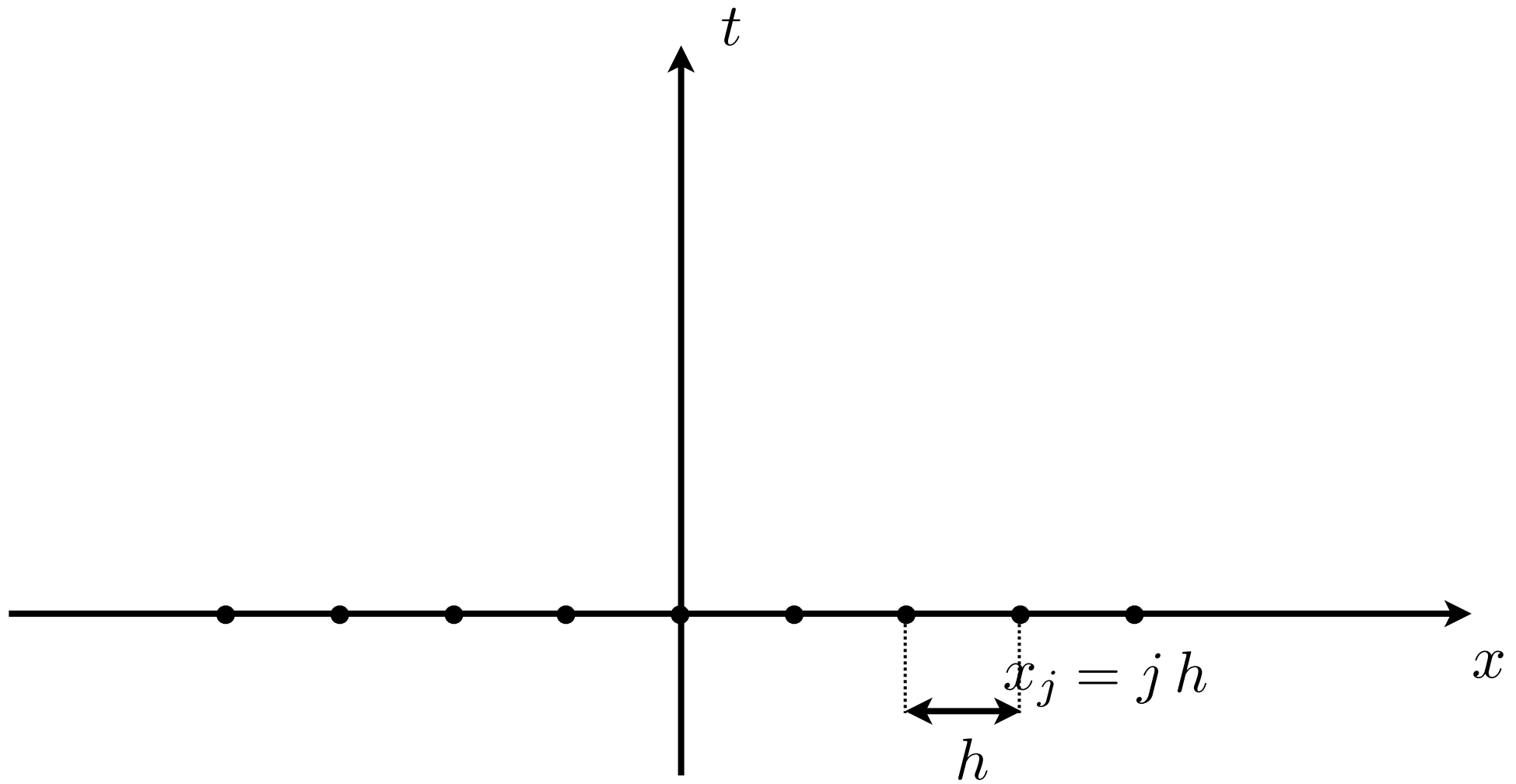
$$u(x + h) = u(x) + h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)$$

$$u(x - h) = u(x) - h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) - \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)$$

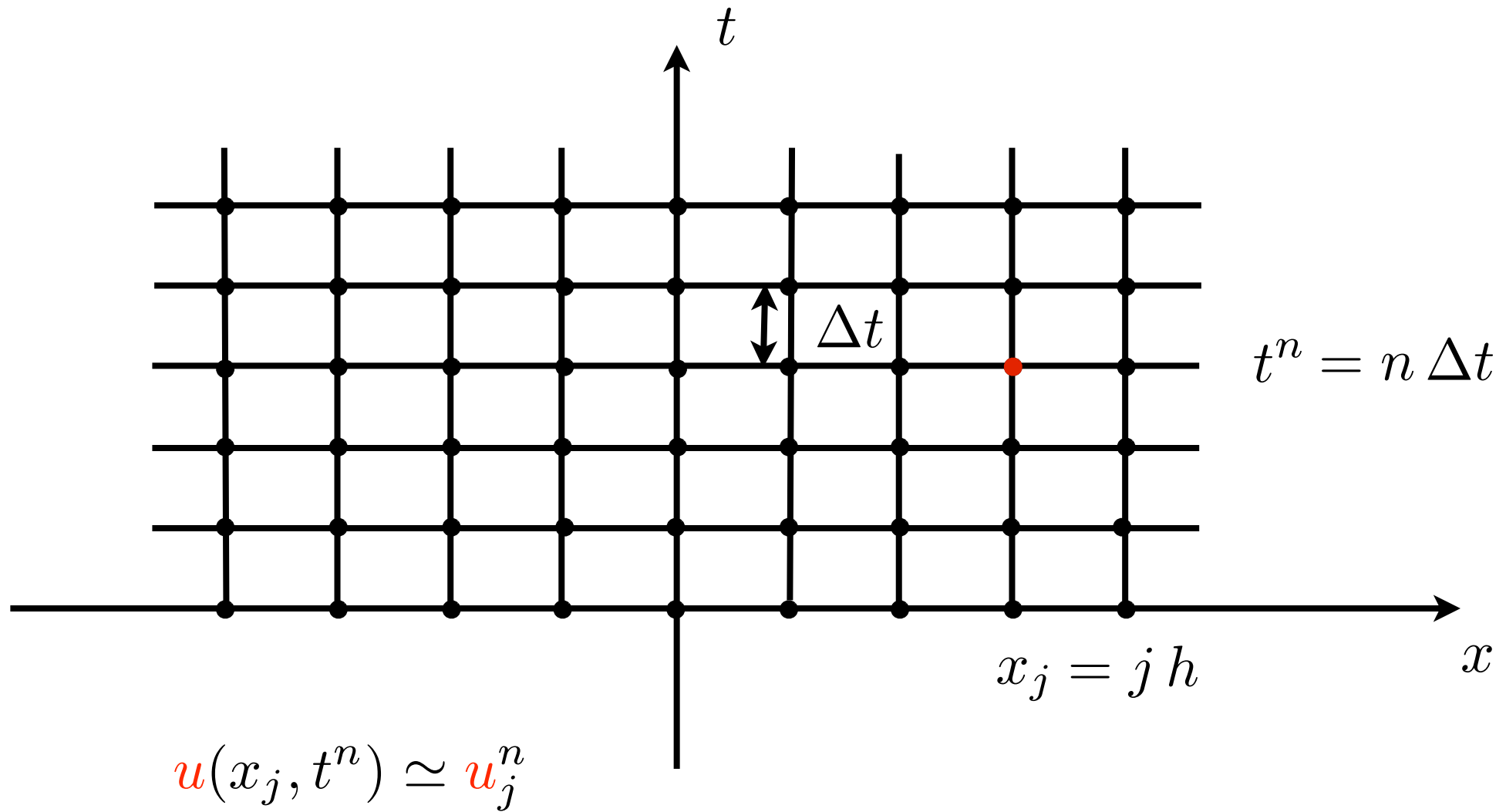
$$\Rightarrow u(x + h) + u(x - h) = 2u(x) + h^2 u''(x) + \frac{h^4}{12} u^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)$$

$$\Rightarrow D_h^2 u(x) = u''(x) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^3) \quad \text{L'approximation est d'ordre 2.}$$

Principe de la méthode des différences finies



Principe de la méthode des différences finies

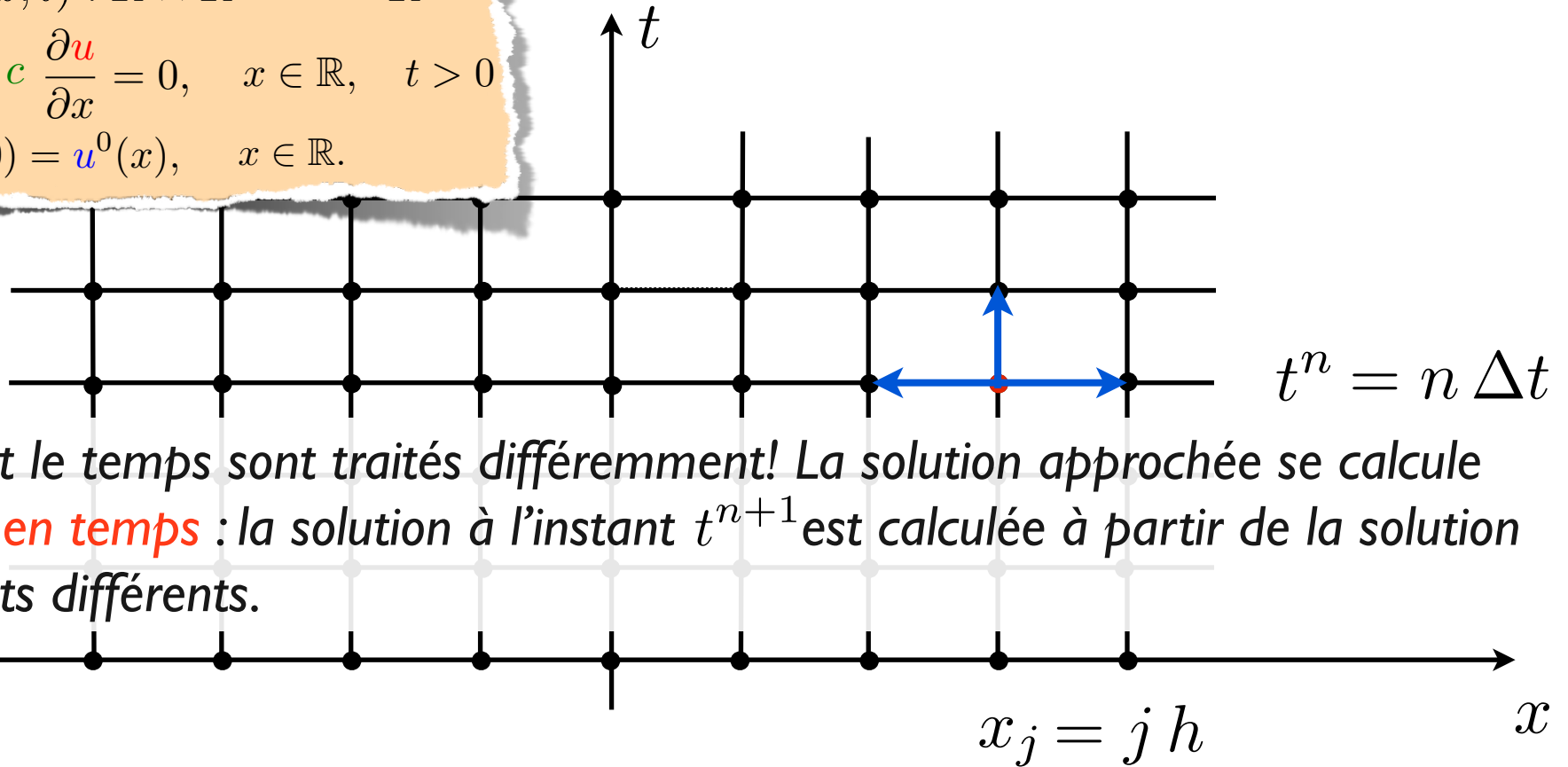


Construction du schéma explicite centré pour l'équation de transport

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$



L'espace et le temps sont traités différemment! La solution approchée se calcule **pas à pas en temps** : la solution à l'instant t^{n+1} est calculée à partir de la solution aux instants différents.

$$\partial_t u(x_j, t^n) \simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

$$\partial_x u(x_j, t^n) \simeq \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

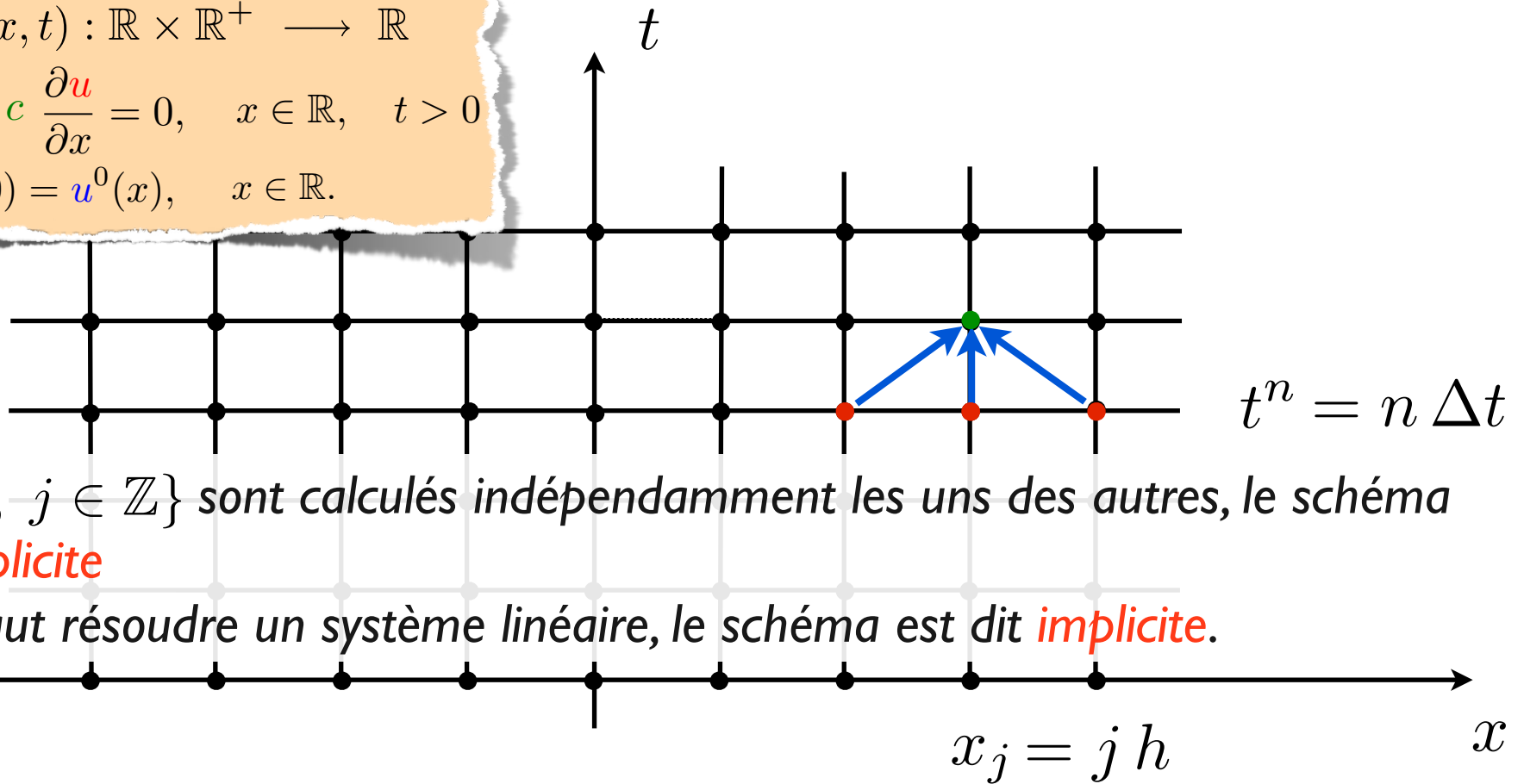
$$u_j^0 = u^0(x_j)$$

Construction du schéma explicite centré pour l'équation de transport

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$



- Si $\{u_j^{n+1}, j \in \mathbb{Z}\}$ sont calculés indépendamment les uns des autres, le schéma est dit **explicite**
- Sinon, il faut résoudre un système linéaire, le schéma est dit **implicite**.

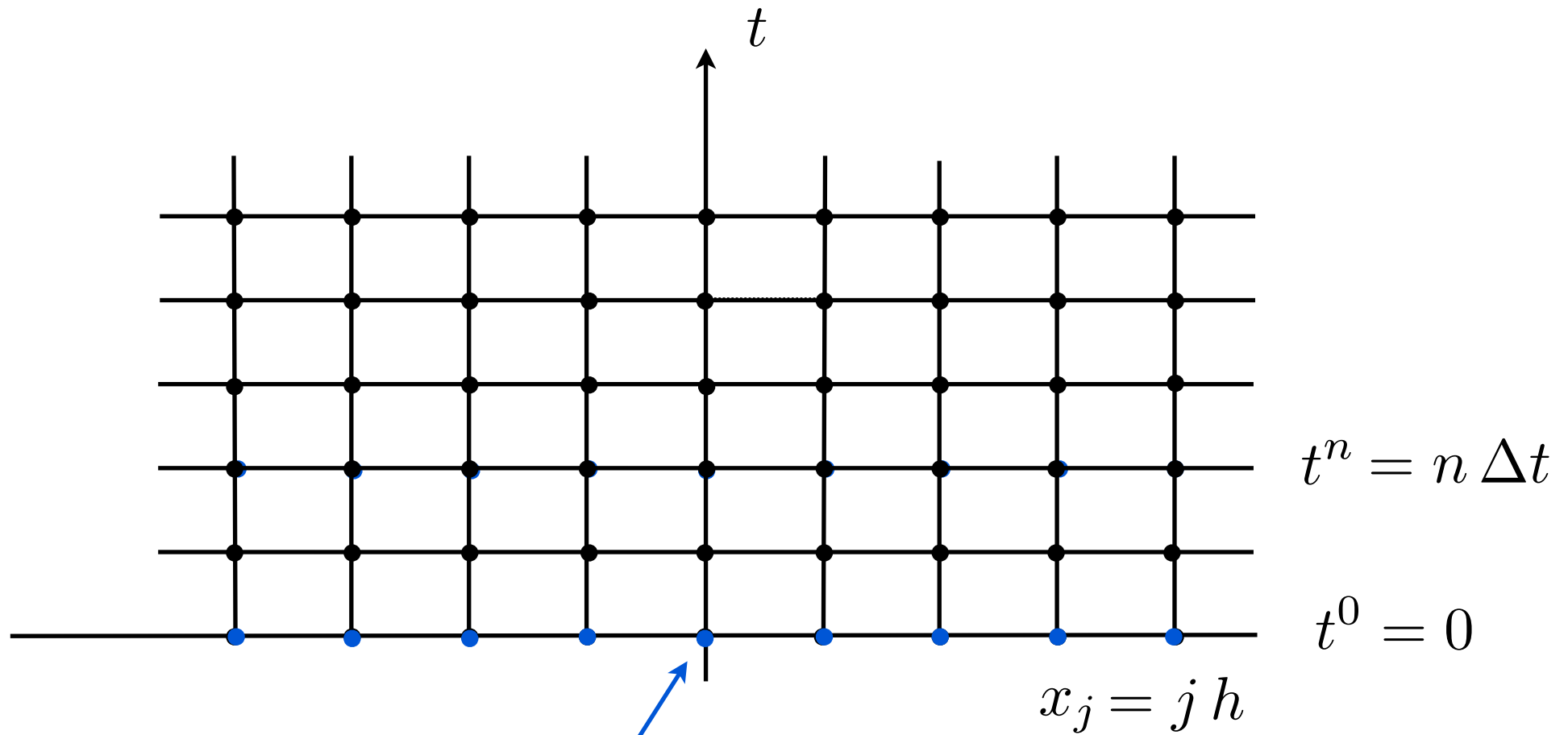
$$\alpha = \frac{c \Delta t}{h}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

$$u_j^0 = u^0(x_j)$$

Le schéma est ici **explicite**

Calcul de la solution discrète

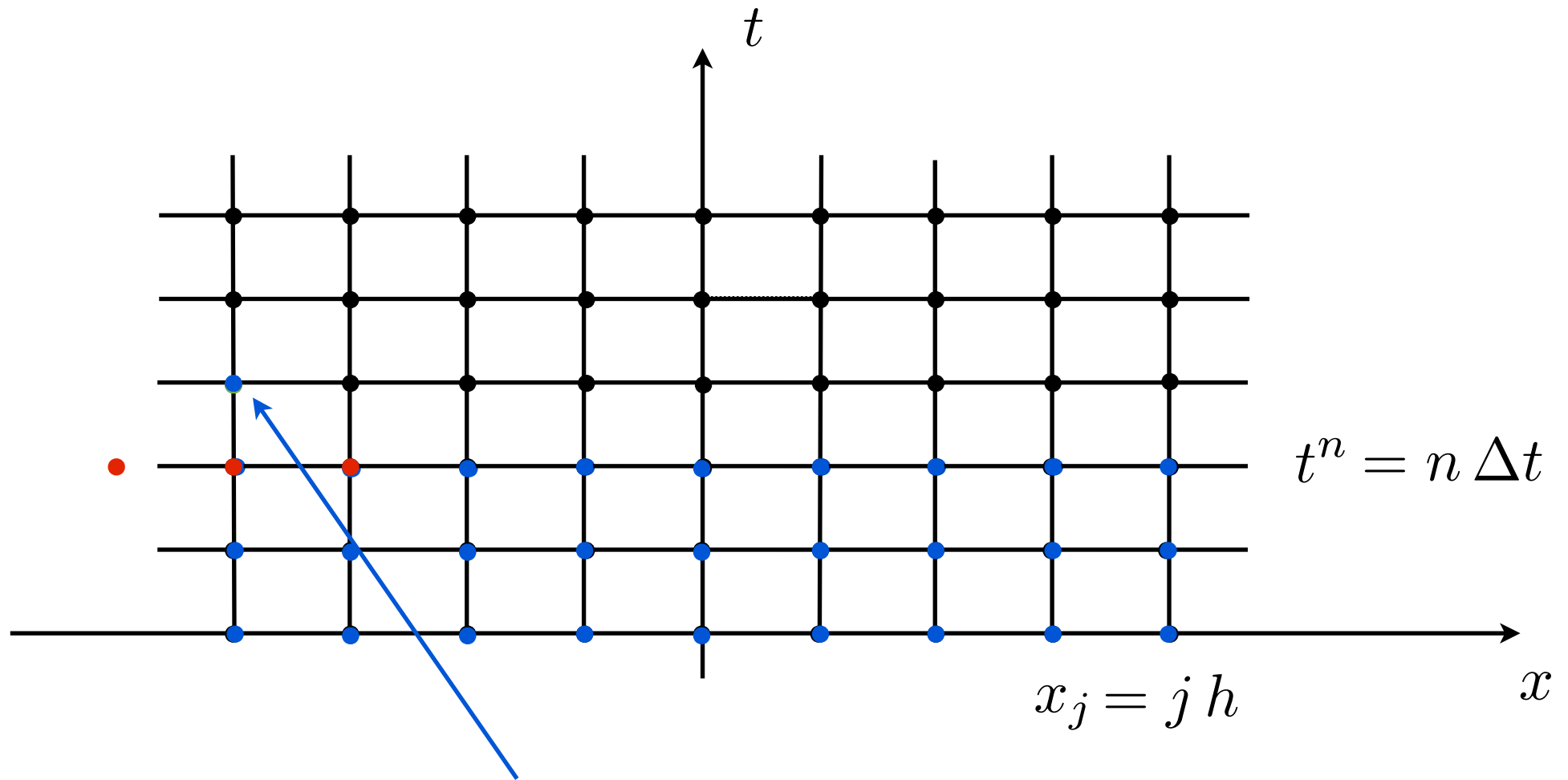


$$\alpha = \frac{c \Delta t}{h}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

$$u_j^0 = u^0(x_j)$$

Calcul de la solution discrète

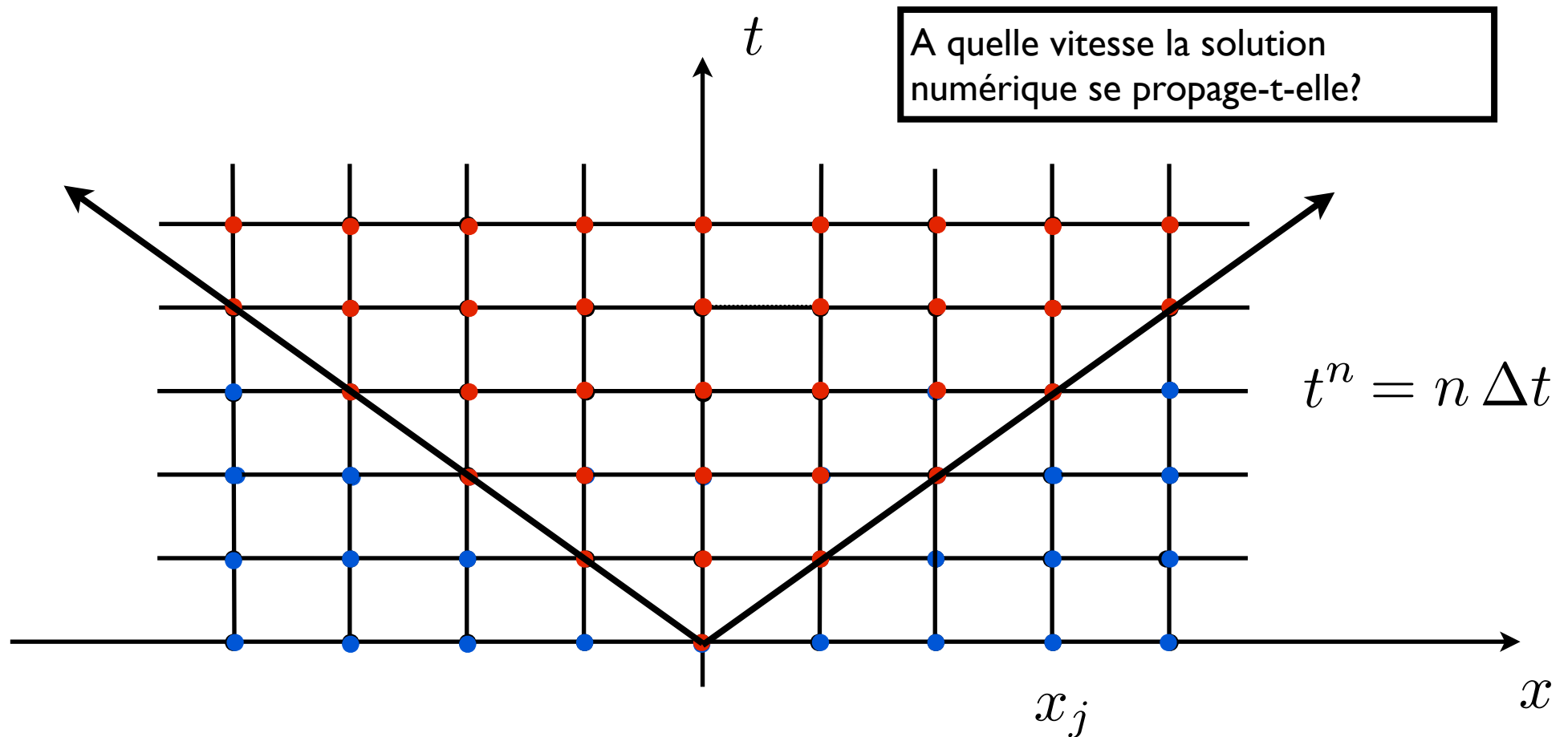


$$\alpha = \frac{c \Delta t}{h}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

$$u_j^0 = u^0(x_j)$$

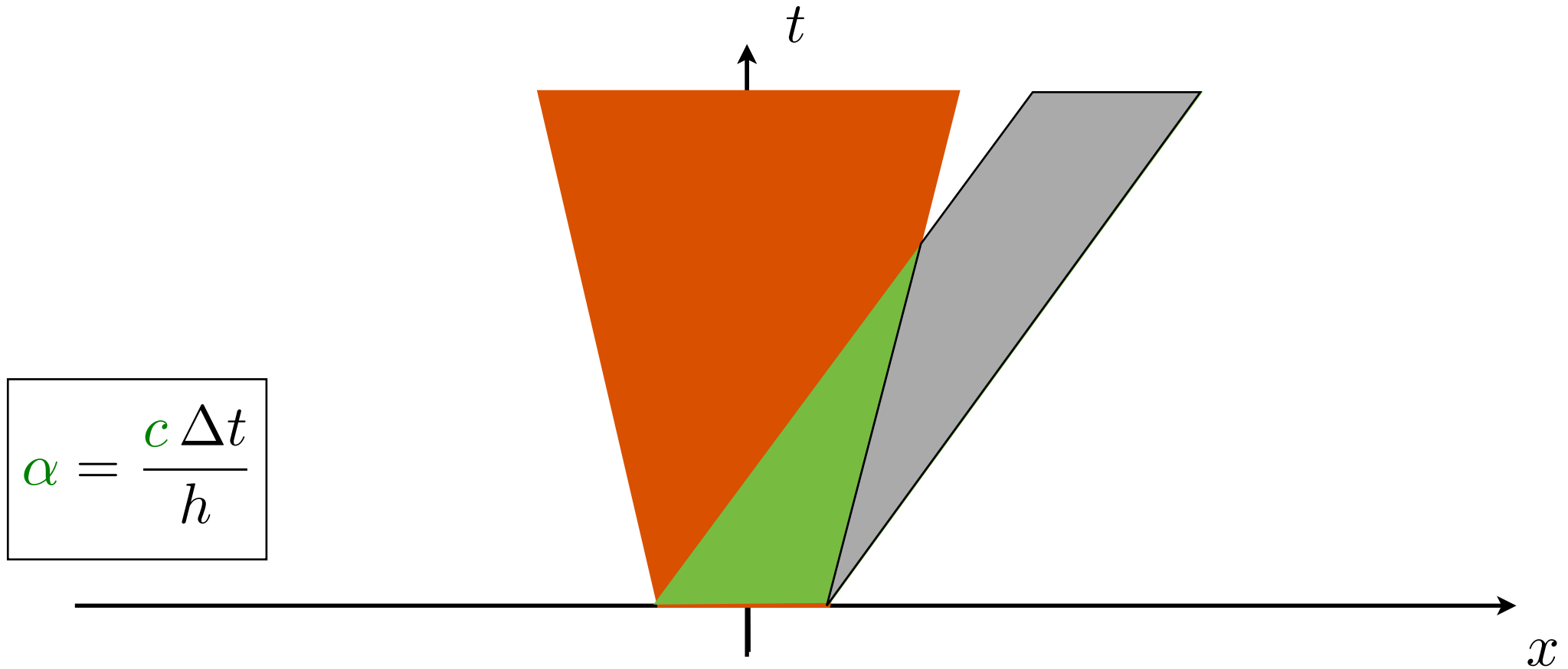
Vitesse de propagation numérique



Ici la vitesse de propagation **numérique** est de

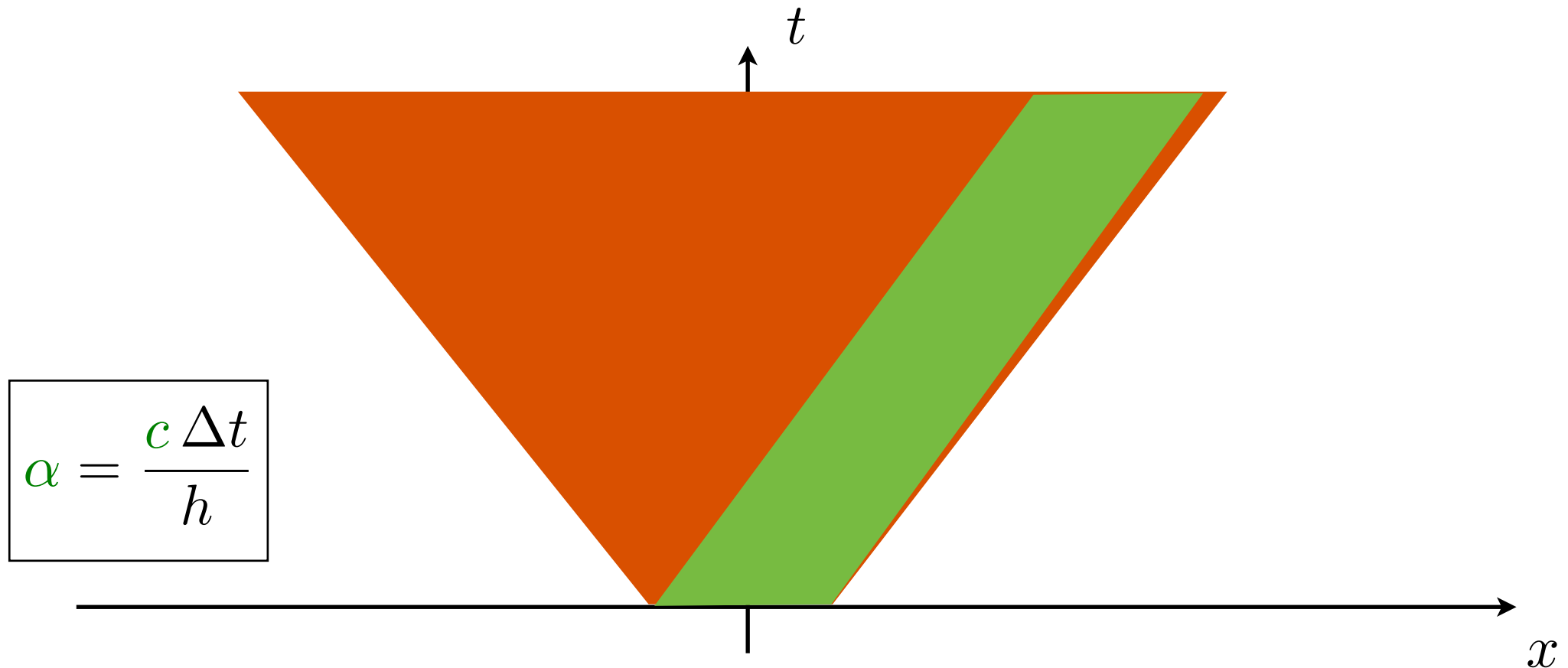
$$V_{num} = h / \Delta t$$

Condition nécessaire de convergence



- en vert : support de la solution exacte
en rouge : support de la solution numérique
Cas I : $\alpha > 1$ La convergence est impossible

Condition nécessaire de convergence



en **vert** : support de la solution **exacte**
en **rouge** : support de la solution **numérique**

Cas 2 : $\alpha \leq 1$ La convergence est **possible**

Condition nécessaire de convergence de Courant - Friedrichs - Lewy (**CFL**)

$$V_{num} \geq c \iff \alpha := \frac{c \Delta t}{h} \leq 1$$

Etude de la consistance et de l'ordre du schéma

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Trouver u_j^n

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_j^0 = u^0(x_j) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Notation: $U_j^n := u(x_j, t^n)$ où u est une solution **régulière** du problème continu.

Définitions : on appelle **erreur de troncature** de ce schéma

$$\varepsilon_j^n := \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}$$

Le schéma est **consistant** ssi $\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \varepsilon_j^n = 0$

Le schéma est précis d'**ordre** k en **temps** et p en **espace** ssi

$$\varepsilon_j^n = O(\Delta t^p + h^k) \quad ((p, k) \in \mathbb{N}^2)$$

Etude de la consistance et de l'ordre du schéma

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Trouver u_j^n

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_j^0 = u^0(x_j) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Notation: $U_j^n := u(x_j, t^n)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n := \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n := \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n), \dots$

En utilisant les calculs du début de l'amphi (en remplaçant h par Δt)

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n + \mathcal{O}(h^3)$$

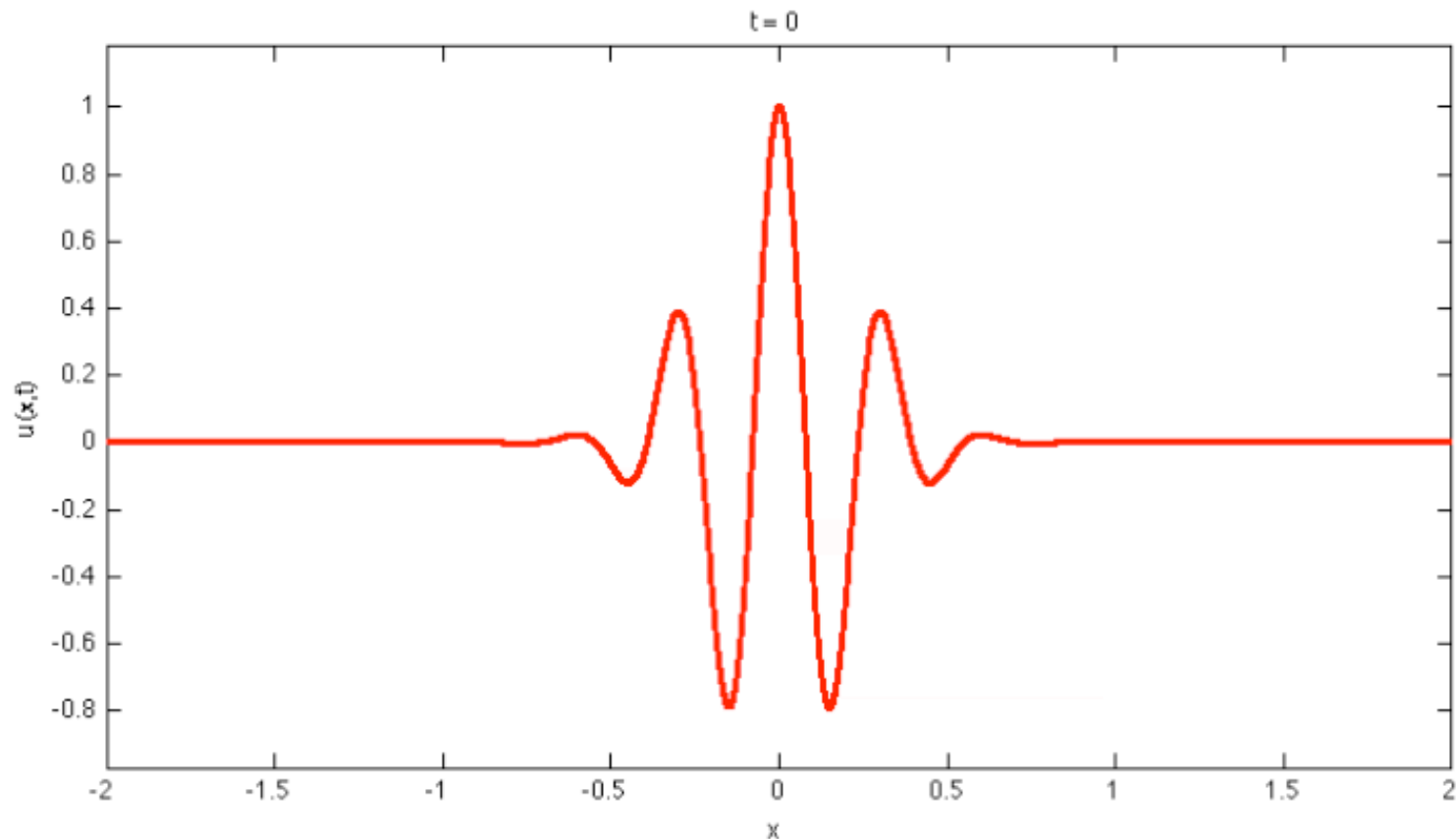
$$\varepsilon_j^n = \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n}_0 + \mathcal{O}(\Delta t + h^2)$$

$$\varepsilon_j^n = \mathcal{O}(\Delta t + h^2)$$

Le schéma est d'ordre **1** en **temps** et **2** en **espace**.

Etude de la consistance et de l'ordre du schéma

La solution d'un schéma **consistant** approche-t-elle la solution de l'équation continue ? **Non** : en plus d'être consistant le schéma doit être **stable**.



Simulations numériques : $h=0.005$, $\alpha = 1$

Stabilité du schéma

Stabilité de la solution du problème continu

Rappel

$$u^0 \in L^2(\mathbb{R}) \implies u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^2} = \|u^0\|_{L^2}$$

Preuve: (en utilisant la transformée de Fourier)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad u(x, t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}(\xi, t) & \frac{d\hat{u}}{dt} + i c \xi \hat{u} = 0 \\ \implies \hat{u}(\xi, t) = e^{i c \xi t} \hat{u}^0(\xi), & \implies \forall t > 0, \quad \|\hat{u}(\cdot, t)\|_{L^2} = \|\hat{u}^0\|_{L^2} \end{aligned}$$

On conclut en utilisant le théorème de Plancherel

Pour définir la stabilité L^2 d'un schéma, on va construire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction u_h^n à partir des $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$.

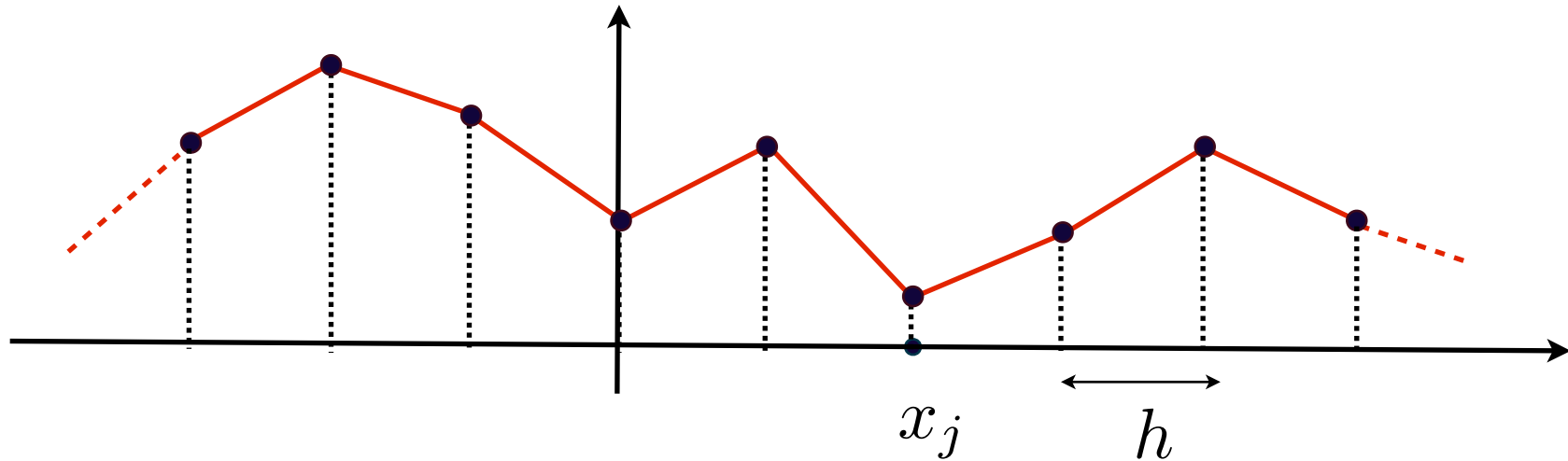
Pour étudier la stabilité, il suffit de réécrire le schéma discret comme un problème satisfait par u_h^n , auquel on pourra appliquer la transformée de Fourier (comme pour le problème continu).

La méthode de **Fourier Von-Neumann** est une "recette" de calcul qui permet d'étudier la stabilité directement sur le schéma!

Définition de la stabilité

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit, à partir des $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$, une fonction u_h^n dans $V = L^2(\mathbb{R})$ via une **interpolation linéaire**

$$u_h^n \in V_h = \{u_h \in V \cap C^0(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}, u_h|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1\}$$



Définition : Le schéma est **L^2 stable** ssi

$$\forall T > 0, \quad \exists C(T) > 0, \quad \forall t^n \leq T, \quad \|u_h^n\|_{L^2} \leq C(T) \|u_h^0\|_{L^2}$$

Si cette inégalité n'a lieu que pour des pas Δt et h astreints à certaines inégalités, le schéma est dit **conditionnellement stable**.

Etude de la stabilité du schéma explicite centré

Le schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

se réécrit

$$\frac{u_h^{n+1}(x) - u_h^n(x)}{\Delta t} + c \frac{u_h^n(x+h) - u_h^n(x-h)}{2h} = 0,$$

C'est évident pour $x = x_j$ et pour $x \in (x_j, x_{j+1})$ c'est vrai par linéarité.

Si on applique la Transformée de Fourier à cette dernière équation

$$u_h^n(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}_h^n(\xi)$$

On trouve

$$\frac{\hat{u}_h^{n+1}(\xi) - \hat{u}_h^n(\xi)}{\Delta t} + c \frac{\hat{u}_h^n(\xi)e^{i\xi h} - \hat{u}_h^n(\xi)e^{-i\xi h}}{2h} = 0,$$

soit $\hat{u}_h^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t) \hat{u}_h^n(\xi)$ avec $\hat{S}_h(\xi, \Delta t) = 1 - i \alpha \sin \xi h$

$$\text{où } \alpha = \frac{c \Delta t}{h}.$$

Condition de stabilité pour les schémas à un pas de temps

Un schéma est dit à **un pas de temps** quand il ne fait intervenir que les pas de temps n et $n + 1$.

Dans ce cas, on est en général ramené à la relation

$$\widehat{u}_h^{n+1}(\xi) = \widehat{S}_h(\xi, \Delta t) \widehat{u}_h^n(\xi)$$

où $\widehat{S}_h(\xi, \Delta t)$ est appelé le **coefficient d'amplification**.

Théorème : Un schéma à un pas de temps est L^2 stable ssi

$$\exists \nu \geq 0 \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{S}_h(\xi, \Delta t)| \leq 1 + \nu \Delta t$$

Si la condition est réalisée avec $\nu = 0$, on parle de **stabilité uniforme**.

Montrons que c'est une condition suffisante. Supposons la condition est réalisée.

$$\begin{aligned} \widehat{u}_h^n(\xi) = \left(\widehat{S}_h(\xi, \Delta t) \right)^n \widehat{u}_h^0(\xi) &\Rightarrow \|\widehat{u}_h^n(\xi)\|_{L^2} \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{S}_h(\xi, \Delta t)|^n \|\widehat{u}_h^0(\xi)\|_{L^2} \\ &\leq (1 + \nu \Delta t)^n \|\widehat{u}_h^0(\xi)\|_{L^2} \end{aligned}$$

Il suffit d'utiliser l'inégalité $(1 + s/n)^n \leq e^s$ pour déduire $\|\widehat{u}_h^n(\xi)\|_{L^2} \leq e^{\nu n \Delta t} \|\widehat{u}_h^0(\xi)\|_{L^2}$

Le théorème de Plancherel permet de conclure $\forall t^n \leq T, \quad \|u_h^n\|_{L^2} \leq e^{\nu T} \|u_h^0\|_{L^2}$

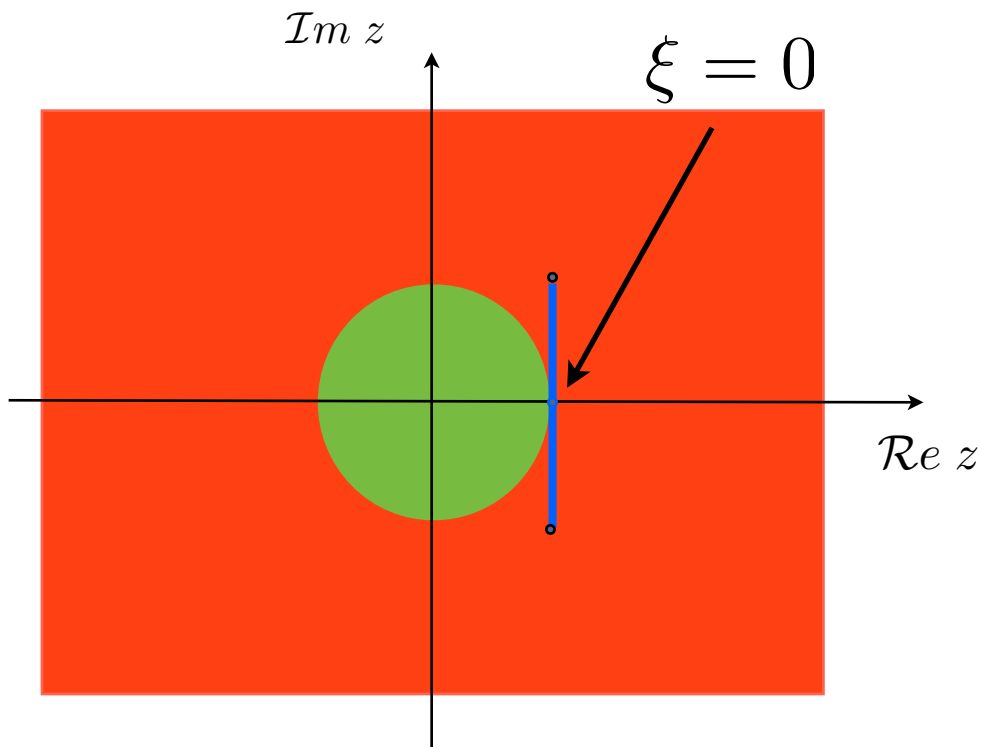
Etude de la stabilité du schéma explicite centré

$$\widehat{u}_h^{n+1}(\xi) = \widehat{S}_h(\xi, \Delta t) \widehat{u}_h^n(\xi) \quad \text{avec} \quad \widehat{S}_h(\xi, \Delta t) = 1 - i \alpha \sin \xi h$$

$$\text{où } \alpha = \frac{c \Delta t}{h}.$$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{S}_h(\xi, \Delta t)| = (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$$

Le schéma explicite centré est **inconditionnellement instable**



La méthode de Fourier - Von Neumann

En pratique, on part directement du schéma et on cherche les solutions de la forme

$$u_j^n = \hat{u}^n(\xi) e^{i\xi x_j}$$

On est ramené aux mêmes relations que si nous étions passés par la construction de u_h^n .

Le schéma de Lax Friedrichs

$$\partial_x u(x_j, t^n) \simeq \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

$$\partial_t u(x_j, t^n) \simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

On remplace u_j^n par $\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}$

$$u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right) / \Delta t$$

Le schéma de Lax Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right)}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

et se réécrit

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) u_{j-1}^n \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{c \Delta t}{h}.$$

C'est un schéma **explicite** à **un pas de temps**.

Comme pour le schéma explicite centré, on montre que la **vitesse de propagation numérique** est $V_{num} = h / \Delta t$

Une **condition nécessaire de convergence** est donnée par la CFL

$$V_{num} \geq c \iff \alpha := \frac{c \Delta t}{h} \leq 1$$

Consistance du schéma de Lax Friedrichs

Si on note $U_j^n := u(x_j, t^n)$ l'erreur de troncature est donnée par

$$\varepsilon_j^n := \frac{U_j^{n+1} - \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}$$

En remarquant que $\frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} = U_j^n + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2}$ on trouve

$$\varepsilon_j^n = (\varepsilon_j^n)_{SC} + \frac{h^2}{2\Delta t} \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} \simeq \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^2)$$

En réécrivant $\frac{h^2}{\Delta t} = \frac{ch}{2\alpha}$, on obtient

$$\varepsilon_j^n = (\varepsilon_j^n)_{SC} + \frac{ch}{2\alpha} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^2) \right]$$

A α fixé, le schéma est consistant et **d'ordre 1 en temps et en espace**.

Stabilité du schéma de Lax Friedrichs

Le schéma se réécrit

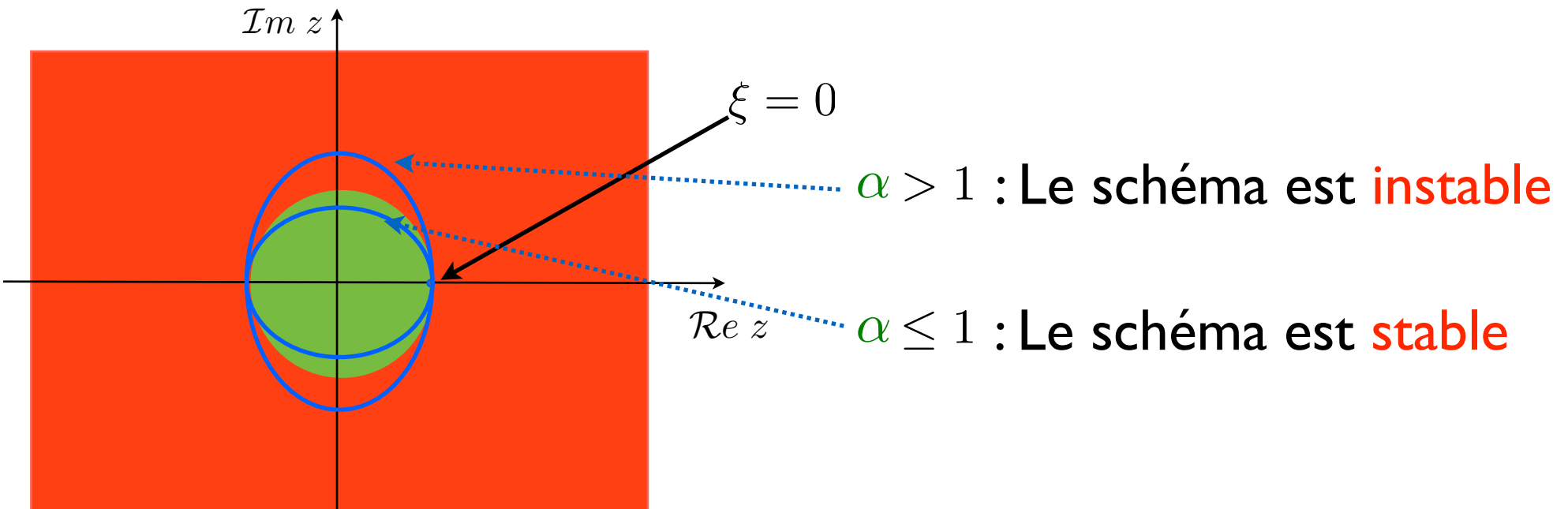
$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_{j-1}^n$$

On utilise la méthode de Fourier-Von Neumann et on cherche les solutions sous la forme

$$u_j^n = \hat{u}^n(\xi) e^{i\xi x_j}$$

ce qui mène à $\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t) \hat{u}^n(\xi)$ avec

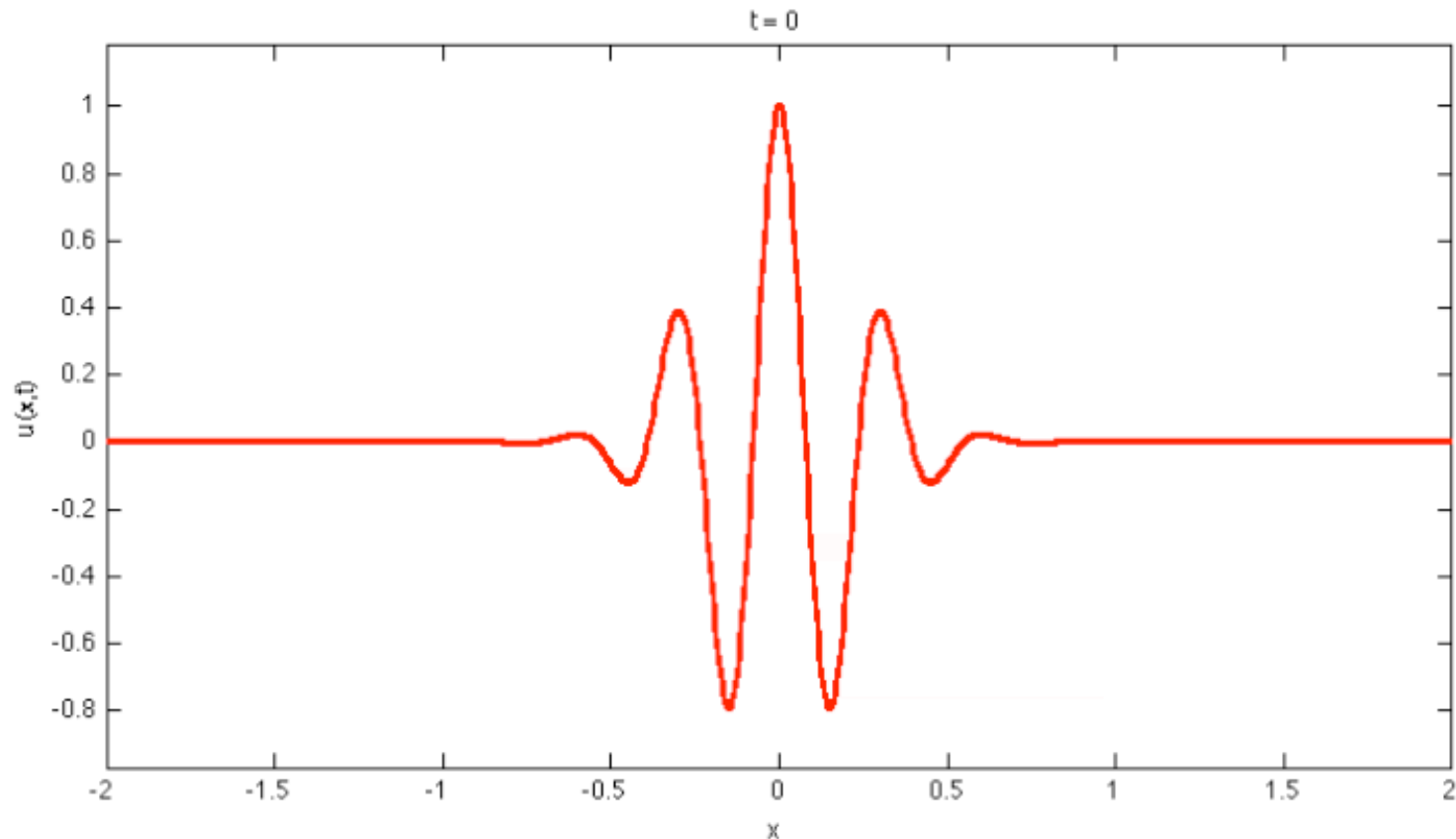
$$\hat{S}_h(\xi, \Delta t) = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) e^{i\xi h} + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) e^{-i\xi h} = \cos \xi h - i\alpha \sin \xi h$$



Simulations pour le schéma de Lax-Friedrichs

La solution d'un schéma **consistant et stable** approche-t-elle la solution de l'équation continue ? La réponse est **OUI**. On verra au prochain amphi le **théorème de Lax**

Stabilité + Consistance \implies Convergence



Simulations numériques : $h=0.005$, $\alpha=0.99$