COURS 3MA03

Introduction aux équations aux dérivées partielles hyperboliques et à leur discrétisation par différences finies

Sonia Fliss
sonia.fliss@ensta.fr
UMA - Bureau 2.2.21

avec en TD : Sarah Al Humaikani (Gr. 4), Lorenzo Audibert (Gr. 6), Clément Beneteau (Gr.9) , Antonin Boisneault (Gr. 8), Eliane Bécache (Gr. 2), Benjamin Bonrepaux (1A-Maths spe), Farah Chaaban (Gr. 5), Sonia Fliss (Gr.1), Aurélien Parigaux (Gr. 3), Simone Pescuma (Gr. 7).

Déroulé du cours

Les transparents du cours et les énoncés du TD seront mis à disposition sur le moodle le vendredi avant chaque séance.
Le corrigé de chaque TD sera disponible après chaque séance de TD.

<u>Planning du cours.</u>

17, 24 et 31 mars: cours + TDs - Partie 1: Analyse des équations aux dérivées partielles hyperboliques linéaires et non linéaires
DM distribué le 31 mars, à rendre le 07 avril (peut rapporter des points bonus)

07 et 28 avril: cours + TDs - Partie 2: Discrétisation par la méthode des différences finies
14 avril: cours + TP matlab : merci d'apporter son ordinateur.

L'examen sans documents est prévu le 05 mai.

Glossaire

Equation aux dérivées partielles (EDP)

Les EDPs sont le résultat de la modélisation de phénomènes issus de la mécanique, physique, économie,…

Equation dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables

$$u(t, x_1, x_2, \cdots, x_N) \qquad t \geq 0, (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

et qui exprime des relations entre les dérivées partielles de cette fonction:

$$F\left(t, x_i, u, \partial_{x_i}^{\alpha_i} u\right) = 0.$$

On distingue les problèmes stationnaires (l'inconnue ne dépend que des variables d'espaces) des problèmes d'évolution (une des variables est le temps, qui joue un rôle particulier)

Objectifs du cours MA103

Acquérir les premiers outils mathématiques pour

- analyser des équations aux dérivées partielles hyperboliques
  montrer que le problème est bien posé (existence et unicité d'une solution, continuité par rapport aux données), définir le cadre fonctionnel dans lequel il est bien posé
  trouver des propriétés importantes de la solution

- construire un problème discrétisé approché qui peut être résolu informatiquement, à partir d'une méthode de discrétisation (ici la méthode des différences finies)

- évaluer la qualité de la solution approchée
  précision de la méthode et erreur commise par rapport à la solution exacte

- comprendre et interpréter les simulations numériques

Glossaire

EDPs hyperboliques

On distingue classiquement trois grandes classes d'équations

Les équations elliptiques : phénomènes d'équilibre

Modèle : l'équation de Laplace $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(voir ANN201)

Les équations paraboliques : phénomènes de diffusion

Modèle : l'équation de la chaleur $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \ t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

(voir ANN202)

Les équations hyperboliques : phénomènes de propagation

Modèles : l'équation de transport $$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = f, \ t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

l'équation des ondes $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \ t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

l'équation de Burgers $$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = f, \ t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

Glossaire

EDPs hyperboliques

Exemple 1 : Onde acoustique produite par une guitare

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = 0,$$

masse volumique

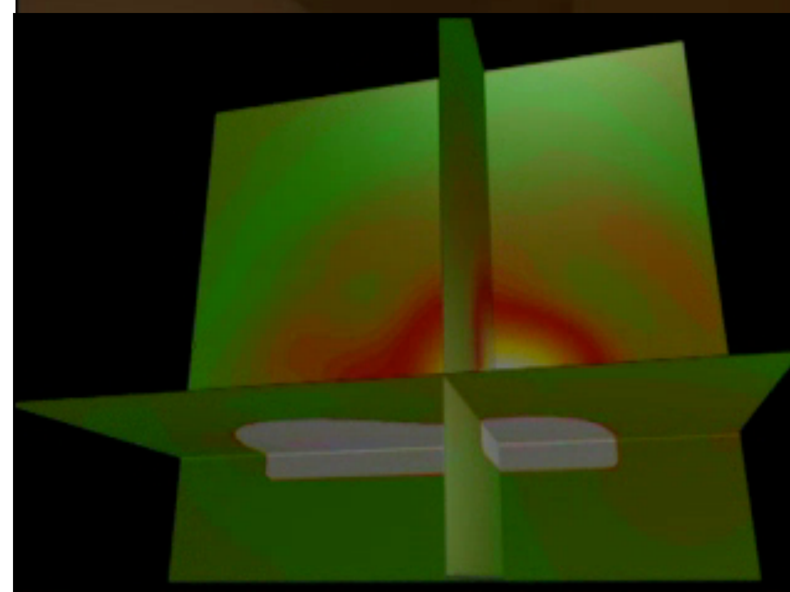
pression

$$\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

vitesse

module d'incompressibilité

+ conditions initiales
+ conditions aux bords
+ interaction fluide-structure



Difficultés qui ne seront pas abordées dans le cours : variable d'espace 3D et géométrie complexe, conditions aux limites, couplage de plusieurs EDPs

Résultats numériques de Grégoire Derveaux

Glossaire

EDPs hyperboliques

Exemple 2 : Propagation d'une onde de choc en mécanique des fluides compressibles

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho\, \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, e) + \nabla \cdot (\rho\, e + p) = 0,$$

$$p = (\gamma - 1)\left[\rho\, e - \rho\, \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right]$$

+ conditions initiales

+ conditions aux bords

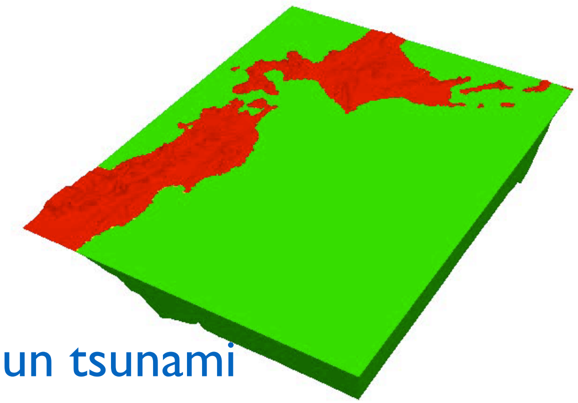
Résultats numériques de Frédéric Alauzet

Difficultés qui ne seront pas abordées dans le cours : variable d'espace 2D et géométrie complexe, conditions aux limites

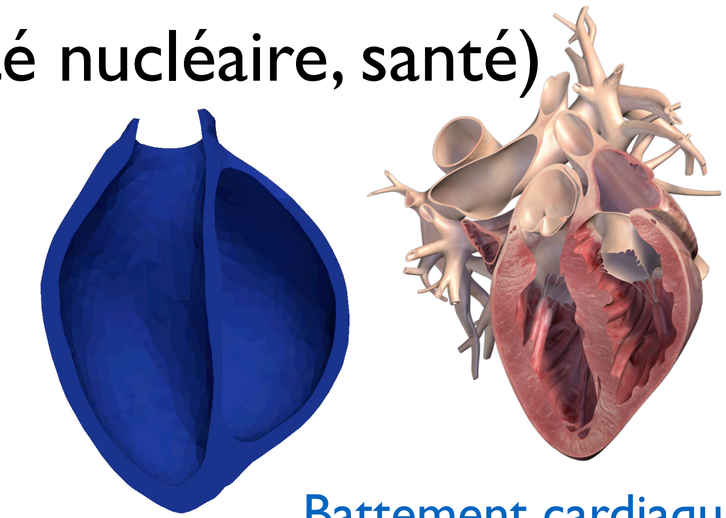
Les simulations numériques

A quoi ça sert?

- prévoir (météo, environnement, sureté nucléaire, santé)

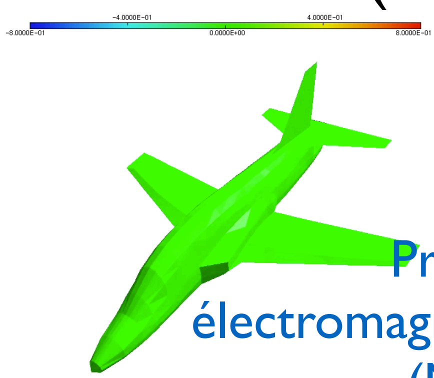


Propagation d'un tsunami



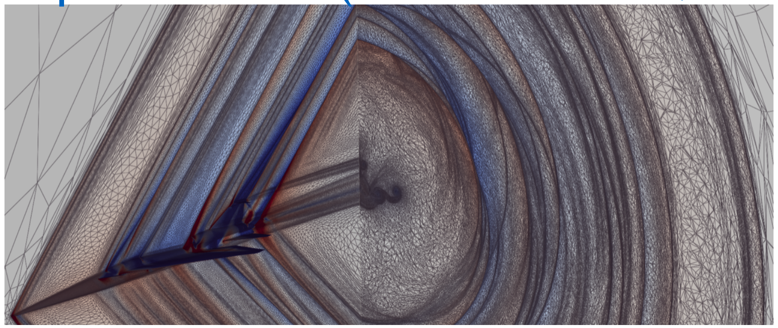
Battement cardiaque
(Philippe Moireau, M3DISIM INRIA)

- concevoir (antennes, avions, automobiles)



Propagation d'une onde électromagnétique à l'extérieur d'un avion
(Marc Duruflé, INRIA)

Bang sonique du C608 (Adrien Loseille, INRIA)



- comprendre (validation d'un modèle physique, vérification d'une théorie)

Dans ce cours…

On va s'intéresser à des EDPs hyperboliques linéaires et non linéaires en 1 dimension d'espace (1D) et sans bords

$$x \in \mathbb{R}$$

Les problèmes 2D et 3D et les conditions aux limites en présence de bords seront abordés dans d'autres cours.

Dans ce cas, on va introduire des outils pour analyser ces EDPs (utiles même en dimension supérieure) et pour les discrétiser.

En 1D, on peut souvent calculer les solutions de ces EDPs directement mais ce n'est pas possible en général (d'où l'utilité des méthodes de discrétisation).

Cours 1 : Introduction aux problèmes hyperboliques linéaires.

Introduction de l'équation de transport à vitesse constante

Méthode des caractéristiques

Caractère bien posé de l'équation - Solution classique

Quelques propriétés

Généralisation aux systèmes hyperboliques

L'équation de transport à coefficients constants

Dans ce qui suit c désigne un nombre réel donné.

On appelle équation de transport avec vitesse c l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0$$

la variable d'espace le temps

où la fonction inconnue $u = u(x,t)$ est une fonction à valeurs réelles des deux variables réelles.

On considère le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

où $u^0(x)$ est la donnée initiale.

Notion de solution classique

On appelle solution classique du problème, une fonction qui satisfait le problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u^{0}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

au sens ordinaire, les dérivées étant prises au sens usuel.

On peut chercher $u \in C^{1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+})$.

Remarque: une solution classique existe seulement si $u^{0} \in C^{1}(\mathbb{R})$

Question : sous cette hypothèse, est ce que le problème de Cauchy est bien posé au sens classique ?

Definition

On dit qu'un problème est bien posé dans V, un espace vectoriel normé, au sens de Hadamard si et seulement si (ssi)

- ☑ il existe une solution dans V
- ☑ cette solution est unique
- ☑ la norme de cette solution dans V est contrôlée par les données

Remarque: la dernière propriété souvent appelée "stabilité par rapport aux données" est fondamentale.

Notion de solution classique

Question : quelle norme munir $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$?

On va plutôt chercher

$$u \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

où

$$C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) = C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

$$C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) = \{ u \in C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+),\ \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \in C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \}$$

muni de $\quad ||u||_{C_b^1} = ||u||_{L^\infty} + ||\frac{\partial u}{\partial t}||_{L^\infty} + ||\frac{\partial u}{\partial x}||_{L^\infty}$

Une telle solution existe seulement si $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$.

Méthode des caractéristiques

Supposons qu'il existe une telle solution classique.

Du fait de la nature de l'équation de transport, on montre qu'il existe des courbes le long desquelles l'EDP se simplifie. Ce sont les courbes caractéristiques.

Définition

On appelle courbe caractéristique, les fonctions $X(t)$ telles que

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x}\right](X(t),t) = \frac{d}{dt}\left[u(X(t),t)\right],$$

Rappel: $\frac{d}{dt}\left[u(X(t),t)\right] = \frac{\partial u}{\partial t}(X(t),t) + \frac{dX}{dt}(t)\,\frac{\partial u}{\partial x}(X(t),t)$

Dans le cas de l'équation de transport à vitesse constante c

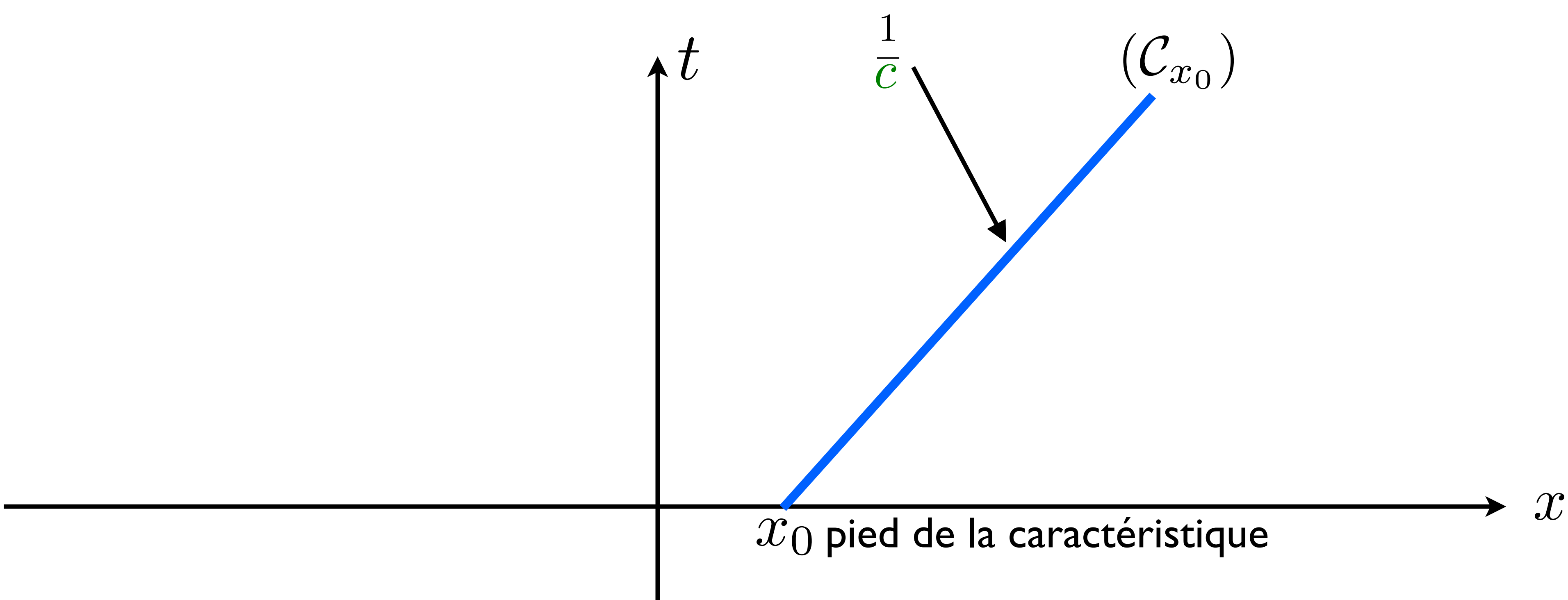
$$\frac{dX}{dt} = c\,.$$

Les courbes caractéristiques sont des droites caractéristiques.

Méthode des caractéristiques

Dans le cas de l'équation de transport à vitesse constante c, les **droites caractéristiques** sont solutions de l'EDO (eq. différentielle ordinaire)

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{dX}{dt} = c\,. \\ X(t=0) = x_0 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad X_{x_0}(t) = c\,t + x_0, \qquad (\mathcal{C}_{x_0})$$



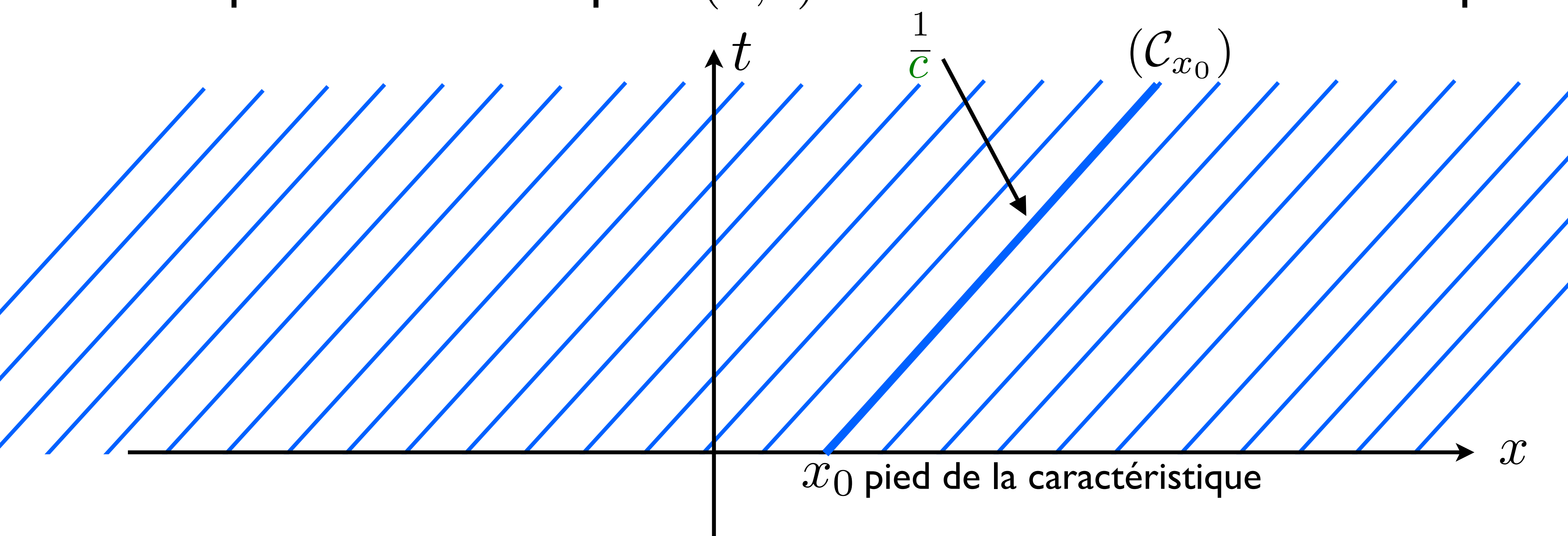
Méthode des caractéristiques

Dans le cas de l'équation de transport à vitesse constante c, les droites caractéristiques sont solutions de l'EDO (eq. différentielle ordinaire)

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{dX}{dt} = c\,. \\ X(t=0) = x_0 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad X_{x_0}(t) = c\,t + x_0, \qquad (\mathcal{C}_{x_0})$$

Les droites caractéristiques forment un fibrage du demi-plan (x,t).

Elles remplissent tout l'espace $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et ne se croisent pas.



Méthode des caractéristiques

Si u est solution classique de

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Le long des droites caractéristiques $X_{x_0}(t),\ x_0 \in \mathbb{R}$, elle vérifie

$$\forall x_0, \qquad 0 \underset{\uparrow}{=} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + c\ \frac{\partial u}{\partial x}\right](X_{x_0}(t), t) \underset{\uparrow}{=} \frac{d}{dt}\left[u(X_{x_0}(t), t)\right],$$

car u est solution classique — par définition des droites caractéristiques

On en déduit que $u(X_{x_0}(t), t)$ est une fonction constante du temps

$$\forall x_0, \qquad \underline{u(X_{x_0}(t), t)} = u(X_{x_0}(0), 0) = \underline{u^0(x_0)}$$

La solution classique est constante le long de chaque caractéristique.

Méthode des caractéristiques

Si u est solution classique alors

$$\boxed{\forall x_0, \quad u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0)}$$

Question : Peut on trouver l'expression de $u(x,t), \ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$?

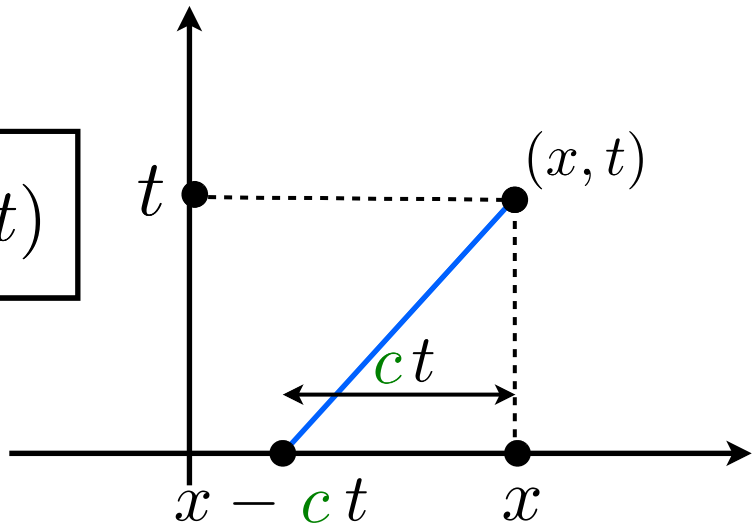
Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, il existe une et une seule caractéristique qui passe par ce point

$$\exists! \, x_0, \ X_{x_0}(t) = x$$

Comme $X_{x_0}(t) = c\,t + x_0$, on a $x_0 = x - c\,t$

Alors

$$\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \ u(x,t) = u^0(x - c\,t)}$$



Solution classique du problème de Cauchy

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$, le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ est bien posé dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

La solution $u \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ est donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \; u(x,t) = u^0(x - c\, t)$$

Preuve: • *Existence* $U(x,t) = u^0(x - c\,t)$ *est solution. En effet* $\underline{U \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)}$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) = -\, c\, \frac{du^0}{dx}(x - c\; t)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,t) = \frac{du^0}{dx}(x - c\; t)$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{\partial U}{\partial t} + c\, \frac{\partial U}{\partial x} = 0,} \quad \text{et} \quad \underline{U(x,0) = u^0(x)}$$

• *Unicité* *On a vu dans les transparents précédents que si* u *est solution classique alors elle est donnée par l'expression ci dessus.*

• *Stabilité* $||u||_{L^\infty} = ||u^0||_{L^\infty}$

$$||\frac{\partial u}{\partial t}||_{L^\infty} = c||\frac{du^0}{dx}||_{L^\infty} \qquad ||\frac{\partial u}{\partial x}||_{L^\infty} = ||\frac{du^0}{dx}||_{L^\infty}$$

Solution classique du problème de Cauchy

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$, le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ est bien posé dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

La solution $u \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ est donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \; u(x,t) = u^0(x - c\,t)$$

Propriétés de la solution classique

Préservation de la régularité.

Conservation de la norme L^p *voir le slide suivant pour p=2*

Propagation à vitesse finie.

$$\boxed{\operatorname{Supp} u^0 \subset [a,b] \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Supp} u(\cdot,t) \subset [a+ct, b+ct]}$$

Ces propriétés sont caractéristiques des équations hyperboliques linéaires

Conservation de la norme L^2

Prenons $u^0 \in L^2(\mathbb{R})$ et supposons que $u(\cdot, t)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x}(\cdot, t)$ aussi.

L'outil fondamental pour la stabilité L^2 est la transformée de Fourier

$$\hat{u} := \mathcal{F}u, \quad \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-\imath x \xi}\, dx$$

Si on note

$$u(x,t) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \widehat{u}(\xi, t)$$

et qu'on applique la transformée de Fourier au problème

$$\left| \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + c\, \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ & u(x,0) = u^0(x), \end{aligned} \right. \qquad \xrightarrow{\quad \mathcal{F} \quad} \qquad \left| \begin{aligned} & \frac{d\,\widehat{u}}{dt} + i\, c\, \xi\, \widehat{u} = 0 \\ & \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}^0(\xi), \end{aligned} \right.$$

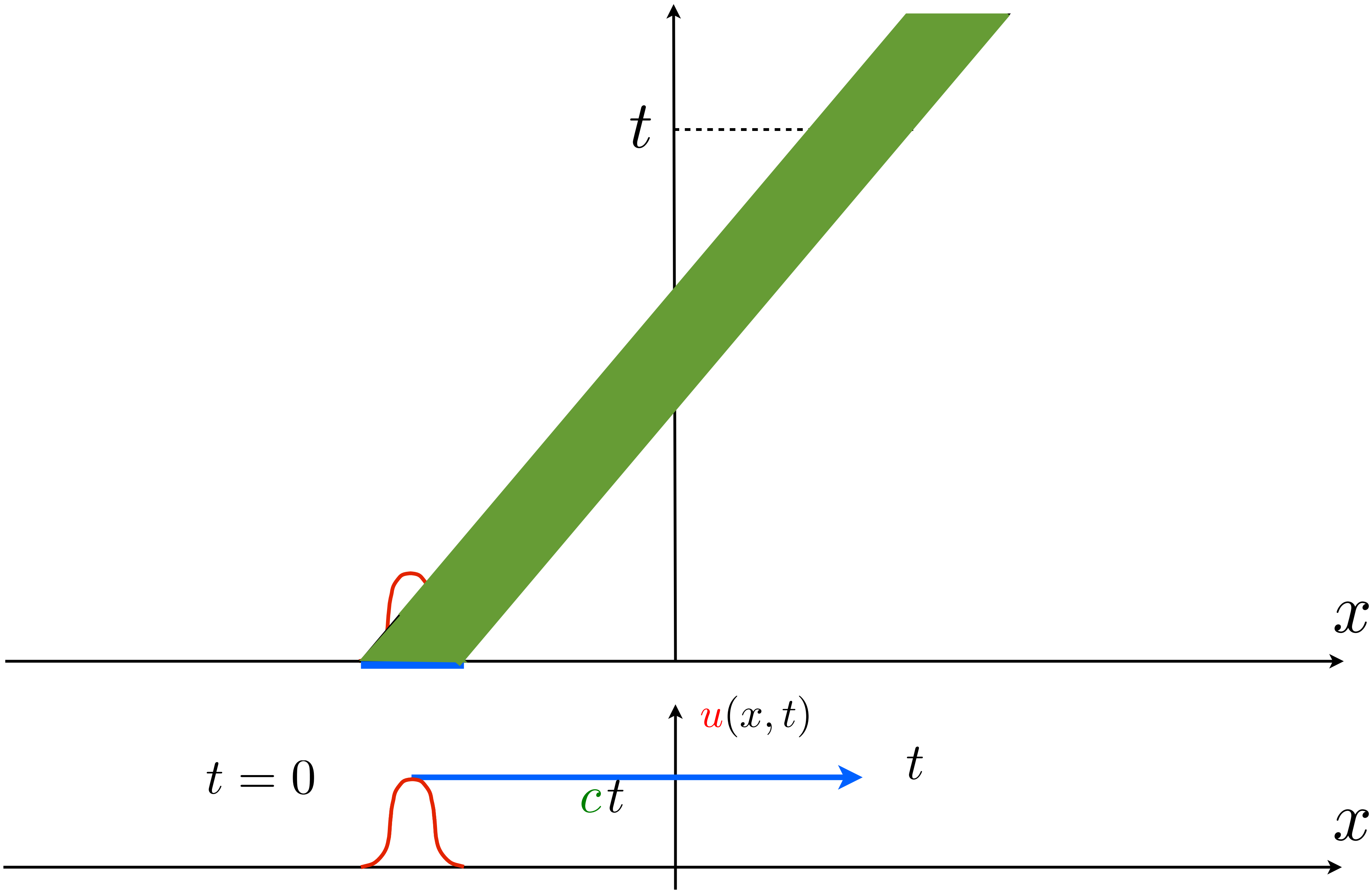
on trouve $\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u}^0(\xi)\, e^{-i\, c\, \xi\, t}$ *Par TF inverse, on retrouve la solution.*

$$\forall t > 0, \quad ||\hat{u}(\cdot, t)||_{L^2} = ||\hat{u}^0||, \quad \overset{\textit{Plancherel}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\forall t > 0, \quad ||u(\cdot, t)||_{L^2} = ||u^0||.}$$

Lors de l'étude de la stabilité L^2 des schémas, on réutilisera la Transformée de Fourier.

Propagation à vitesse finie

$$\boxed{\mathrm{Supp}\, u^0 \subset [a,b] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Supp}\, u(\cdot,t) \subset [a+ct, b+ct]}$$



Solution classique/faible du problème de Cauchy

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$, le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ est bien posé dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

La solution $u \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ est donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \; u(x,t) = u^0(x - c\,t)$$

Remarque : que se passe t il si $u^0 \notin C^1(\mathbb{R})$? Par exemple, $u^0 \in L^p(\mathbb{R})$

On peut définir

$$\text{p.p. } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \;\; u(x,t) = u^0(x - c\,t)$$

C'est une solution faible du problème de Cauchy (on verra la définition la prochaine fois). On peut montrer que le problème est bien posé dans L^p.

Généralisation aux systèmes

Etant donné $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, on considère le problème

$$(\mathcal{S}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \, \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Definition : On dit que le système $(\mathcal{S})$ est hyperbolique ssi A est diagonalisable à valeurs propres réelles.

Exemple : l'équation des ondes (voir l'exercice 2 du TD1)

On suppose que c'est bien le cas dans la suite.

Généralisation aux systèmes

Etant donné $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, on considère le problème

$$(\mathcal{S}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A\, \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Soit $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ telle que $A = P\Lambda P^{-1}$ avec $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{pmatrix}$

Posons $\mathbf{v}(x,t) := P^{-1}\, \mathbf{u}(x,t)$ et $\mathbf{v}^0(x) := P^{-1}\, \mathbf{u}^0(x)$

On voit que $\mathbf{v}$ est solution du système diagonal

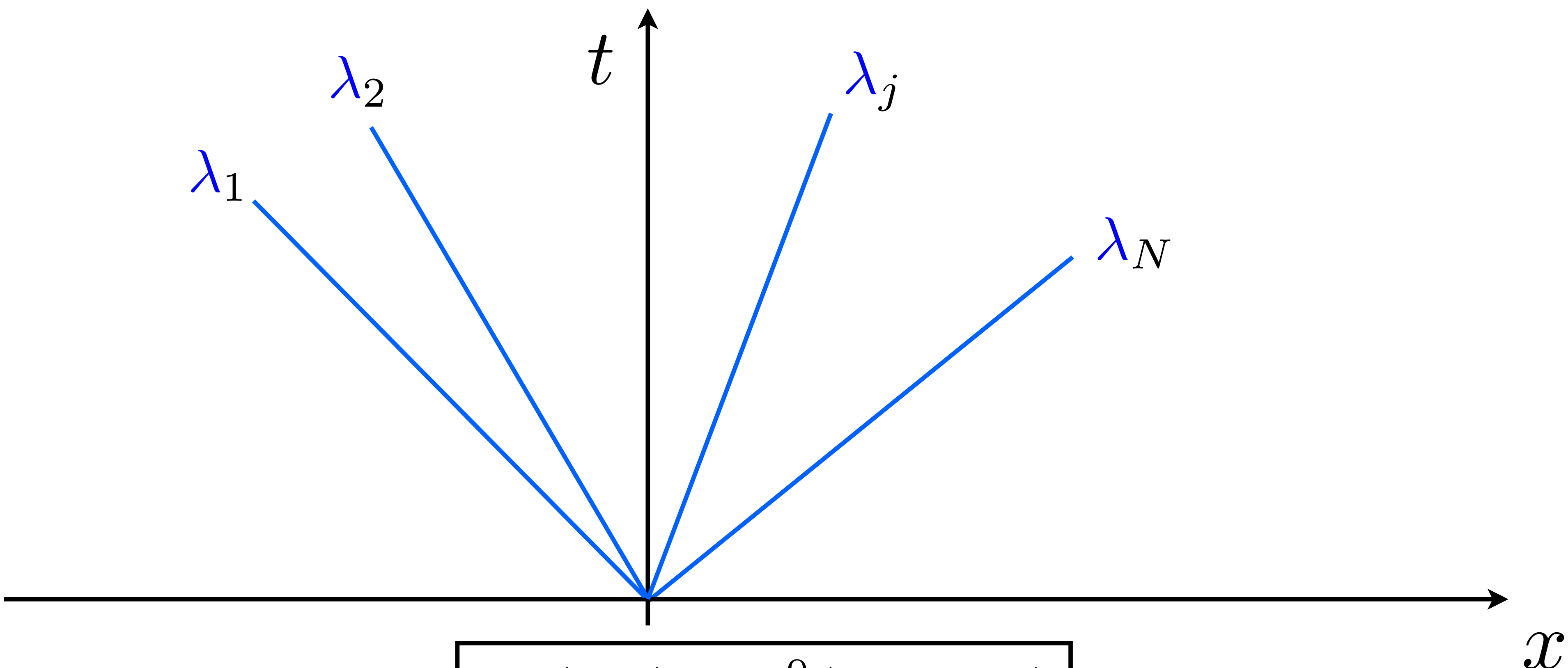
$$(\widetilde{\mathcal{S}}) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda\, \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Généralisation aux systèmes

On a donc N équations de transport découplées.

$$(\forall\, 1 \le j \le N) \quad \left| \begin{aligned} & \frac{\partial v_j}{\partial t} + \lambda_j \, \frac{\partial v_j}{\partial x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ & v_j(x,0) = v_j^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \right.$$

On a N familles de droites caractéristiques



$$\boxed{v_j(x,t) = v_j^0(x - \lambda_j\, t)}$$

Généralisation aux systèmes

Théorème : Pour toute donnée initiale $\mathbf{u}^0 \in C_b^1(\mathbb{R})^N$, le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ est bien posé dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)^N$.

La solution $\mathbf{u} \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)^N$ est donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{u}(x,t) = P\, \mathbf{v}(x,t)$$

$$v_j(x,t) = v_j^0(x - \lambda_j\, t)$$

$$\mathbf{v}^0(x) := P^{-1}\, \mathbf{u}^0(x)$$