Cours 2 : Problèmes hyperboliques linéaires (cas de la vitesse variable) et non-linéaires

Partie 1 : Equation de transport à vitesse variable

Courbes caractéristiques

Flot caractéristique

Partie 2 : EDP non linéaire

Loi de conservation scalaire

Méthodes des caractéristiques

Solution classique et temps d'existence

Notion de solution faible et Relation de Rankine-Hugoniot

Sonia Fliss

L'équation de transport à vitesse variable

Dans ce qui suit $c(x,t)$ désigne une fonction continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, uniformément lipschitzienne en x :

$$\exists\, L > 0,\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, t \in \mathbb{R}^+,\ |c(x,t) - c(y,t)| \ \leq\ L\,|x-y|$$

On considère le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \qquad \left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

où $u^0(x)$ la donnée initiale.

On suppose $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$ et on cherche la solution classique de $(\mathcal{P})$

$$u \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

Méthode des caractéristiques

Supposons qu'il existe une telle solution classique.

Définition (rappel)

On appelle courbe caractéristique, les fonctions $X(t)$ telles que

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x}\right](X(t),t) = \frac{d}{dt}\left[u(X(t),t)\right],$$

Rappel: $\frac{d}{dt}\left[u(X(t),t)\right] = \frac{\partial u}{\partial t}(X(t),t) + \frac{dX}{dt}(t)\,\frac{\partial u}{\partial x}(X(t),t)$

Les courbes caractéristiques $X_{x_0}(t),\ x_0 \in \mathbb{R}$ sont solutions de l'EDO

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \left|\begin{array}{l} \dot{X}_{x_0}(t) = c\,(X_{x_0}(t),t) \\ X_{x_0}(t=0) = x_0 \end{array}\right.$$

(voir AO102)

L'existence et l'unicité globales de $X_{x_0}(t),\ x_0 \in \mathbb{R}$ sont assurées par le théorème de Cauchy-Lipschitz (c étant unif. lipschitz. en x)

Méthode des caractéristiques

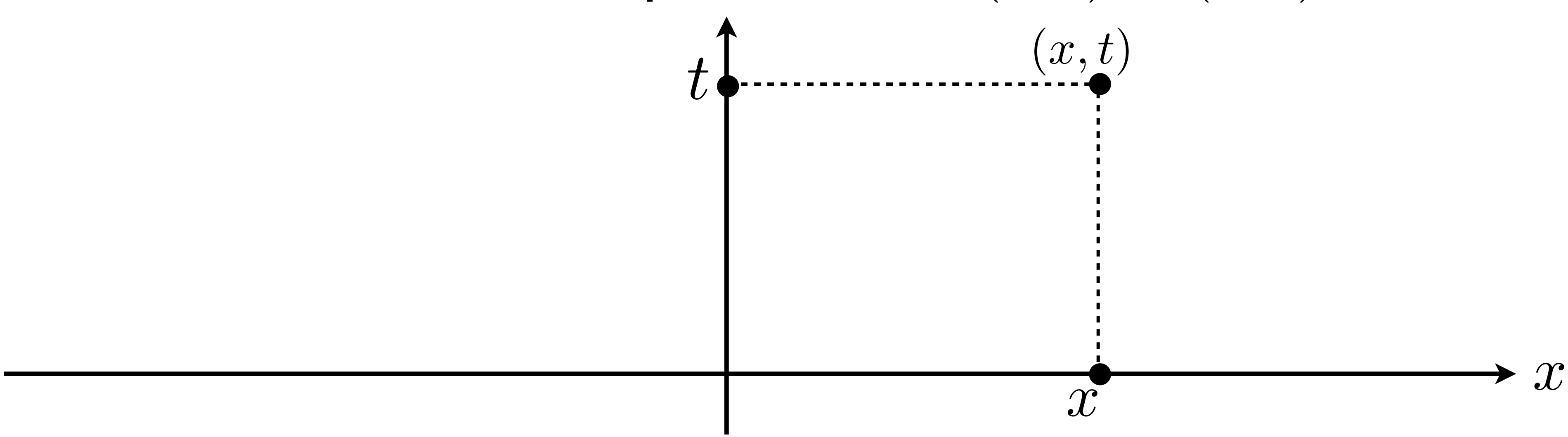
Si u est solution classique de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On montre comme dans le cours 1 que la solution classique est constante le long de chaque caractéristique.

$$\forall x_0, \quad u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0)$$

Question : Peut on trouver l'expression de $u(x,t), \ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$?



Méthode des caractéristiques

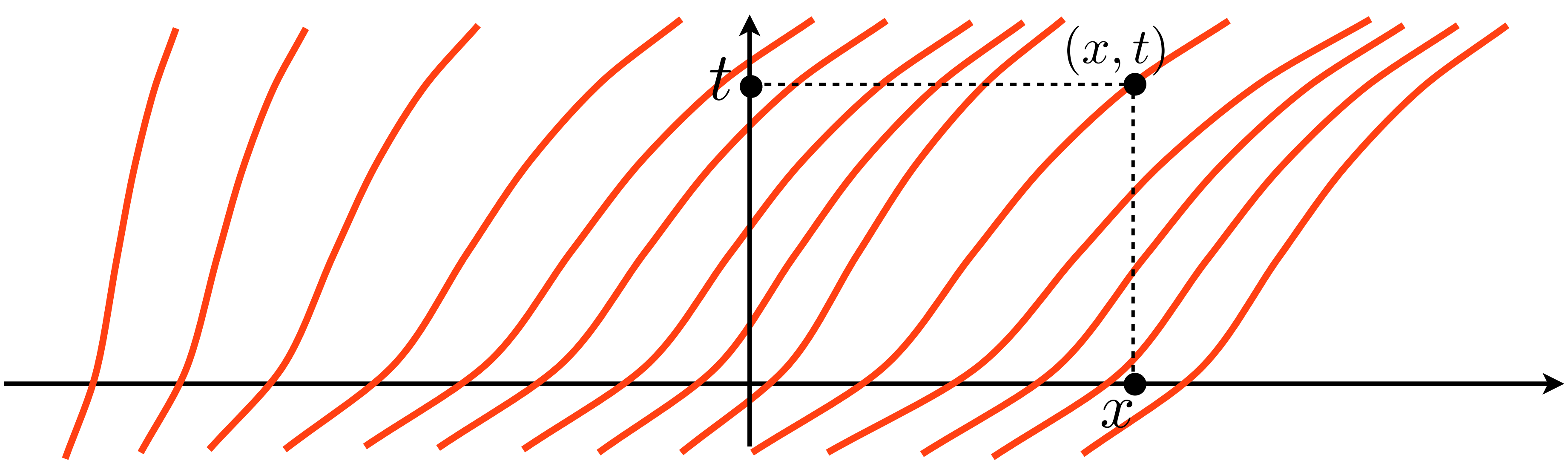
Les courbes caractéristiques forment un fibrage du demi-plan (x, t) :

Elles remplissent tout l'espace $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et ne se croisent pas.

Preuve : Soit $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, il existe une et une seule caractéristique t.q

$$\left| \begin{array}{l} \dot{X}(s) = c(X(s), s) \\ X(t) = x \end{array} \right.$$

par le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir AO102).



Méthode des caractéristiques

Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, on note $X(s;x,t)$ l'unique solution de

$$\left| \begin{array}{l} \dot{X}(s) = c(X(s),s) \\ X(t) = x \end{array} \right.$$

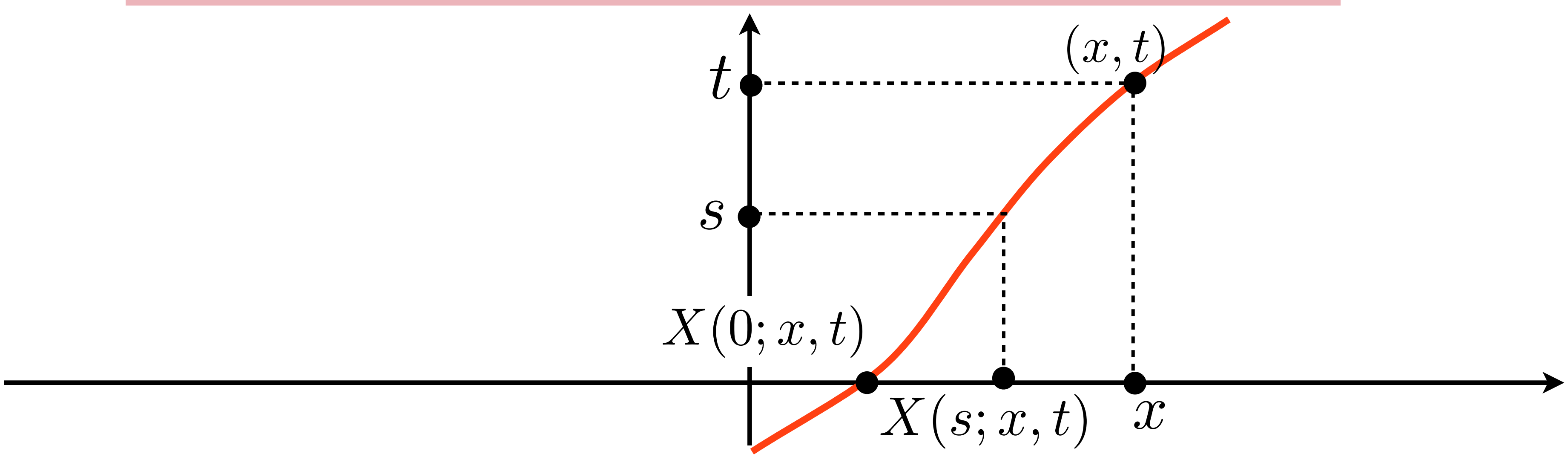
On a donc en particulier $X_{x_0}(s) = X(s;x_0,0)$.

Il existe une et une seule caractéristique qui passe par le point (x,t)

$$\exists!\, x_0,\ X_{x_0}(t) = x \quad \text{avec} \quad x_0 = X(0;x,t)$$

Alors

$$\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x,t) = u^0\big(X(0;x,t)\big)}$$



Méthode des caractéristiques

Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, on note $X(s;x,t)$ l'unique solution de

$$\left| \begin{array}{l} \dot{X}(s) = c(X(s),s) \\ X(t) = x \end{array} \right.$$

On a donc en particulier $X_{x_0}(s) = X(s;x_0,0)$.

Remarques: on appelle $X(\cdot;\cdot,\cdot)$ le flot caractéristique

- Dans le cas où c est constant, on a que

$$X(s;x,t) = x + c\,(s-t)$$

  et le pied de la caractéristique est donné par

$$x_0 = X(0;x,t) = x - c\,t$$

- On vient d'écrire

$$x = X(t;x_0,0) \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = X(0;x,t)$$

  c'est un cas particulier d'une propriété plus générale du flot

$$x = X(t;y,s) \quad \Leftrightarrow \quad y = X(s;x,t)$$

Solution classique du problème de Cauchy

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$,il existe une unique solution classique $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ de $(\mathcal{P})$. Elle est donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x,t) = u^0\big(X(0;x,t)\big)$$

Preuve. Unicité: on a vu que si il existait une solution, elle était constante le long des caractéristiques. Comme les caractéristiques remplissent tout le demi plan (x,t), la solution est nécessairement donnée par $u^0\big(X(0;x,t)\big)$.

Existence: on va montrer que cette fonction est bien solution. Elle vérifie la condition initiale car $X(0;x,0) = x$. De plus,

$$\partial_t u(x,t) = \frac{du^0}{dx}\big(X(0;x,t)\big)\, \partial_t X(0;x,t) \quad \text{et} \quad \partial_x u(x,t) = \frac{du^0}{dx}\big(X(0;x,t)\big)\, \partial_x X(0;x,t)$$

$$\Rightarrow \big(\partial_t u + c\, \partial_x u\big)(x,t) = \frac{du^0}{dx}\big(X(0;x,t)\big)\, g(0;x,t) \quad \text{où} \quad g(s;x,t) = \partial_t X(s;x,t) + c(x,t)\, \partial_x X(s;x,t)$$

on montre que $g(s;x,t) = 0, \forall\, s \in \mathbb{R}$. et en particulier $g(0;x,t) = 0$

(voir poly Section 1.4 pour plus de détails)

Solution classique du problème de Cauchy

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$,il existe une unique solution classique $u \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ de $(\mathcal{P})$.
Elle est donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \quad u(x,t) = u^0\big(X(0;x,t)\big)$$

Stabilité L^∞ $\qquad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} = \|u^0\|_{L^\infty}$

Stabilité dans $C_b^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$? pas toujours…

$$\|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))} \leq c(T)\|\frac{du^0}{dx}\|_{L^\infty} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Stabilité L^p $\qquad \|u(\cdot,t)\|_{L^p} \ \leq \ C_p(t)\ \|u^0\|_{L^p}$

Remarque : si c n'est pas continue et uniformément lipschitzienne en x alors le théorème n'est pas vrai en général (voir l'ex 1 du TD2)

Solution classique du problème de Cauchy

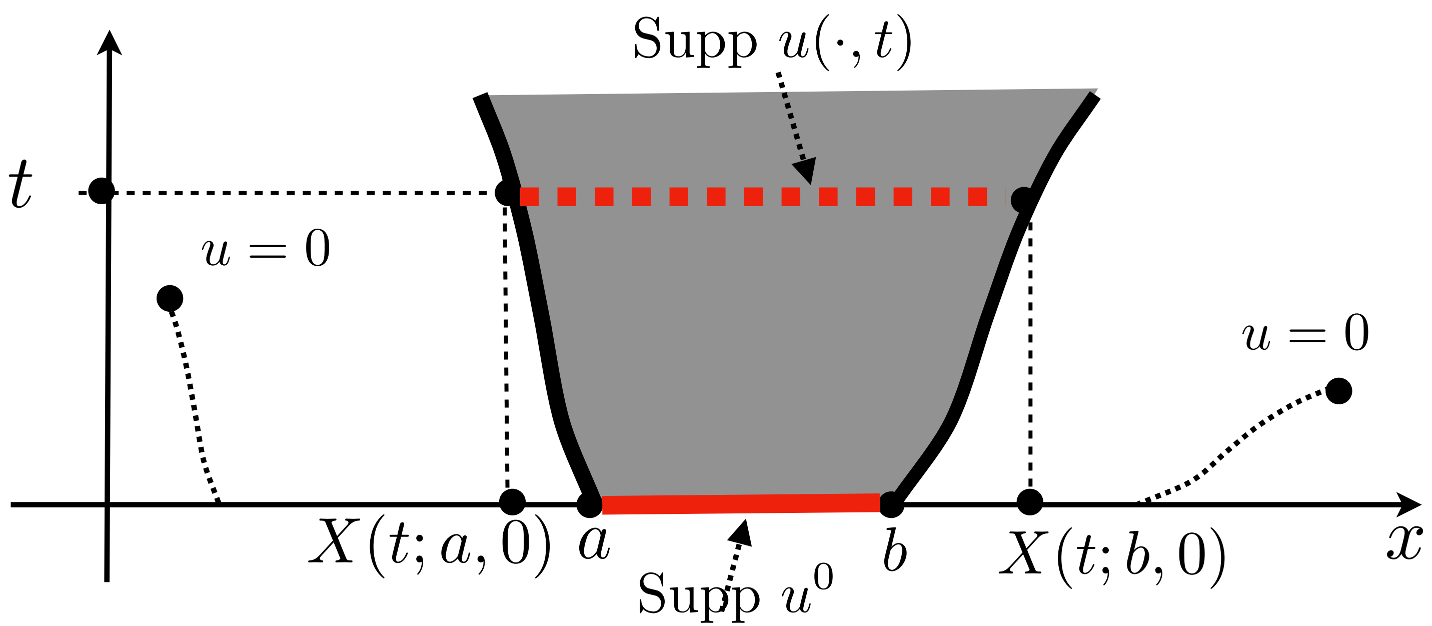
Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$,il existe une unique solution classique $u \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ de $(\mathcal{P})$.

Elle est donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \quad u(x,t) = u^0\big(X(0;x,t)\big)$$

Propagation à vitesse finie :

$$\boxed{supp\ u_0 \subset [a,b] \ \Rightarrow\ supp\ u(\cdot,t) \subset \big[\, X(t;a,0), X(t;b,0) \,\big]}$$



Partie 2 : EDP non linéaire

- Loi de conservation scalaire
- Méthodes des caractéristiques
- Solution classique et temps d'existence
- Notion de solution faible
- Relation de Rankine-Hugoniot

Partie 2 : EDP non linéaire - Loi de conservation scalaire

Étant donnée une fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$, on appelle loi de conservation scalaire associée à f l'EDP (voir des exemples dans le poly p31-33)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0,$$

Loi de conservation scalaire car $\frac{d}{dt}\int_A^B u(x,t)\,dx = f(u(A,t)) - f(u(B,t))$

Si on note $a(u) = f'(u)$, la forme non conservative est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

C'est donc une équation de transport non linéaire de vitesse $a(u)$.

Exemple (equation de Burgers) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0,$

$$f(u) = \frac{u^2}{2} \quad \text{et} \quad a(u) = u$$

Solution classique

On considère le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + a(u)\, \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

On appelle solution classique du problème sur $[0,T[$, une fonction $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T[\,)$ qui satisfait $(\mathcal{P})$ au sens usuel pour $0 \leq t \leq T$.

Remarque: une solution classique existe seulement si $u^0 \in C^1(\mathbb{R})$

Méthode des caractéristiques

Supposons qu'il existe une telle solution classique.

Définition (rappel)

On appelle courbe caractéristique, les fonctions $X(t)$ telles que

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right](X(t),t) = \frac{d}{dt}\left[u(X(t),t)\right],$$

Rappel: $\frac{d}{dt}\left[u(X(t),t)\right] = \frac{\partial u}{\partial t}(X(t),t) + \frac{dX}{dt}(t)\,\frac{\partial u}{\partial x}(X(t),t)$

(1) Les courbes caractéristiques vérifient $\frac{dX}{dt} = a\left[u(X(t),t)\right],$

(2) Le long des caractéristiques, la solution de $(\mathcal{P})$ vérifie

$$\frac{d}{dt}\left[u(X(t),t)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad u(X(t),t) = u^0(X(0))$$

(1) + (2) impliquent que $\frac{dX}{dt} = a\left[u^0(X(0))\right],$

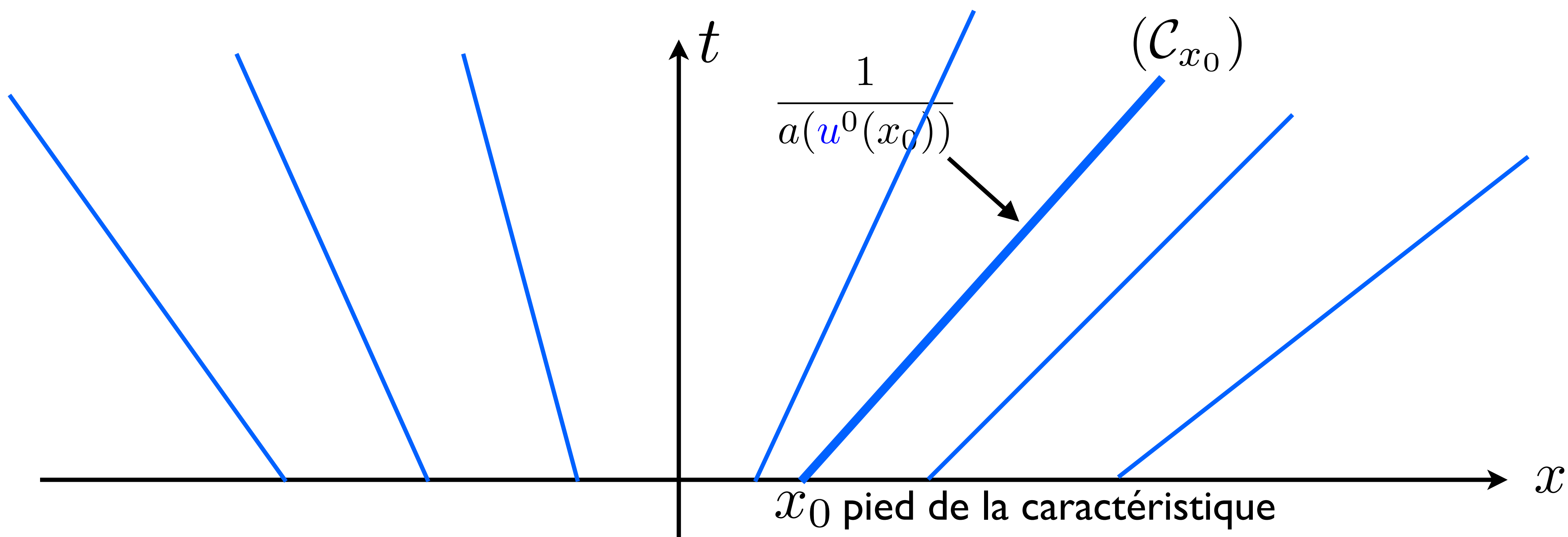
Méthode des caractéristiques

Les courbes caractéristiques sont solutions de l'EDO

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{dX}{dt} = a(u^0(x_0)), \\ X(t=0) = x_0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad X_{x_0}(t) = a(u^0(x_0))t + x_0 \quad (\mathcal{C}_{x_0})$$

Ce sont des droites et leur pente est liée à la donnée initiale.

Mais attention ces droites ne sont pas parallèles.



Existence d'une solution classique

Droites caractéristiques $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad X_{x_0}(t) = a(u^0(x_0))t + x_0$

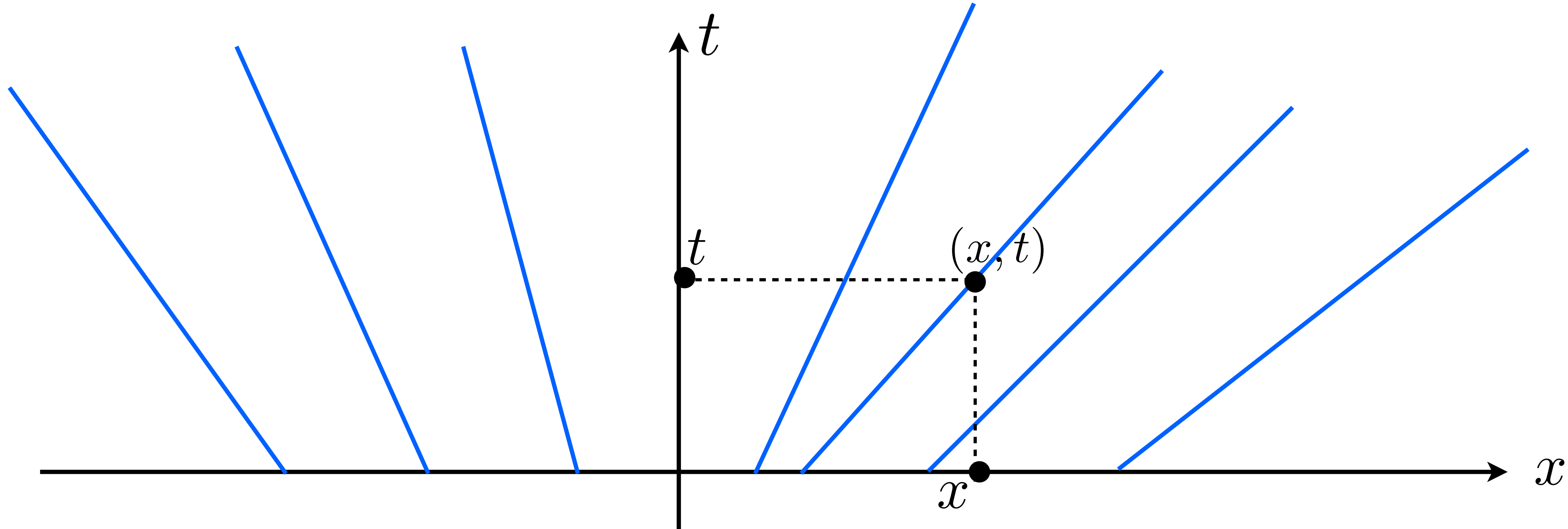
Le long des droites caractéristiques, la solution classique vérifie

$$\boxed{\forall x_0, \quad u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0)}$$

Question : Peut on trouver l'expression de $u(x,t), \ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$?

Est ce que les droites remplissent tout le demi plan (x,t)?

Est ce que les droites peuvent se croiser?



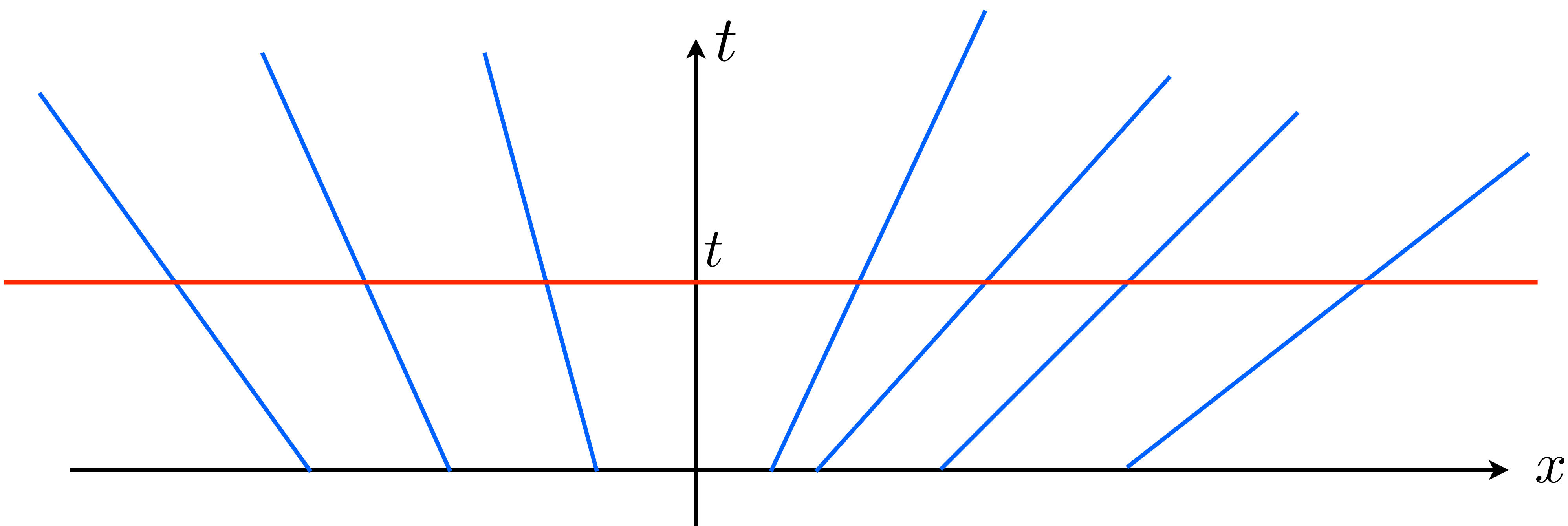
Existence d'une solution classique

Cela revient à se demander si, pour tout $t > 0$, l'application

$$x_0 \quad \longrightarrow \quad F_t(x_0) := x_0 + a(u^0(x_0))\, t$$

est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- si elle est surjective alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, au moins une droite caractéristique passe par le point (x,t)
- si elle est injective alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, au plus une droite caractéristique passe par le point (x,t)



Existence d'une solution classique

Cela revient à se demander si, pour tout $t > 0$, l'application

$$x_0 \quad \longrightarrow \quad F_t(x_0) := x_0 + a(u^0(x_0))\, t$$

est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Est-elle surjective?

Si on fait l'hypothèse supplémentaire

$$u^0 \ \text{ est bornée sur } \mathbb{R}$$

alors $a \circ u^0$ est également bornée et donc

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} F_t(x_0) = \pm\infty$$

Comme F_t est continue, elle est nécessairement surjective!

Ce résultat s'étend souvent même sans cette hypothèse sur u^0.

Existence d'une solution classique

Cela revient à se demander si, pour tout $t > 0$, l'application

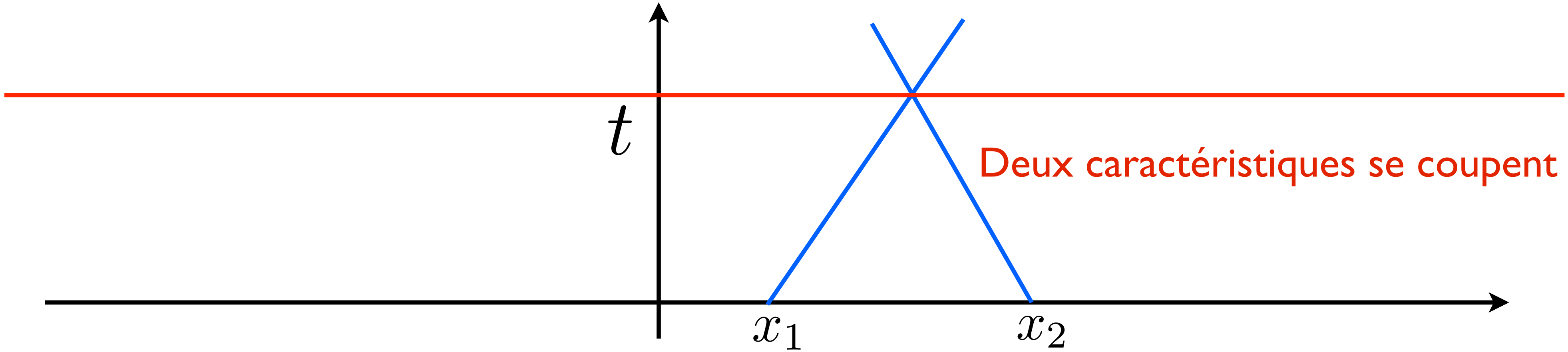
$$x_0 \quad \longrightarrow \quad F_t(x_0) := x_0 + a(u^0(x_0))\,t$$

est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Est-elle injective?

Elle n'est pas injective si et seulement si

$$\underline{\exists x_1 < x_2,} \quad F_t(x_1) = F_t(x_2)$$



c'est à dire $\left[a(u^0(x_1)) - a(u^0(x_2))\right]\,t = x_2 - x_1 \quad > 0$

soit $\underline{a(u^0(x_1)) > a(u^0(x_2))}$

Existence d'une solution classique

Cela revient à se demander si, pour tout $t > 0$, l'application

$$x_0 \quad \longrightarrow \quad F_t(x_0) := x_0 + a(u^0(x_0))\, t$$

est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Est-elle injective?

Plus précisément $F_t'(x_0) = 1 + \dfrac{d(a \circ u^0)}{dx}(x_0)\, t$

- Si $a \circ u^0$ est croissante alors F_t est strictement croissante et donc elle est injective.

- Sinon, $\inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \dfrac{d(a \circ u^0)}{dx}(x_0) < 0$ et $F_t'(x_0) \geq 1 + \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \dfrac{d(a \circ u^0)}{dx}(x_0)t$

On a $F_t'(x_0) > 0 \;\Leftrightarrow\; t < T^*$ où $T^* = -\left(\inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \dfrac{d(a \circ u^0)}{dx}(x_0) \right)^{-1}$

F_t est strictement croissante et donc injective pour $t < T^*$.

Existence d’une solution classique

Cela revient à se demander si, pour tout $t > 0$, l’application

$$x_0 \quad \longrightarrow \quad F_t(x_0) := x_0 + a(u^0(x_0))\, t$$

est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

CONCLUSION

F_t est inversible pour $t < T^*$ avec

- Si $a \circ u^0$ est croissante

$$T^* = +\infty$$

- Sinon

$$T^* = -\left(\inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \frac{d(a \circ u^0)}{dx}(x_0)\right)^{-1}$$

Existence d'une solution classique

On vient de montrer que pour tout $t < T^*$ l'application

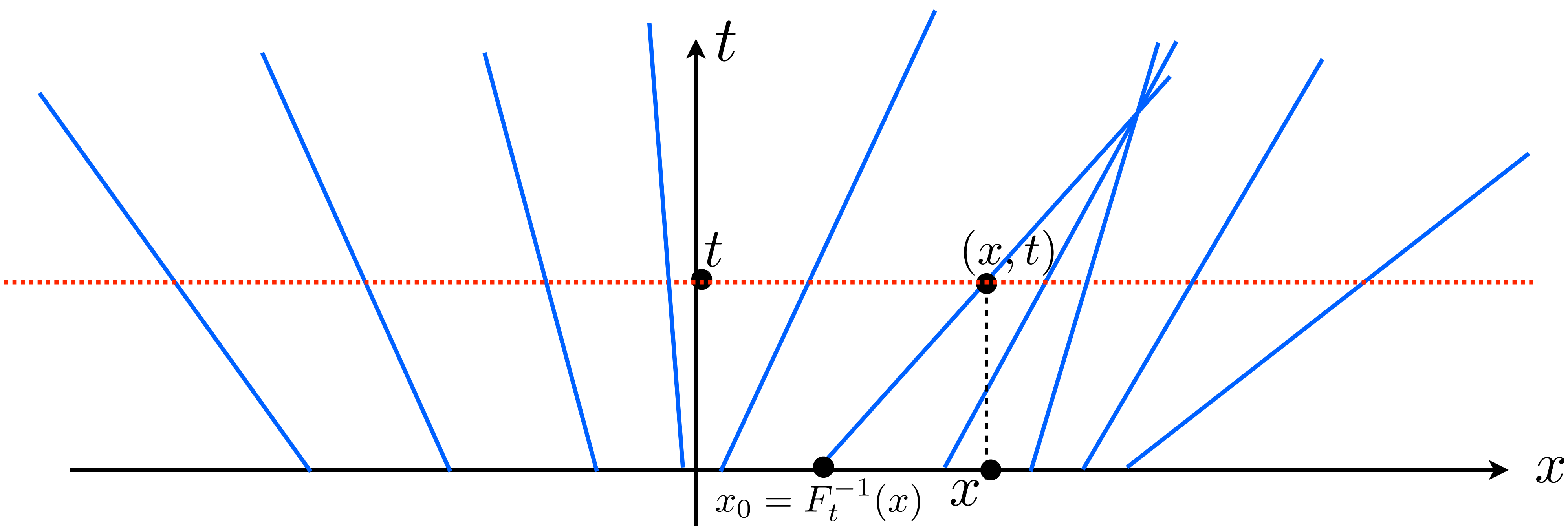
$$x_0 \quad \longrightarrow \quad F_t(x_0) := x_0 + a(u^0(x_0))\, t$$

est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, T^*), \quad \exists ! x_0, \; F_t(x_0) = x$$

Comme la solution classique est constante le long des caractéristique

$$\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x,t) = u^0(F_t^{-1}(x))}$$



Solution classique du problème de Cauchy

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$, le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ admet une unique solution classique maximale

$$u \in C^1(\,\mathbb{R} \times [0, T^*[\,)$$

où
- Si $a \circ u^0$ est croissante $T^* = +\infty$
- Sinon $T^* = -\left(\inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \dfrac{d(a \circ u^0)}{dx}(x_0)\right)^{-1}$

cette solution est donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, T^*[, \quad u(x,t) = u^0(F_t^{-1}(x))$$

Preuve: • *Existence* $U(x,t) = u^0(g(x,t)),$ avec $g(x,t) = F_t^{-1}(x)$ *est solution :*

$$g(x,t) + a(u^0(g(x,t))\,t = x \;\Rightarrow\; \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\big(1 + t\,\frac{d(a \circ u^0)}{dx}(g(x,t))\big) = -a \circ u^0(g(x,t))$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\big(1 + t\,\frac{d(a \circ u^0)}{dx}(g(x,t))\big) = -1$$

On en déduit $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ *et on montre que U est bien solution.*

• *Unicité* *On a vu dans les transparents précédents que si* u *est solution classique alors elle est donnée nécessairement par l'expression ci dessus.*

T^* Temps d'existence

Stabilité L^∞ $$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} = \|u^0\|_{L^\infty}$$

Théorème : quand $t \to T^*$, la solution classique se comporte

$$\lim_{t\to T^*} \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right\|_{L^\infty} = \lim_{t\to T^*} \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_{L^\infty} = +\infty$$

Cela signifie que la solution tend à devenir discontinue.

Preuve : Supposons que il existe x^* tel que $T^* = -\left(\frac{d(a\circ u^0)}{dx}(x^*)\right)^{-1}$ (=l'inf est atteint)

Posons $x = F_t(x^*)$ pour $t < T^*$ (on se place sur la caractéristique de pied x^*)

$$u(x,t) = u^0(g(x,t)),\ g(x,t) = F_t^{-1}(x) = x^*$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= u^{0\prime}(g(x,t))\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\\ &= -u^{0\prime}(\underbrace{g(x,t)}_{x^*})\Big(1 + t\frac{d(a\circ u^0)}{dx}(\underbrace{g(x,t)}_{x^*})\Big)^{-1}\\ &= -u^{0\prime}(x^*)\left(1 - \frac{t}{T^*}\right)^{-1} \underset{t\to T^*}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

De même pour $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$

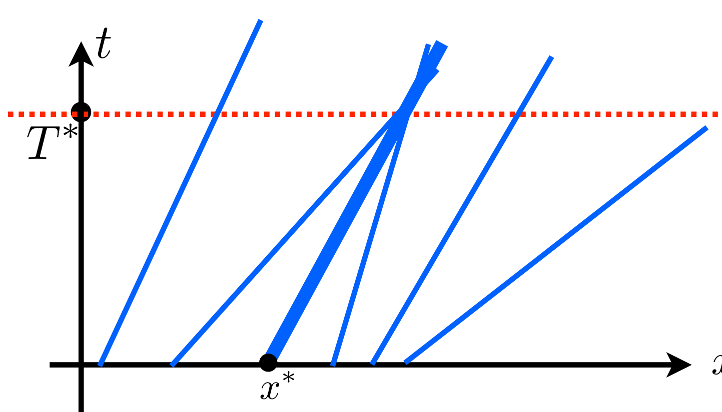
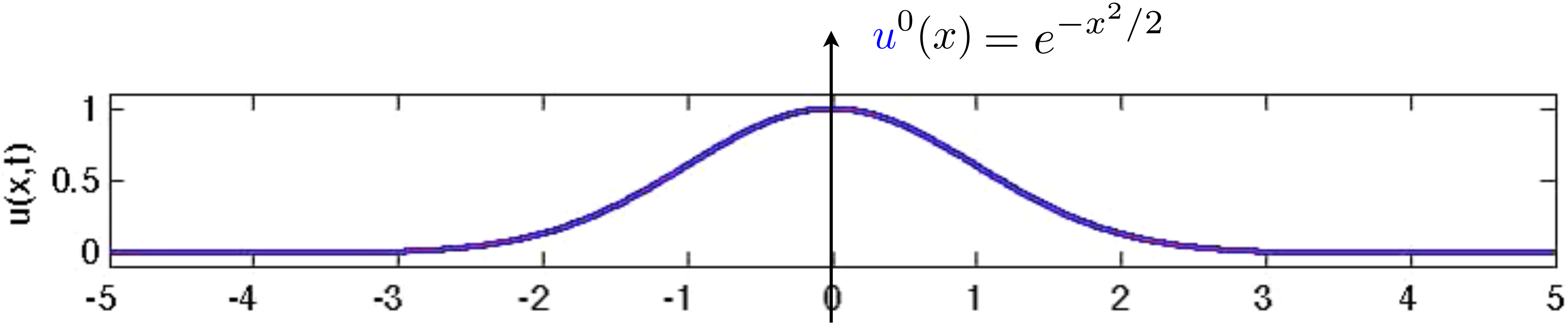


Illustration numérique

Équation de Burgers: $f(u) = u^2/2$ - Donnée initiale $u^0(x) = e^{-x^2/2}$



On a donc $a(u) = u$, $a \circ u^0 = u^0$ et $\dfrac{d(a \circ u^0)}{dx} = \dfrac{du^0}{dx}$

Les caractéristiques

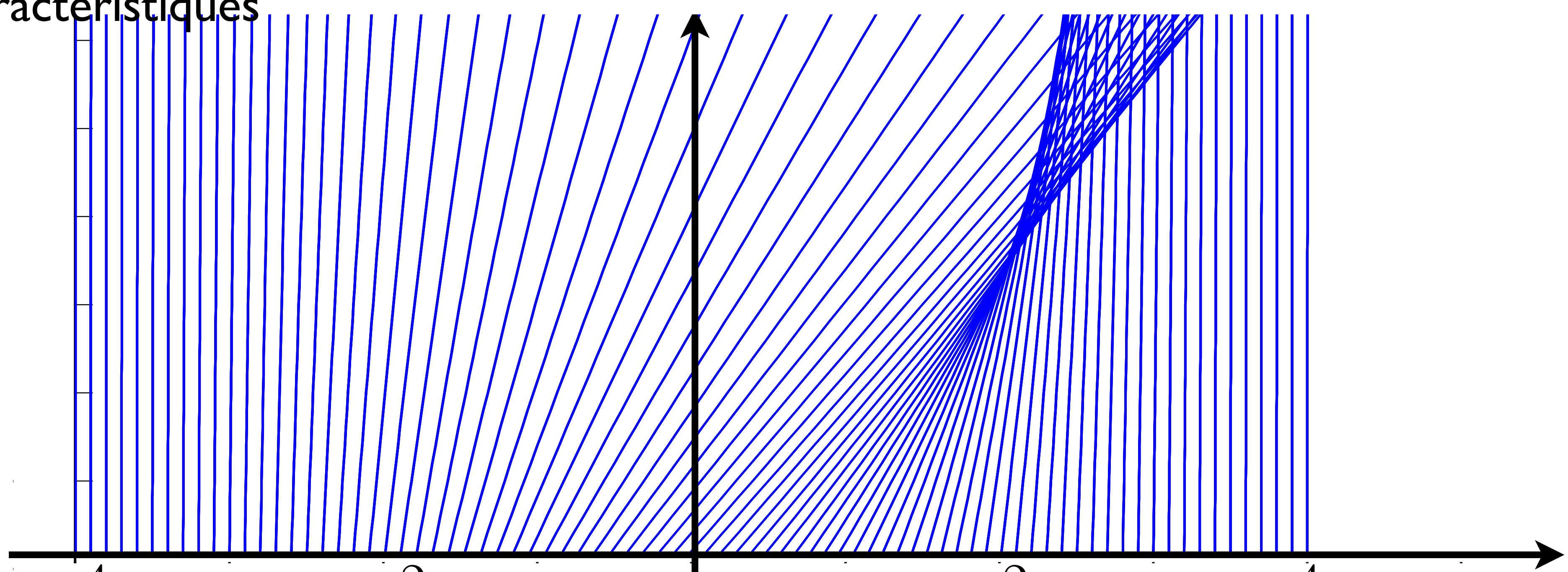
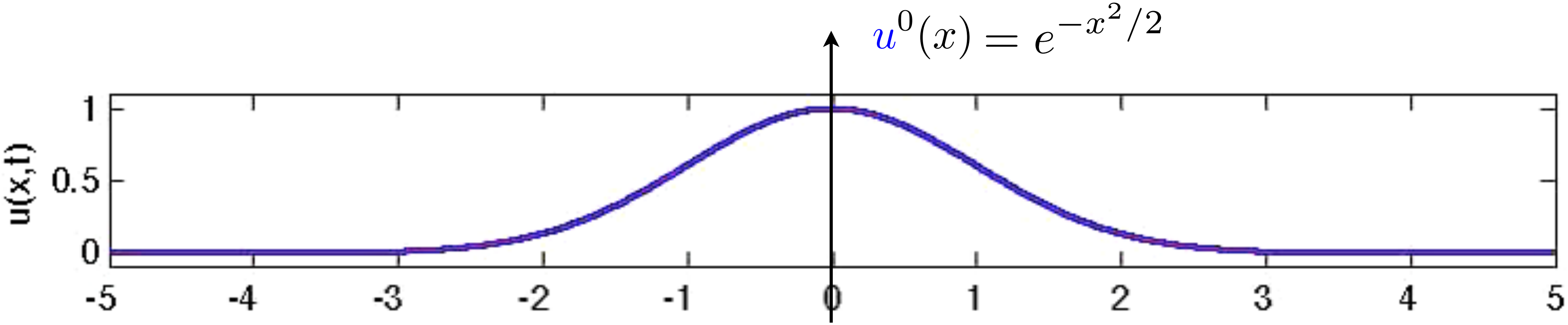


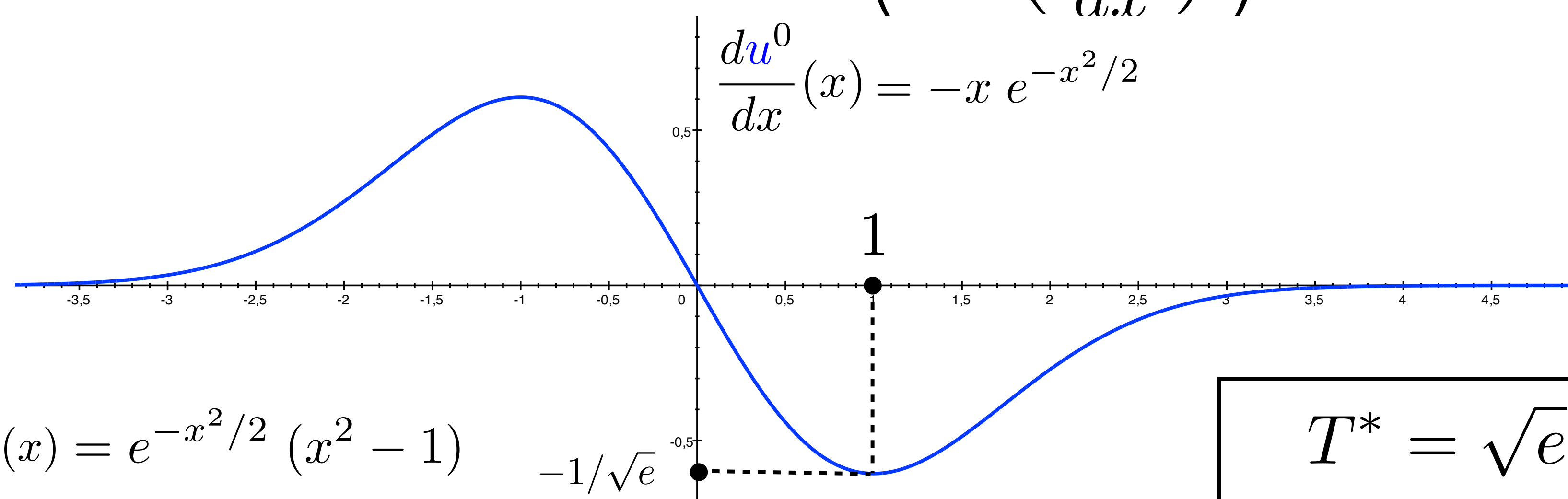
Illustration numérique

Équation de Burgers: $f(u) = u^2/2$ - Donnée initiale $u^0(x) = e^{-x^2/2}$



On a donc $a(u) = u$, $a \circ u^0 = u^0$ et $\dfrac{d(a \circ u^0)}{dx} = \dfrac{du^0}{dx}$

et le temps d'existence $\quad T^* := -\left(\inf\left(\dfrac{du^0}{dx}\right)\right)^{-1}$



$\dfrac{d^2u^0}{dx^2}(x) = e^{-x^2/2}\,(x^2-1)$

$$\boxed{T^* = \sqrt{e}}$$

Illustration numérique

Le temps d'existence $T^* := -\left(\inf\left(\frac{du^0}{dx}\right)\right)^{-1} = -(u^0(1))^{-1} = \sqrt{e}$

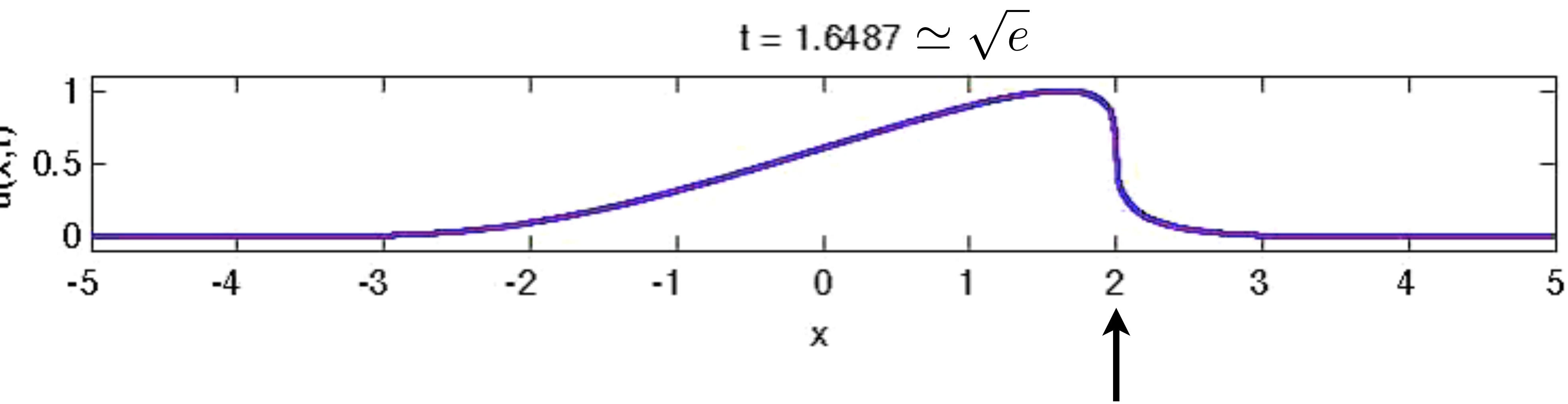
Le point d'explosion correspond à la caractéristique issue de $x_0 = 1$

L'équation de cette caractéristique est donnée par

$$X_{x_0}(t) = x_0 + u(x_0)\, t = 1 + e^{-1/2}\, t$$

Pour $t = T^* = e^{1/2}$ on obtient

$$X_{x_0}(T^*) = x_* = 1 + e^{-1/2}\, T^* = 2$$



Discontinuité/choc

Notion de solution faible

Pour pouvoir obtenir des solutions au delà du temps
il faut accepter une notion plus faible de solution autorisant des discontinuités.

Les solutions faibles que nous allons construire seront en particulier des solutions au sens des distributions.

Partons d'une solution classique sur $[0,T[$ et introduisons un espace de fonctions test espace-temps:

$$\mathcal{V}_T = \{\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \; / \; supp\, \varphi \text{ is compact } \subset \mathbb{R} \times [0,T[\,\}$$

On multiplie l'EDP par une fonction test $\varphi \in \mathcal{V}_T$ et on intègre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Notion de solution faible

On obtient

$$\iint \frac{\partial u}{\partial t}\,\varphi\,dx\,dt \;+\; \iint \frac{\partial}{\partial x} f(u)\,\varphi\,dx\,dt \;=0$$

et des intégrations par parties donnent

$$\begin{aligned}\iint \frac{\partial u}{\partial t}\,\varphi\,dx\,dt &= -\iint u\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dx\,dt + \Big[\int u\,\varphi\,dx\Big]_{t=0}^{+\infty} \\ &= -\iint u\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dx\,dt - \int u^0(x)\,\varphi(x,0)\,dx\end{aligned}$$

$$\iint \frac{\partial}{\partial x} f(u)\,\varphi\,dx\,dt \;=\; -\iint f(u)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

car $\varphi(\cdot,t)$ est à support compact en espace.

Après addition, il vient

$$\iint \left\{ u\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\} dx\,dt + \int \varphi(x,0)\,u^0(x)\,dx = 0$$

L'expression ci-dessus garde un sens pour tout φ dans $\mathcal{V}_T$, même si u est discontinue.

Notion de solution faible

Définition : Étant donné $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on appelle **solution faible** de $(\mathcal{P})$ sur $[0,T[,\ T \leq +\infty$ une fonction $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R} \times [0,T[)$ telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{V}_T$

$$\iint \left\{ u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} dx\, dt + \int \varphi(x,0)\, u^0(x)\, dx = 0$$

Remarques :

- Par construction, toute solution forte est solution faible.

Inversement, toute solution faible ayant la régularité $\mathcal{C}^1$ est solution forte (exercice).

- Cette définition n'est pas très explicite, on donne dans la suite une caractérisation plus explicite pour les solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

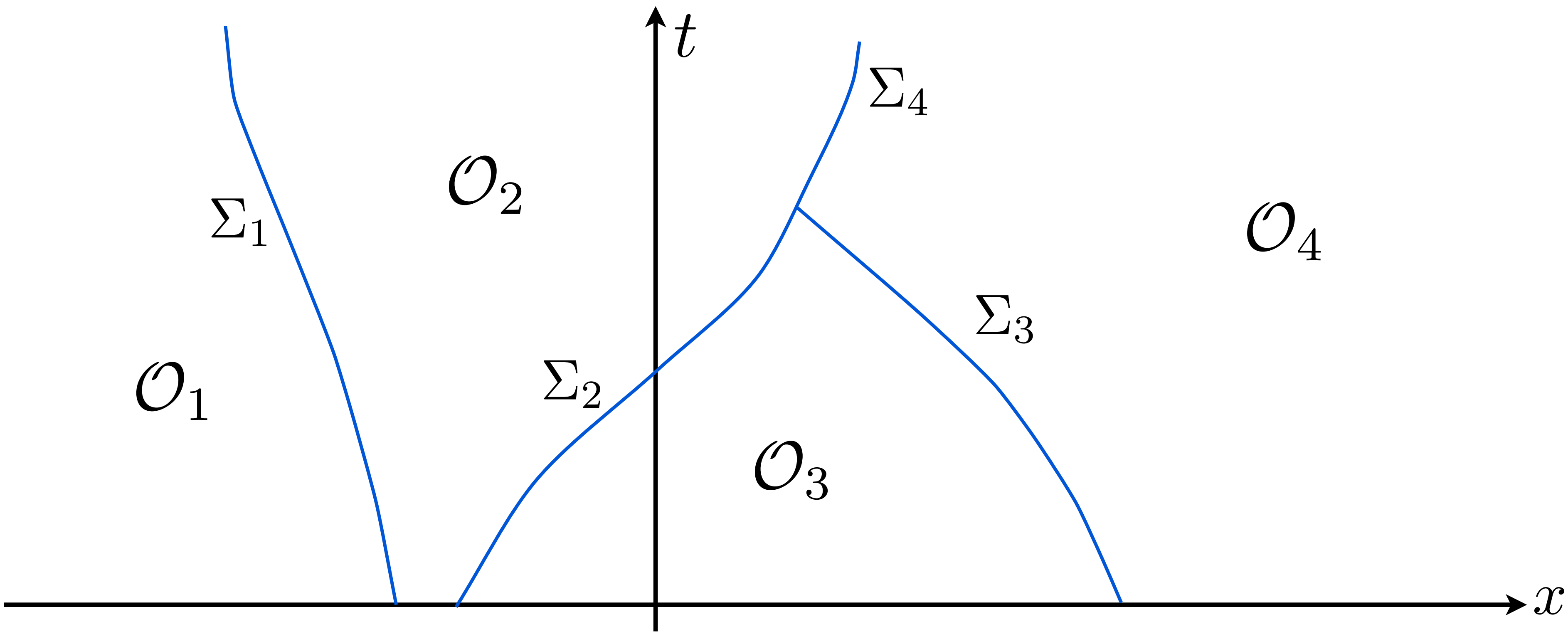
Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Définition : Une solution $\mathcal{C}^1$ par morceaux est une solution faible u telle qu'il existe un nombre fini d'arcs

$$\Sigma_i = \{\, x = \sigma_i(t), \quad t_i^- \leq t \leq t_i^+ \,\}, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

telle que u est de classe $\mathcal{C}^1$ dans chaque composante connexe

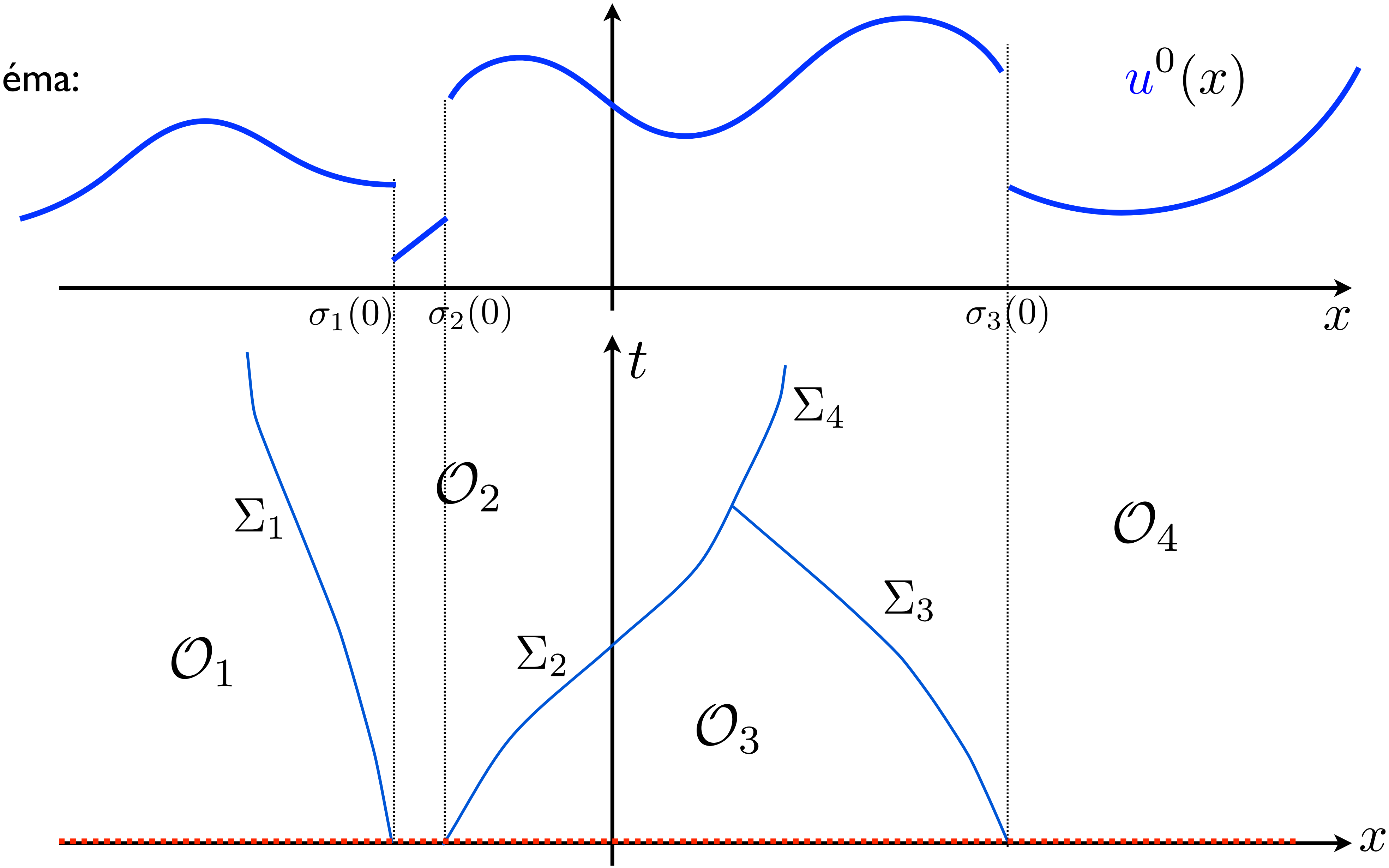
$$\mathcal{O}_j, 1 \leq j \leq M, \quad \text{de} \quad \mathbb{R} \times [0, T[\;\setminus\; \bigcup_{i=1}^{N} \Sigma_i$$



Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Si u est discontinue à travers Σ , on dit que u présente un choc et que Σ est une ligne de choc.

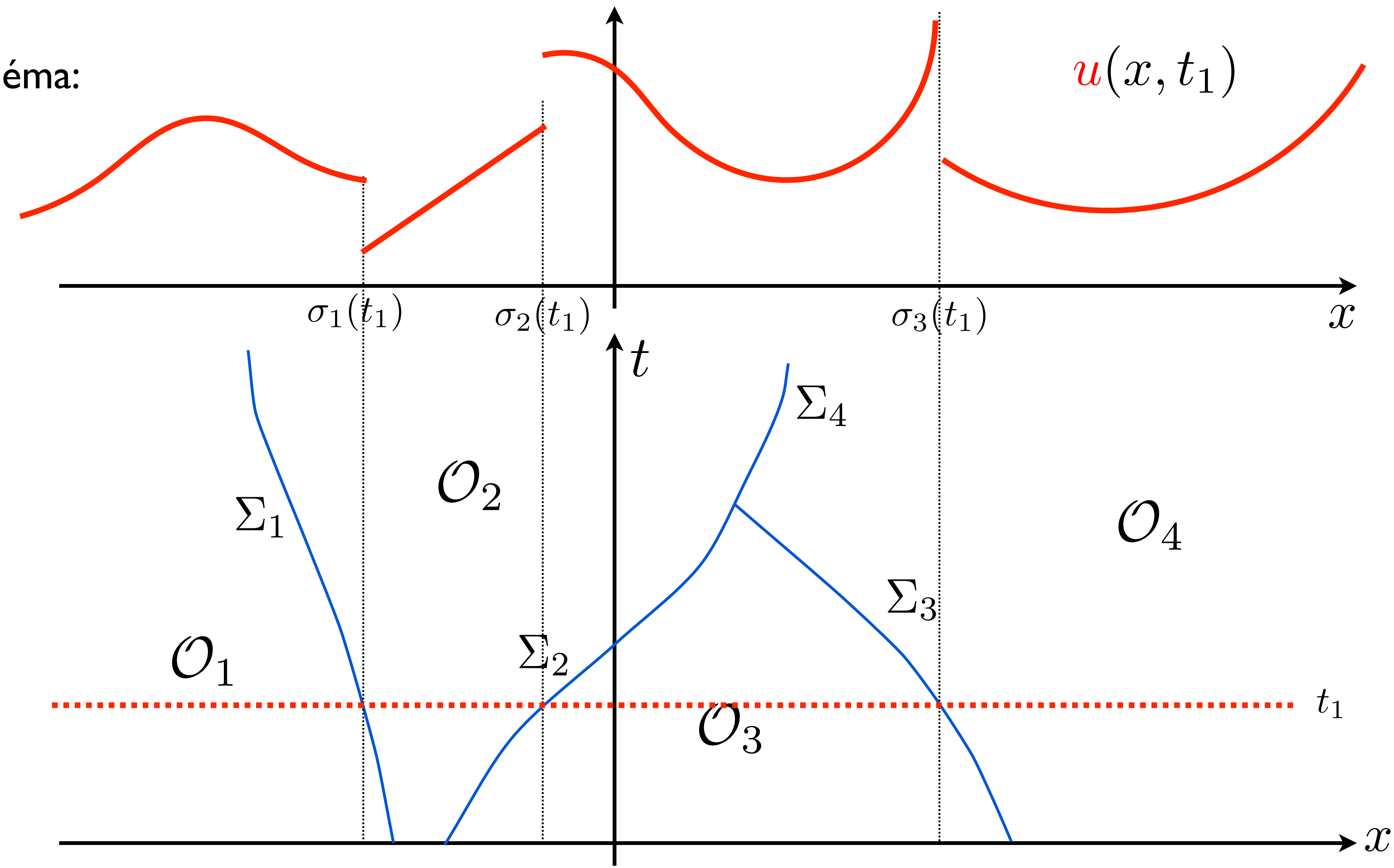
Schéma:



Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Si u est discontinue à travers Σ , on dit que u présente un choc et que Σ est une ligne de choc.

Schéma:



Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Théorème : Une fonction u, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est une solution faible si et seulement si u est solution classique dans chaque $\mathcal{O}_j$ et si à travers chaque ligne

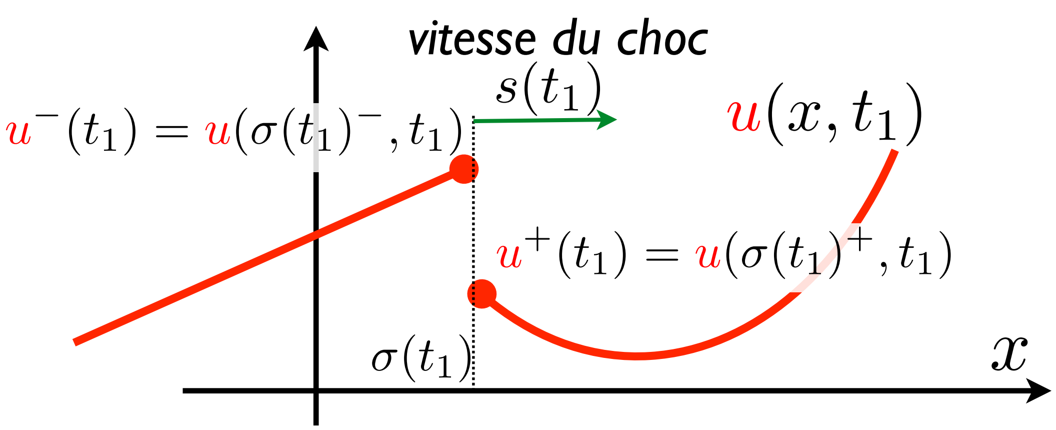
$$\Sigma = \{\, x = \sigma(t),\ t^- \leq t \leq t^+ \,\},$$

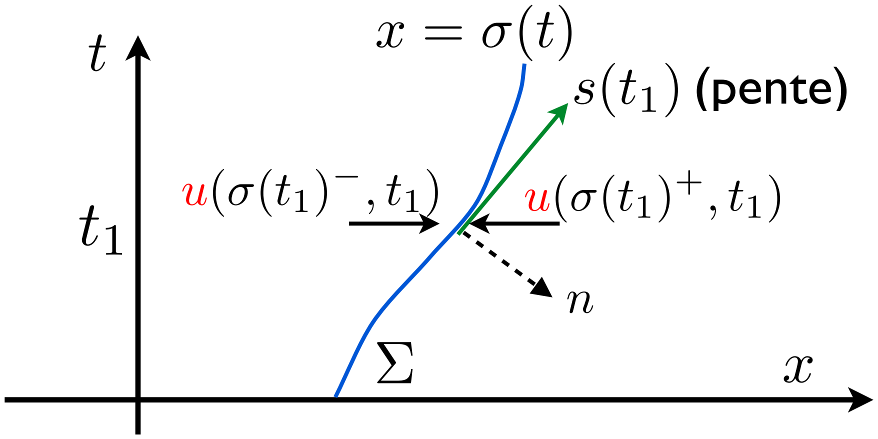
u vérifie la relation de Rankine-Hugoniot pour $t^- \leq t \leq t^+$

$$s(t)\ \big[\, u^+(t) - u^-(t) \,\big] = f\big(u^+(t)\big) - f\big(u^-(t)\big)$$

avec $s(t) := \sigma'(t)$ et $u^\pm(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} u\big(\sigma(t) \pm \varepsilon, t\big)$

Si Σ est une ligne de choc, $s(t) := \sigma'(t)$ est la vitesse de propagation du choc.





Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Théorème : Une fonction u, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est une solution faible si et seulement si u est solution classique dans chaque $\mathcal{O}_j$ et si à travers chaque ligne

$$\Sigma = \{ x = \sigma(t),\ t^- \leq t \leq t^+ \},$$

u vérifie la relation de Rankine-Hugoniot pour $t^- \leq t \leq t^+$

$$s(t)\ \left[u^+(t) - u^-(t) \right] = f\big(u^+(t)\big) - f\big(u^-(t)\big)$$

avec $s(t) := \sigma'(t)$ et $u^\pm(t) := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u\big(\sigma(t) \pm \varepsilon, t\big)$

Remarques

- Si $u^+(t) = u^-(t)$ alors la condition de Rankine Hugoniot est satisfaite.
- Pour tout choc, on a $s = \dfrac{[f(u)]}{[u]}$

qui est à rapprocher de $a(u) = f'(u)$

... et dans le prochain épisode de MA103…

- *Non unicité des solutions faibles*
- *Notion de solution faible entropique*
- *Théorème d'existence et d'unicité*
- *Propriété de monotonie*
- *Problème de Riemann à 2 états dans les cas f convexe*