Cours AMS-TA03 : Propagation des ondes dans les milieux périodiques

Lundi 12 Février 2018

Contrôle de connaissances. Durée : 3 heures

Tous les documents sont autorisés.

EXERCICE 1 (EQUATION DE SCHRÖDINGER AVEC UN POTENTIEL PÉRIODIQUE)

Soit $V(x),\ x \in \mathbb{R}$, une fonction à valeurs réelles, appelée potentiel, périodique de période L et bornée inférieurement et supérieurement :

$$V(x+L) = V(x), \quad V \in L^\infty(0,L), \quad \exists\, C \in \mathbb{R}|,\ V(x) \geq C.$$

On s'intéresse dans cet exercice à la solution U dans $C^1(0,T;H^1(\mathbb{R}))$ de

$$\begin{cases} \imath\, \dfrac{\partial U}{\partial t}(x;t) - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x;t) + V_p(x) = F(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ U(x;0) = 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

où F est supposée dans $C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ et telle que pour tout $t>0$, $F(\cdot;t)$ est L^2 à support compact.

Question 1. *On note pour tout $t>0$, $\hat{U}(\cdot,t) := \mathcal{F}(U(\cdot,t)) \in L^2((-L/2,L/2)\times(-\pi/L,\pi/L))$ la transformée de Floquet-Bloch de $U(\cdot;t)$ de période L. Donner le problème satisfait par $\hat{U}(\cdot,k,t)$ pour tout $k \in (-\pi/L,\pi/L)$ en fonction de $\hat{F}(\cdot,t) := \mathcal{F}(F(\cdot,t))$ et V_p. On justifiera soigneusement le résultat en mettant en évidence les propriétés de la transformée de Floquet Bloch utilisées.*

Question 2. *Ecrire le problème vérifié par $\hat{U}$ sous la forme*

$$\forall t>0,\ \forall k \in (-\pi/L,\pi/L], \quad \imath \frac{\partial \hat{U}}{\partial t}(\cdot,k,t) + A(k)\,\hat{U}(\cdot,k,t) = \hat{G}(\cdot,k,t)$$

où on définira les opérateurs $A(k)$ (avec leurs domaines) et $\hat{G}$ en fonction de F.

Question 3. *Montrer que pour tout $k \in (-\pi/L,\pi/L]$, $A(k)$ est autoadjoint, borné inférieurement (uniformément par rapport à k) et à résolvante compacte dans $H = L^2(-L/2,L/2)$.*

Le spectre de $A(k)$, noté $\sigma(A(k))$, est donc composé seulement de valeurs propres telles que

$$C \leq \lambda_1(k) \leq \lambda_2(k) \leq \ldots \lambda_n(k) \leq \ldots, \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n(k) = +\infty$$

et il existe une base hilbertienne formée de vecteurs propres associés $(w_1(\cdot;k), w_2(\cdot;k), \ldots, w_n(\cdot;k), \ldots)$ choisis tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|w_n(\cdot;k)\|_H = 1$$

Question 4. *Pour tout k, donner les EDO satisfaites par les coefficients $\hat{U}_n(k,t)$ de $\hat{U}(\cdot,k,t)$ dans la base $(w_1(\cdot;k), w_2(\cdot;k), \ldots, w_n(\cdot;k), \ldots)$:*

$$\hat{U}(\cdot,k,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{U}_n(k,t)\, w_n(\cdot;k) \quad \textit{avec} \quad \hat{U}_n(k,t) = (\hat{U}(\cdot,k,t), w_n(\cdot;k))_H.$$

En déduire l'expression de $U(x,t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$.

EXERCICE 2 (UNE VARIANTE DE LA TRANSFORMÉE DE FLOQUET BLOCH)

On définit pour toute fonction u dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ une variante de la transformée de Floquet-Bloch

$$\forall k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}u\,(x;k) := \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(x+nL)\, e^{-\imath(x+nL)k}$$

Question 1. *Montrer que $x \mapsto \mathcal{F}u\,(x;k)$ est périodique et préciser la période. Montrer que $k \mapsto \mathcal{F}u\,(x,k)$ est quasi-périodique et préciser la quasi-période.*

Question 2. *Montrer que pour toute fonction u dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}\,(x) := \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{u}(x;k)\, e^{\imath xkL}\, dk, \quad \textbf{où } \hat{u} = \mathcal{F}u.$$

Question 3. *Montrer que pour tout u et v dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a l'égalité de Parseval*

$$\int_K \hat{u}(x;k)\, \overline{\hat{v}(x;k)}\, dxdk = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, \overline{v(x)}\, dx \quad \textbf{où } K =]-\tfrac{L}{2}, \tfrac{L}{2}[\times]-\tfrac{\pi}{L}, \tfrac{\pi}{L}[$$

En déduire que $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(K)$.

On admet dans la suite que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme entre $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(K)$, d'inverse $\mathcal{F}^{-1}$.

Question 4. *Soit $a_p \in L^\infty(\mathbb{R})$, une fonction L-périodique, exprimer pour toute fonction u dans $L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(a_p\, u)$ en fonction de $\mathcal{F}(u)$.*

Question 5. *Exprimer pour toute fonction u dans $H^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(\dfrac{d}{dx}u)$ en fonction de $\mathcal{F}(u)$.*

Question 6. *Caractériser l'espace image $V^1(K)$ de $H^1(\mathbb{R})$ par $\mathcal{F}$. Même question pour $H^2(\mathbb{R})$.*

On considère maintenant la transformation 2D : pour toute fonction u dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\forall\, \vec{k} \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{F}_{12}u\,(\vec{x};\vec{k}) := \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{2\pi} \sum_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2} u\big(\vec{x} + (n_1L_1, n_2L_2)\big)\, e^{-\imath(\vec{x}+(n_1L_1,n_2L_2))\cdot\vec{k}}.$$

Question 7. *Relier la transformation $\mathcal{F}_{12}$ à chacune des transformations 1D $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ (où $\mathcal{F}_i$ est la transformée de Floquet Bloch 1D définie précédemment dans la direction x_i (avec sous-entendu $\vec{x} = (x_1, x_2)$).*

Question 8. *Etendre toutes les propriétés vues précédemment (Questions 1 à 6) à la transformée de Floquet Bloch 2D.*

<u>**Exercice**</u> **3 (Propriétés spectrales des opérateurs à coefficients périodiques en 2D)**

Soit $\vec{k} \in \hat{\mathcal{C}} =]-\pi, \pi[^2$ et $\mathcal{C} = (0,1)^2$ on s'intéresse dans cet exercice à l'opérateur

$$\forall u \in D(A(\vec{k})) := H^2_{\#}(\mathcal{C}), \quad A(\vec{k})\, u = -\frac{1}{\rho_p(\vec{x})}(\nabla + \imath\vec{k}) \cdot \Big(a_p(\vec{x})(\nabla + \imath\vec{k})u\Big)$$

où a_p et ρ_p sont des fonctions C^1, $1-$périodiques en chaque variable (x_1, x_2), et telles que

$$0 < a^- \leq a_p \leq a^+ < +\infty, \quad \textit{et} \quad 0 < \rho^- \leq \rho_p \leq \rho^+ < +\infty\,.$$

$$\textit{et} \quad H^2_{\#}(\mathcal{C}) = \left\{ u \in H^2(\mathcal{C}), \quad \forall i \in \{1,2\}, \left| \begin{array}{l} u\big|_{x_1=1} = u\big|_{x_1=0} \\ u\big|_{x_2=1} = u\big|_{x_2=0} \end{array} \right. \quad \textit{et} \left| \begin{array}{l} \partial_{x_2} u\big|_{x_1=1} = \partial_{x_2} u\big|_{x_1=0} \\ \partial_{x_1} u\big|_{x_2=1} = \partial_{x_1} u\big|_{x_2=0} \end{array} \right. \right\}.$$

On note $H = L^2(\mathcal{C}, \rho_p)$ dont le produit hermitien est donné par $(u,v)_H = \int_{\mathcal{C}} u\bar{v}\rho_p$.

Question 1. *A la lumière de l'exercice précédent, relier l'opérateur $A(\vec{k})$ à l'opérateur A défini par*

$$\forall u \in D(A) := H^2(\mathbb{R}), \quad A\, u = -\frac{1}{\rho_p(\vec{x})}\nabla \cdot (a_p(\vec{x})\nabla u)$$

Question 2. *On pose* $H^1_{\#}(\mathcal{C}) = \left\{ u \in H^1(\mathcal{C}), \quad \forall i \in \{1,2\}, \left| \begin{array}{l} u\big|_{x_1=1} = u\big|_{x_1=0} \\ u\big|_{x_2=1} = u\big|_{x_2=0} \end{array} \right. \right\}.$

Quelle est la forme bilinéaire $a(\vec{k}; \cdot, \cdot)$ sur $H^1_{\#}(\mathcal{C}) \times H^1_{\#}(\mathcal{C})$ telle que

$$\forall (u,v) \in H^2_{\#}(\mathcal{C}) \times H^1_{\#}(\mathcal{C}), \quad (A(k)u, v)_H = a(k; u, v)$$

Question 3. *Montrer que $A(\vec{k})$ est autoadjoint, positif et à résolvante compacte.*

Le spectre de $A(\vec{k})$ est donc composé seulement de valeurs propres telles que

$$0 \leq \lambda_1(\vec{k}) \leq \lambda_2(\vec{k}) \leq \dots \lambda_n(\vec{k}) \leq \dots, \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n(\vec{k}) = +\infty$$

qui sont caractérisées par le principe du min-max

$$\lambda_n(\vec{k}) = \min_{V_n \in \mathcal{V}_n(H^1_{\#}(\mathcal{C}))} \ \max_{u \in V_n} \frac{a(\vec{k}, u, u)}{(u,u)_H}$$

où $\mathcal{V}_n(H^1_{\#}(\mathcal{C}))$ est l'ensemble des s.e.v de dimension n de $H^1_{\#}(\mathcal{C})$. On introduit pour la suite une base hilbertienne formée de vecteurs propres associés

$$\big\{w_1(\cdot\,;\vec{k}), w_2(\cdot;\vec{k}), \dots, w_n(\cdot\,;\vec{k}), \dots\big\} \ \textit{tels que} \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|w_n(\cdot\,;\vec{k})\|_H = 1.$$

Question 4. *En adaptant la preuve faite en cours en dimension 1, montrer que* $\vec{k} \mapsto \lambda_n(\vec{k})$ *est liptchitzienne.*

Question 5. *Calculer* $\lambda_1((0,0))$. *Montrer que c'est une valeur propre simple et déterminer le vecteur propre* $w_1\big(\cdot\,;(0,0)\big)$ *qui vérifie*

$$\int_{\mathcal{C}} \rho_p \, w_1\big(\cdot\,;(0,0)\big) > 0. \tag{1}$$

Question 6. *En déduire que* $\lambda_2(\vec{k}) - \lambda_1(\vec{k}) > 0$ *dans un voisinage de* $(0,0)$.

Question 7. *Montrer que* $\lambda_1(\vec{k}) \neq 0$ *pour* $\vec{k} \neq (0,0)$ *puis que* $\lambda_2(\vec{k}) > 0$ *pour tout* $\vec{k}$ *.*

On s'intéresse dans la suite à la première valeur propre que l'on note $\lambda(\vec{k})$ *et on suppose que* $\vec{k} \mapsto \lambda(\vec{k})$ *est de classe* C^2 *dans un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* $(0,0)$. *On admet que l'on peut construire, pour tout* $\vec{k} \in \hat{\mathcal{C}}$, *un vecteur propre associé* $w(\cdot\,;\vec{k})$ *(vérifiant* (1) *pour* $\vec{k} = (0,0)$*) et tel que* $\vec{k} \mapsto w(\cdot\,;\vec{k})$ *est de classe* C^2 *de* $\mathcal{V}$ *à valeurs dans* $H^2(\mathcal{C})$.

Question 8. *Exprimer, pour* $\vec{k} \in \mathcal{V}$, $\big(A(\vec{k}) - \lambda(\vec{k})\big)\, \partial_1 w(\cdot\,;\vec{k})$ *en fonction de* $\partial_1 \lambda(\vec{k})$ *et* $w(\cdot\,;\vec{k})$.

Question 9. *Justifier que, pour* $\vec{k} \in \mathcal{V}$, $\Big(\big(A(\vec{k}) - \lambda(\vec{k})\big)\ \partial_1 w(\cdot\,;\vec{k}), w(\cdot\,;\vec{k})\Big)_H = 0$.

En déduire $\partial_1 \lambda(\vec{k})$ *en fonction de* $w(\cdot;\vec{k})$. *En déduire que* $\partial_1 \lambda(0,0) = 0$. *Que peut-on dire de* $\partial_2 \lambda(0,0) = 0$ *?*

Question 10. *Montrer que, pour* $\vec{k} \in \mathcal{V}$, $\Big(\partial_1 w(\cdot\,;\vec{k}), w(\cdot\,;\vec{k})\Big)_H = 0$.

Question 11. *On pose* $e_1 := \partial_1 w(\cdot\,;(0,0))$. *Ecrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par* e_1 *dans* $\mathcal{C}$ *et montrer que* e_1 *est l'unique solution de cette équation dans* $H^2_{\#}(\mathcal{C})$ *qui vérifie*

$$\int_{\mathcal{C}} \rho_p \, e_1 = 0.$$

Question 12. *Exprimer* $\big(A(\vec{k}) - \lambda(k)\big)\, \partial_1^2 w(\cdot\,;\vec{k})$ *en fonction de* $\partial_1^2 \lambda(\vec{k})$, $\partial_1 \lambda(\vec{k})$, $\partial_1 w(\cdot\,;\vec{k})$ *et* $w(\cdot\,;\vec{k})$.

Question 13. *En s'inspirant de la question 9, calculer* $\partial_1^2 \lambda(\vec{k})$ *en fonction de* $\partial_1 \lambda(\vec{k})$, $\partial_1 w(\cdot\,;\vec{k})$ *et* $w(\cdot\,;\vec{k})$. *En déduire* $\partial_1^2 \lambda(0,0)$ *en fonction de* a_p, ρ_p *et* e_1.

Question 14. *Exprimer (presque sans calculs)* $\partial_{12}^2 \lambda(0,0)$ *en fonction de* a_p, ρ_p *et* e_1.

Question 14. *Donner l'expression de* $\partial_2^2 \lambda(0,0)$ *en fonction* a_p, ρ_p *et d'une fonction* e_2 *convenablement choisie que l'on précisera.*