

# Homogénéisation par ordre de Bloch

Soit  $u_\delta \in H^1(\mathbb{R})$  l'unique solution de

$$-\operatorname{div} a\left(\frac{x}{\delta}\right) \nabla u_\delta + p\left(\frac{x}{\delta}\right) u_\delta = f \quad \text{dans } \mathbb{R} \quad (S_\delta)$$

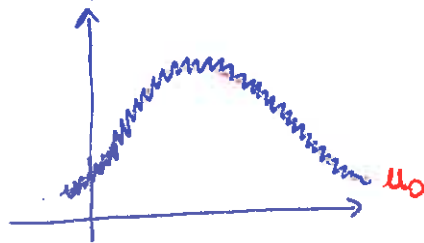
avec  $f$  continu à support compact

$$a, p \in L^{\infty}_{\text{per}}(Y) : 0 < a_0 \leq a \leq a_m < +\infty$$

$$a \in W^{1,\infty}_{\text{per}}(Y) : 0 < \beta \leq p \leq p_A < +\infty$$

$a(y+\Delta) = a(y)$  et  $p(y+\Delta) = p(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$ .  
 $\delta$  représente la périodicité du milieu dans  $(S_\delta)$ .

Il semble que lorsque  $\delta$  tend vers 0, la solution se ressembla de plus en plus à une fonction qui ne "voit" pas l'échelle de la périodicité.



Dit autrement, le milieu périodique peut être remplacé quand  $\delta \rightarrow 0$  par un milieu homogène effectif, dont les coefficients dépendent du milieu périodique  $(a_p, p_p)$ . La justification théorique de ces résultats est donnée par la théorie de l'homogénéisation:

Q1)  $u_\delta \rightarrow u_0$  dans quel espace.

Q2)  $u_0$  est-il solution d'un problème de type  $(S_\delta)$ ?  
Que valent les coefficients intervenant dans les équilibres?

Motivations pratiques: Résoudre numériquement  $(S_\delta)$  par  $\delta \ll 1$  est très cher voire impossible en pratique. (si on utilise une méthode EF, la taille du maillage  $h < \delta \ll 1$ ).  
Les résultats de l'homogénéisation permettent d'accélérer la "résolution numérique" de  $(S_\delta)$ .

Applications: Matériaux composites en mécanique, sciences du vivant (loi de constitution des tissus humains), ingénierie nucléaire (béton) estrachia pétrolière (couches géologiques très hétérogènes) Environnement (stockage des déchets nucléaires dans les couches géologiques)

ansatz sur la solution :  $u^\delta(x) = \sum_n \delta^n u_n(x, \frac{x}{\delta})$  avec  $u_n$  périodique par rapport à la 2<sup>e</sup> variable. On déduit alors les équations que doivent satisfaire nécessairement chaque fonction  $u_n$ . On peut démontrer ensuite que  $u_\varepsilon$  converge fortement dans  $L^2(\Omega)$  et faiblement dans  $H^1(\Omega)$  vers  $u_0$  (sous certaines hypothèses sur les coefficients, on peut utiliser des estimations d'énergie, sinon en utilisant la convergence double-échelle ou la  $\Gamma$ -convergence).

Dans ce cours, nous allons détailler l'approche par ondes de Bloch qui n'est pas basée sur un ansatz et qui permet de caractériser le milieu homogénéisé à partir des propriétés spectrales de l'opérateur.

I: Expression de la solution par ondes de Bloch

Soit  $\hat{u}^\delta(x; k) = \tilde{J}_\delta u^\delta(x; k)$ .

On a montré à plusieurs reprises dans le cours que :

$\hat{u}^\delta = \hat{u}_1^\delta + (\hat{u}^\delta - \hat{u}_1^\delta)$

avec  $\forall k \in (-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta})$ ,  $\hat{u}_1^\delta(x; k) = \frac{(\hat{f}^\delta(\cdot, k); \hat{w}_1^\delta(\cdot, k))_{L^2}}{\lambda_1^\delta(k) + 1} \hat{w}_1^\delta(\cdot, k)$ .

$(\hat{u}^\delta - \hat{u}_1^\delta)(\cdot, k) = \sum_{m \geq 2} \frac{(\hat{f}^\delta(\cdot, k); \hat{w}_m^\delta(\cdot, k))_{L^2}}{\lambda_m^\delta(k) + 1} \hat{w}_m^\delta(\cdot, k)$

où  $(\lambda_j^\delta(k))_j$  et  $(\hat{w}_j^\delta(\cdot, k))_j$  sont les éléments propres de

$$\begin{cases} A_\delta(k) - \frac{1}{\rho_p(\frac{x}{\delta})} \frac{\partial}{\partial x} \left( a_p(\frac{x}{\delta}) \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right) \\ \mathcal{D}(A_\delta(k)) = H_k^2(0, \delta) = \left\{ \omega \in H^2(0, \delta), \omega(\delta) = e^{ik\delta} \omega(0), \omega'(0) = e^{ik\delta} \omega'(0) \right\} \end{cases}$$

tels que  $\lambda_1^\delta(k) \leq \dots \leq \lambda_m^\delta(k) \leq \dots \rightarrow +\infty$   
 $\{ \hat{w}_m^\delta(\cdot, k) \}_{m=1}^{+\infty}$  BON de  $L_p^2(0, \delta)$ .

Lemme :  $\forall m \geq 1$   $\lambda_m^\delta(k) = \frac{1}{\delta^2} \lambda_m^1(k\delta)$   $\hat{w}_m^\delta(x, k) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \hat{w}_m^1(\frac{x}{\delta}, k\delta)$   
 $\forall k \in (-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta})$  et  $\forall x \in (0, \delta)$ .

Preuve :  $\forall k \in (-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta})$   $\hat{w}_m^1(\frac{\cdot}{\delta}, k\delta) \in H_k^2(0, \delta)$  et

$\forall x \in (0, \delta)$   $-\frac{1}{\rho_p(\frac{x}{\delta})} \frac{\partial}{\partial x} \left( a_p(\frac{x}{\delta}) \frac{\partial}{\partial x} \hat{w}_m^1(\frac{x}{\delta}, k\delta) \right) = -\frac{1}{\delta^2} \left[ \frac{1}{\rho_p(\frac{\cdot}{\delta})} \frac{\partial}{\partial y} \left( a_p(\frac{\cdot}{\delta}) \frac{\partial}{\partial y} \hat{w}_m^1(\cdot, k\delta) \right) \right] \left( \frac{x}{\delta} \right)$   
 $= \frac{\lambda_m^1(k\delta)}{\delta^2} \hat{w}_m^1(\frac{x}{\delta}, k\delta)$  12

•  $\forall \eta \in (-\pi, \pi) \quad \omega_m^\sigma(\delta, \frac{\eta}{\delta}) \in H_\eta^2(0,1)$  et

$$\forall y \in (0,1), \quad -\frac{1}{\rho_p(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho_p(y) \frac{\partial}{\partial y} \omega_m^\sigma(\delta, \frac{\eta}{\delta}) \right) = -\delta^2 \left[ \frac{1}{\rho_p(\frac{\cdot}{\delta})} \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho_p(\frac{\cdot}{\delta}) \frac{\partial}{\partial y} \omega_m^\sigma(\cdot, \frac{\eta}{\delta}) \right) \right] \left( \frac{y}{\delta} \right)$$

$$= -\delta^2 \lambda_m^\sigma \left( \frac{\eta}{\delta} \right) \omega_m^\sigma \left( \frac{y}{\delta}, \frac{\eta}{\delta} \right)$$

•  $\int_0^\delta |\omega_m^\sigma(\frac{x}{\delta}, \delta k)|^2 \rho_p(\frac{x}{\delta}) dx = \delta \int_0^1 |\omega_m^\sigma(y, \delta k)|^2 \rho_p(y) dy = \delta \quad \forall k \in (-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta})$

CCL:  $\lambda_m^\sigma(k) = \frac{1}{\delta^2} \lambda_m^\sigma(\delta k)$  et  $\omega_m^\sigma(x, k) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \omega_m^\sigma(\frac{x}{\delta}, k\delta)$ .

## II. Etude de la somme infinie $(u^\sigma - u_1^\sigma)$

Proposition:  $\|u^\sigma - u_1^\sigma\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \delta^2$ .

Preuve: D'après l'identité de Plancherel:

$$\|u^\sigma - u_1^\sigma\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\hat{u}^\sigma - \hat{u}_1^\sigma\|_{L^2((0,\delta) \times (-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta}))}^2 = \sum_{m \geq 2} \frac{|(\hat{b}_\sigma(i, k), \hat{\omega}_m^\sigma(i, k))_{L^2(0,\delta)}|^2}{|\lambda_m^\sigma(k) + 1|^2} dk$$

Or pour  $m \geq 2 \quad \lambda_m^\sigma(k) = \frac{1}{\delta^2} \lambda_m^\sigma(k\delta) \geq \frac{1}{\delta^2} \lambda_2^\sigma(\pi)$

donc  $\text{den}(\lambda_m^\sigma(k) + 1) \geq \frac{c}{\delta^2} + 1$

$$\|u^\sigma - u_1^\sigma\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \left( \frac{\delta^2}{c + \delta^2} \right)^2 \sum_{m \geq 2} |(\hat{b}_\sigma(i, k), \hat{\omega}_m^\sigma(i, k))_{L^2(0,\delta)}|^2 dk$$

$$\leq C_1 \delta^4 \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} \|\hat{b}_\sigma(i, k)\|_{L^2(0,\delta)}^2 dk = C_1 \delta^4 \|b\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

## III. Etude du terme principal $u_1^\sigma$

$$\forall x \in (0,\delta), \forall p \in \mathbb{Z}, \quad u_1^\sigma(x + \delta p) = \frac{\sqrt{\delta}}{2\pi} \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} \frac{(\hat{b}_\sigma(i, k), \hat{\omega}_1^\sigma(i, k))_{L^2(0,\delta)}}{\lambda_1^\sigma(k) + 1} \hat{\omega}_1^\sigma(x, k) e^{ip\delta k} dk$$

$$= \frac{\sqrt{\delta}}{2\pi} \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} \frac{(\hat{b}_\sigma(i, k), \hat{\omega}_1^\sigma(i, k))_{L^2(0,\delta)}}{\frac{1}{\delta^2} \lambda_1^\sigma(k\delta) + 1} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \omega_1^\sigma\left(\frac{x}{\delta}, k\delta\right) e^{ipk\delta} dk$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{2\pi} \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} \frac{(\hat{b}_\sigma(i, k), \hat{\omega}_1^\sigma(i, k))_{L^2(0,\delta)}}{\frac{1}{\delta^2} \lambda_1^\sigma(k\delta) + 1} \sigma_1\left(\frac{x}{\delta}, k\delta\right) e^{ikx} e^{ipk\delta} dk$$

où on a utilisé le fait que  $\omega_1^\sigma$  peut se réécrire:

$$\forall \eta \in (-\pi, \pi), \forall y \in (0,1) \quad \omega_1^\sigma(y, \eta) = \sigma_1(y, \eta) e^{i\eta y} \text{ avec } \sigma_1(\cdot, \eta) \in H_0^2(0,1).$$

On peut donc écrire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u_1^\delta(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} \frac{[\mathcal{F}_1^\delta f](k)}{\frac{1}{\delta^2} h(\delta k) + 1} u_1\left(\frac{x}{\delta}, k\delta\right) e^{ikx} dk.$$

On va utiliser les 3 lemmes suivants.

Lemme 1.  $h(k) = \frac{a^+}{e^+} k^2 + O(k^4)$  et  $\exists c > 0 \forall k \quad h(k) \geq ck^2$ .

Lemme 2.  $\|u_1^\delta(\cdot, k) - \frac{1}{\sqrt{e^+}}\|_{L^\infty(0,1)} \leq c|k|. \quad \forall k \in (-\pi, \pi).$

Lemme 3.  $\mathcal{F}_1^\delta f(k) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{e^+}} \text{TF } f(k) \quad \forall k \in \mathbb{R}.$

$$|\mathcal{F}_1^\delta f(k)| \leq c \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \forall k \in \left(-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta}\right). \quad \text{Ici } \mathcal{F}_1^\delta f \text{ est prolongé par } 0 \text{ par } k \in \mathbb{R} - \left(-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta}\right)$$

Preuve du lemme 3 :  $\forall k \in \left(-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta}\right), \mathcal{F}_1^\delta f(k) = \langle \mathcal{F}_1^\delta f(\cdot, k), w_1^\delta(\cdot, k) \rangle_{L^2(0,\delta)}$

$$= \sqrt{\frac{\delta}{2\pi}} \sum_n \int_0^\delta f(x+n\delta) \overline{w_1^\delta(x, k)} dx e^{-ink\delta}$$

or  $w_1^\delta(x, k) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} w_1\left(\frac{x}{\delta}, k\delta\right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} u_1\left(\frac{x}{\delta}, k\delta\right) e^{ikx}$  où  $u_1(\cdot, k)$  est 1-périodique

$$\mathcal{F}_1^\delta f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \int_0^\delta f(x+n\delta) \overline{u_1\left(\frac{x}{\delta}, k\delta\right)} e^{-ik(x+n\delta)} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} f(y) \overline{u_1\left(\frac{y}{\delta} - n, k\delta\right)} e^{-iky} dy$$

on étend  $u_1$  par périodicité  $\forall y \in \mathbb{R} \quad y = y_0 + n \quad y_0 \in (0,1) \quad n \in \mathbb{Z}$ .

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{u_1\left(\frac{y}{\delta}, k\delta\right)} e^{-iky} dy \quad u_1\left(y, \frac{k\delta}{\delta}\right) = u_1(y, k\delta).$$

$$\mathcal{F}_1^\delta f(k) - \frac{1}{\sqrt{e^+}} \text{TF } f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iky} \left(u_1\left(\frac{y}{\delta}, k\delta\right) - \frac{1}{\sqrt{e^+}}\right) dy$$

$\forall k \quad \left| f(y) e^{-iky} \left(u_1\left(\frac{y}{\delta}, k\delta\right) - \frac{1}{\sqrt{e^+}}\right) \right| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad \forall y$  d'après le lemme 2

$$\leq |f(y)| \quad L^1 \text{ (car } f \text{ à support compact)}$$

D'après le théorème de Lebesgue  $\mathcal{F}_1^\delta f(k) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{e^+}} \text{TF } f(k) \quad \forall k$ .

De plus  $|\mathcal{F}_1^\delta f(k)| \leq c \|f\|_{L^1} \|u_1(\cdot, k\delta)\|_{L^\infty} \leq c' \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \forall k \in \left(-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta}\right)$

car  $\|u_1(\cdot, k\delta)\|_{L^\infty} \leq \|u_1(\cdot, k\delta) - \frac{1}{\sqrt{e^+}}\|_{L^\infty(0,1)} + \frac{1}{\sqrt{e^+}} \leq c|k\delta| \leq c\pi$ .

↑  
d'après le lemme 2.



Les lemmes 1 et 2 serviront de'maîtres à la fin du cours.

Dans ces lemmes  $a^+ = \frac{1}{(\int \frac{1}{a_p(x)} dx)}$   $e^+ = \int e_p(x) dx$ .

D'après le théorème de Lebesgue,  $u_1^\sigma(x) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} u^+(x) \quad \forall x$  avec

$$u^+(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{TF f(k)}{a^+ k^2 + e^+} e^{ikx} dk.$$

En effet  $\frac{(\mathcal{J}_1^\sigma f)(k)}{\frac{1}{\sigma^2} \eta(\sigma k) + 1} u_1(\frac{x}{\sigma}, \sigma k) e^{ikx} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \frac{TF f(k)}{a^+ k^2 + e^+} e^{ikx}, \quad \forall k.$

et  $\left| \frac{(\mathcal{J}_1^\sigma f)(k)}{\frac{1}{\sigma^2} \eta(\sigma k) + 1} u_1(\frac{x}{\sigma}, \sigma k) e^{ikx} - \frac{TF f(k)}{a^+ k^2 + e^+} e^{ikx} \right| \leq \frac{C \|f\|_{L^1}}{ck^2 + 1}$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Remarquons que  $u^+$  est la (seule) solution dans  $H^2(\mathbb{R})$  de

$$-a^+ \Delta u^+ + e^+ u^+ = f \text{ dans } \mathbb{R}.$$

En fait, on peut démontrer un résultat plus précis que la convergence. On peut avoir une estimation de la vitesse de convergence.

**Théorème.**  $\forall \epsilon > 0, \exists C > 0 \quad \|u_1^\sigma - u^\sigma\|_{L^\infty} \leq C \sigma^{1-\epsilon}$

Pour cela, on utilise un résultat plus précis que le lemme 3.

**Lemme 3 bis**  $\forall k \in (-\frac{\pi}{\sigma}, \frac{\pi}{\sigma}) \quad \forall \epsilon \in (0,1) \exists C > 0 \quad \left\| \mathcal{J}_1^\sigma f(k) - \frac{1}{\sqrt{e^+}} TF f(k) \right\| \leq C \|f\|_{L^1} (\frac{\pi}{\sigma})^{1-\epsilon}$

Preuve du lemme 3 bis En utilisant l'expression donnée dans la preuve du lemme 3

$$\mathcal{J}_1^\sigma f(k) - \frac{1}{\sqrt{e^+}} TF f(k) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iky} \left( u_1\left(\frac{y}{\sigma}, k\sigma\right) - \frac{1}{\sqrt{e^+}} \right) dy.$$

On a d'une part que  $\left\| u_1\left(\frac{y}{\sigma}, k\sigma\right) - \frac{1}{\sqrt{e^+}} \right\|_{L^\infty} \leq C(k\sigma) \leq C\pi \quad \forall k \in (-\frac{\pi}{\sigma}, \frac{\pi}{\sigma})$

d'autre part que  $\leq C|k\sigma|$ .

On a donc  $\forall \epsilon > 0, \exists C \quad \left\| u_1\left(\frac{y}{\sigma}, k\sigma\right) - \frac{1}{\sqrt{e^+}} \right\|_{L^\infty} \leq C|k\sigma|^{1-\epsilon}$ .

Donc  $\left| \mathcal{J}_1^\sigma f(k) - \frac{1}{\sqrt{e^+}} TF f(k) \right| \leq C|k\sigma|^{1-\epsilon} \|f\|_{L^1} \quad \forall \epsilon \in (0,1)$ .

Preuve du théorème

$$\sqrt{2\pi} [u_1^\sigma(x) - u^+(x)] = \int_{\mathbb{R}} \left[ \mathcal{J}_1^\sigma f(k) - \frac{TF f(k)}{\sqrt{e^+}} \right] \frac{u_1\left(\frac{x}{\sigma}, k\sigma\right) e^{ikx}}{\frac{1}{\sigma^2} \eta(\sigma k) + 1} \chi_\sigma(k) dk \quad \leftarrow I_1(x)$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \frac{TF f(k)}{\sqrt{e^+}} \left( \frac{u_1\left(\frac{x}{\sigma}, k\sigma\right) e^{ikx}}{\frac{1}{\sigma^2} \eta(\sigma k) + 1} - \frac{e^{ikx} \sqrt{e^+}}{a^+ k^2 + e^+} \right) \chi_\sigma(k) dk \quad \leftarrow I_2(x)$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \frac{TF f(k)}{\sqrt{e^+}} \frac{e^{ikx} \sqrt{e^+}}{a^+ k^2 + e^+} (\chi_\sigma(k) - 1) dk \quad \leftarrow I_3(x)$$

$$* |I_1(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_1^\sigma f(k) - \frac{\mathcal{F}f(k)}{\sqrt{p^*}}| \frac{|\mathcal{O}_1(\frac{x}{\sigma}, k\sigma)|}{\frac{1}{\sigma^2} d_1(\sigma k) + 1} \chi_\sigma(k) dk$$

$$|I_1(x)| \leq c \sigma^{1-\varepsilon} \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} \frac{|k|^{1-\varepsilon}}{ck^2+1} dk = c' \sigma^{1-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in (0, 1)$$

$$* |I_2(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{F}f(k)}{\sqrt{p^*}} \left[ \frac{\mathcal{O}_1(\frac{x}{\sigma_1}, k\sigma) e^{ikx} - e^{ikx}/\sqrt{p^*}}{\frac{1}{\sigma^2} d_1(\sigma k) + 1} + e^{ikx}/\sqrt{p^*} \left( \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} d_1(\sigma k) + 1} - \frac{1}{\frac{a^+}{p^*} k^2 + 1} \right) \right] \chi_\sigma(k) dk \right|$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f(k)| \left[ \frac{|\mathcal{O}_1(\frac{x}{\sigma}, k\sigma) e^{ikx} - 1/\sqrt{p^*}|}{ck^2+1} + \frac{|d_1(\sigma k)/\sigma^2 - \frac{a^+}{p^*} k^2|}{(ck^2+1)^2} \right] \chi_\sigma(k) dk$$

On a, comme cela vu dans la preuve du lemme 3 bis)...

$$\|\mathcal{O}_1(\frac{x}{\sigma}, k\sigma) - \frac{1}{\sqrt{p^*}}\|_{L^\infty} \leq c(k\sigma)^{1-\varepsilon}$$

$$|d_1(\sigma k) - \frac{a^+}{p^*} k^2 \sigma^2| \leq c \sigma^4 k^4 \leq c' \Rightarrow |d_1(\sigma k) - \frac{a^+}{p^*} k^2 \sigma^2| \leq c \sigma^{4-\varepsilon'} |k|^{4-\varepsilon'} \quad \forall \varepsilon' \in (0, 4)$$

$$|I_2(x)| \leq c \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} \frac{c(k\sigma)^{1-\varepsilon}}{ck^2+1} + \frac{c \sigma^{2-\varepsilon'} |k|^{4-\varepsilon'}}{(ck^2+1)^2} dk$$

On choisit  $\varepsilon' \in (2, 2)$   
 $\varepsilon' = 1 + \varepsilon$ .

$$|I_2(x)| \leq c \|f\|_{L^1} \sigma^{1-\varepsilon}$$

$$* |I_3(x)| \leq c \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{ck^2+1} \quad k = \frac{u}{\sigma}$$

$$\leq c \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} \frac{du/\sigma}{c \frac{u^2}{\sigma^2} + 1} \quad k = \frac{u}{\sigma}$$

$$|I_3(x)| \leq c \|f\|_{L^1} \sigma \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{cu^2}$$

On va revenir maintenant sur les preuves des lemmes 1 et 2.

$$a^+ = \left( \int_0^1 \frac{dx}{a_p(x)} \right)^{-1}$$

$$e^+ = \int_0^1 f_p(x) dx$$

Lemme 1:  $\lambda_1(k) = \frac{\alpha^*}{\rho^*} k^2 + O(k^4)$  et  $\exists C > 0 \forall k \lambda_1(k) \geq Ck^2$ .

Preuve: On rappelle que les valeurs propres  $\lambda_n(k)$  sont caractérisées par  $\mathcal{D}(\lambda_n(k)) = 2 \cos k$ .

où  $\mathcal{D}(\lambda) = \psi_1'(1, \lambda) + \psi_2'(1, \lambda)$  et 
$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \rho \frac{d\psi_i}{dx} = \lambda \rho \psi_i \\ \psi_1(0, \lambda) = 1, \quad \psi_2(0, \lambda) = 0 \\ \partial_x \psi_1(1, \lambda) = 0, \quad \partial_x \psi_2(1, \lambda) = 1 \end{cases}$$

On a donc en particulier  $\mathcal{D}(\lambda_1(k)) = 2 \cos k$  disc au voisinage de  $k=0$ .

on a donc  $\lambda_1(k) = -\frac{1}{\mathcal{D}'(0)} k^2 + O(k^4)$ .

$\mathcal{D}(\lambda) = \partial_x \psi_1(1, \lambda) + \partial_x \psi_2(1, \lambda)$  on note  $\psi_1 = \partial_x \psi_1$  et  $\psi_2 = \partial_x \psi_2$ .

①  $-\frac{d}{dx} \left( \rho \frac{d\psi_1(x,0)}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \rho \partial_x \psi_1(x,0) = \text{cte} = 0 \Rightarrow \psi_1(x,0) = 1$   
 $\partial_x \psi_1(0,0) = 0$   $\psi_1(0,0) = 1$

\* 
$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \rho \frac{d\psi_1}{dx} - \lambda \rho \psi_2 = \rho \psi_2 \\ \psi_1(0, \lambda) = \partial_x \psi_1(0, \lambda) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } \lambda=0 \quad \begin{cases} -\frac{d}{dx} \rho \frac{d\psi_1}{dx} = \rho \\ + \rho \frac{d\psi_1}{dx} = -\int_0^x \rho(t) dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi_1(x,0) = -\int_0^x \frac{dy}{\rho(y)} \int_0^y \rho(t) dt$$

②  $-\frac{d}{dx} \left( \rho \frac{d\psi_2(x,0)}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \rho \frac{d\psi_2(x,0)}{dx} = \text{cte} = \rho(0) \Rightarrow \psi_2(x,0) = \int_0^x \frac{dt}{\rho(t)} \rho(0)$

\* 
$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \rho \frac{d\psi_2(x,0)}{dx} = \rho \psi_2(x,0) \\ \psi_2(0,0) = \partial_x \psi_2(0,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho \frac{d\psi_2(x,0)}{dx} = -\int_0^x \rho(y) \int_0^y \frac{dt}{\rho(t)} \rho(0)$$

\* 
$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(0) &= \psi_1'(1,0) + \psi_2'(1,0) \\ &= -\int_0^1 \frac{dy}{\rho(y)} \int_0^y \rho(t) dt - \int_0^1 \rho(y) \int_0^y \frac{dt}{\rho(t)} dy \\ &= -\left[ \int_0^y \frac{dt}{\rho(t)} \int_0^y \rho(t) dt \right]_{y=0}^1 + \int_0^1 \rho(y) \int_0^y \frac{dt}{\rho(t)} dy - \int_0^1 \rho(y) \int_0^y \frac{dt}{\rho(t)} dy \\ &= -\frac{\rho^*}{\alpha^*} \end{aligned}$$

**CONCLUSION**  $\lambda_1(k) = \frac{\alpha^*}{\rho^*} k^2 + O(k^4)$



Lemme 2 :  $\|U_n^*(\cdot, k) - \frac{1}{\sqrt{e^k}}\|_{L^\infty(Q_1)} \leq C|k|$ .

Preuve : On rappelle que  $u_n(\cdot, k)$  est construit à partir de

$$\tilde{w}_n(x, k) = \varphi_2(\Delta, d_1(k)) \varphi_1(\cdot, d_1(k)) + [e^{ik} - \varphi_1(1, d_1(k))] \varphi_2(\cdot, d_2(k)).$$

i.e.  $u_n(\cdot, k) = \tilde{w}_n(x, k) / \|\tilde{w}_n(\cdot, k)\|_{L^2_e}$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_n(x, 0) &= \int_0^1 \frac{dt}{a_p(t)} a_p(0) \star \|\tilde{w}_n(\cdot, 0)\|_{L^2_e}^2 = \frac{e^* \cdot (a(0))^2}{(a^*)^2} u_n(\cdot, 0) = \frac{1}{\sqrt{e^k}} \\ &= \varphi_2(1, 0). \end{aligned}$$

On admet que  $\forall x \in (0, 1) \forall n \forall q \forall |d| \leq A$  :  $|\varphi_1(x, d) - \varphi_1(x, 0)| \leq C(A)|d|$   
 $|\varphi_2(x, d) - \varphi_2(x, 0)| \leq C(A)|d|$

Ceci implique que comme  $|d_1(k)| \leq C|k|^2$ ,  $\exists C \forall q \forall k \in (0, \pi)$ .

$$|\varphi_i(x, d_1(k)) - \varphi_i(x, 0)| \leq C|k|^2 \quad (\text{et en particulier } \|\varphi_i(x, d_1(k))\|_{L^\infty(Q_1)} \ll C|k|^2)$$

On écrit

$$\tilde{w}_n(x, k) - \tilde{w}_n(x, 0) = \varphi_2(1, d_1(k)) \varphi_1(x, d_1(k)) - \varphi_2(1, 0) + [e^{ik} - \varphi_1(1, d_1(k))] \varphi_2(x, d_2(k))$$

$$\begin{aligned} \star |\varphi_2(1, d_1(k)) \varphi_1(x, d_1(k)) - \varphi_2(1, 0)| &\leq |\varphi_2(1, d_1(k)) - \varphi_2(1, 0)| |\varphi_1(x, d_1(k))| \\ &\quad + |\varphi_2(1, 0)| |\varphi_1(x, d_1(k)) - \varphi_1(x, 0)| \\ &\leq C|k|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star |[e^{ik} - \varphi_1(1, d_1(k))] \varphi_2(x, d_2(k))| &\leq |e^{ik} - 1| |\varphi_2(x, d_2(k))| + |1 - \varphi_1(1, d_1(k))| |\varphi_2(x, d_2(k))| \\ &\leq C|k|. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{w}_n(\cdot, k) - \tilde{w}_n(\cdot, 0)\|_{L^\infty(Q_1)} \leq C|k|$$

$$\star u_n(\cdot, k) - u_n(\cdot, 0) = \frac{\tilde{w}_n(\cdot, k) - \tilde{w}_n(\cdot, 0)}{\|\tilde{w}_n(\cdot, k)\|_{L^2_e}} + \tilde{w}_n(\cdot, 0) \frac{\|\tilde{w}_n(\cdot, 0)\|_{L^2_e} - \|\tilde{w}_n(\cdot, k)\|_{L^2_e}}{\|\tilde{w}_n(\cdot, k)\|_{L^2_e} \|\tilde{w}_n(\cdot, 0)\|_{L^2_e}}$$