Cours 4 (2016-2017)
Spectre de l'opérateur à coef per et expression de la solution.

On cherche à exprimer la solution $u_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$ de

$$(\mathcal{S}_\varepsilon) \quad -\partial_x^2 u_\varepsilon - \rho_p(x)(\omega^2 + i\varepsilon\omega) u_\varepsilon = f \text{ dans } \mathbb{R}$$

avec
- ρ_p L-per
- $0 < \rho^- \leq \rho_p \leq \rho^+ < +\infty$
- $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Ceci peut s'écrire $A_p u_\varepsilon - (\omega^2 + i\varepsilon\omega) u_\varepsilon = f/\rho_p$

avec $A_p = -\frac{1}{\rho_p}\partial_x^2 \quad D(A_p) = H^2(\mathbb{R})$.

__Remarque__ : Les résultats du cours peuvent s'étendre à $A_p = -\frac{1}{\rho_p(x)} \operatorname{div} a_p(x)\nabla$ avec a_p L-per aussi.

$\boxed{\text{Théorème : pour } \varepsilon > 0 \text{. le problème } (\mathcal{S}_\varepsilon) \text{ est bien posé}}$

$\boxed{\text{Preuve}}$: ① On peut appliquer le th de Lax Milgram.

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|^2 - \rho_p(x)(\omega^2 + i\varepsilon\omega)|u_\varepsilon|^2$$

$$\operatorname{Im} a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = -\varepsilon\omega \int_{\mathbb{R}} \rho_p(x)|u_\varepsilon|^2 . < 0 .$$

$$\operatorname{Re} a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|^2 - \rho_p(x)\omega^2|u_\varepsilon|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|^2 + \frac{\omega}{\varepsilon}\operatorname{Im} a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$$

$$\int \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|^2 + \omega^2 \rho_p |u_\varepsilon|^2 = \operatorname{Re} a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \left(\frac{\omega}{\varepsilon} + \frac{\omega}{\varepsilon}\right)\operatorname{Im} a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$$

$$\leq \left|\operatorname{Re} a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \frac{2\omega}{\varepsilon}\left(-\operatorname{Im} a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)\right)\right|$$

$$\leq \left(1 + \frac{2\omega}{\varepsilon}\right)|a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)|$$

la constante de coercivité $\alpha_\varepsilon = \dfrac{1}{1 + \frac{2\omega}{\varepsilon}} = O(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\alpha_\varepsilon} .$$

② __Rappels__ * Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un op sym tel que $\operatorname{Im}(A + I) = H$ alors le domaine de A est dense et A est autoadjoint.

* Soit $A : D(A) \subset H \to H$ autoadjoint alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

* Soit A ______________________ alors

$$\lambda \in \rho(A) \Rightarrow \|(A - \lambda \mathrm{Id})^{-1}\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))}$$

Ici. * A_p est symétrique. dans $H = L^2(\rho_p(x)dx)$

$$(u,v)_H = \int_{\mathbb{R}} uv\, \rho_p\, dx.$$

* $A_p + Id$ est inversible (th de Lax Milgram) $\Rightarrow Im(A_p + I) = H$.

$\Rightarrow A_p$ est autoadjoint.

* $\sigma(A_p) \subset \mathbb{R}$ comme A_p est positif.

$$(A_p u, u)_H = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx > 0.$$

On a même $\sigma(A_p) \subset \mathbb{R}^+$.

* enfin $\lambda = \omega^2 + i\varepsilon\omega \in \rho(A)$. pour $\varepsilon > 0$.

$$\|(A_p - (\omega^2 + i\varepsilon\omega))^{-1}\| = 1/\text{dist}(\lambda, \sigma(A))$$

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+ \Rightarrow \text{dist}(\lambda, \sigma(A)) \geq \varepsilon.$$

$$\|(A_p - (\omega^2 + i\varepsilon\omega))^{-1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

$A_p - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)$ est inversible.

$$u_\varepsilon = (A_p - (\omega^2 + i\varepsilon\omega))^{-1} \frac{f}{\rho_p}.$$

$$\|u_\varepsilon\|_H \leq \frac{1}{\varepsilon} \left\|\frac{f}{\rho_p}\right\|_H = \frac{1}{\varepsilon}\|f\|_{L^2}.$$

⚠ si $\varepsilon = 0$, pour l'instant on ne peut rien dire !

Comment trouver une expression de u_ε ?

On applique la TFB et on obtient :

$$\hat{A}_p(k)\, \hat{u}_\varepsilon(\cdot, k) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\, \hat{u}_\varepsilon(\cdot, k) = \frac{\hat{f}(\cdot, k)}{\rho_p(\cdot)} \quad k \in \left[-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right].$$

où $\begin{cases} \hat{A}_p(k) = -\dfrac{1}{\rho_p(x)} \partial_x^2 \\ D(\hat{A}_p(k)) = H^2_k\left(-\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2}\right) \end{cases}$

On a montré que pour $\forall k \in \left[-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right]$, $\hat{A}(k)$ est autoadjoint, borné inférieurement (≥ 0) et à résolvante compacte.

On a donc
* le spectre de $\hat{A}(k)$ est discret.
* $0 \leq \lambda_1(k) \leq \dots \leq \lambda_m(k)$ les valeurs propres de $\hat{A}(k)$.
* $\lim_{m \to +\infty} \lambda_m(k) = +\infty$
* $\hat{A}(k)\, w_m(\cdot, k) = \lambda_m(k)\, w_m(\cdot, k)$

avec $w_m(\cdot, k)$ une base hilbertienne de $L^2\left(\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right], \rho_p dx\right)/\mathbb{Z}$

On peut donc écrire : $\hat{f}(\cdot,k) = \sum_{m\geq 1} f_m(k)\, w_m(\cdot,k)$ avec $\sum_{m\geq 1} |f_m(k)|^2<+\infty$

$$\hat{u}_\varepsilon(\cdot,k) = \sum_{m\geq 1} \hat{u}_{\varepsilon m}(k)\, w_m(\cdot,k) \quad \text{avec } \sum_{m\geq 1} |\hat{u}_{\varepsilon m}(k)|^2<+\infty$$

et $f_m(k) = \left(\hat{f}(\cdot,k), w_m(\cdot,k)\right)_H$

$$\text{et } \left(\lambda_m(k) - (\omega^2+i\varepsilon\omega)\right) u_{\varepsilon m}(k) = \left(\frac{\hat{f}(\cdot,k)}{e_p(\cdot)}, w_m(\cdot,k)\right)_H.$$

$A(k)\hat{u}_\varepsilon(\cdot,k) = \sum_{m\geq 1} \left(A(k)\hat{u}_\varepsilon(\cdot,k), w_m(\cdot,k)\right)_{L^2_e} w_m$

$= \sum_{m\geq 1} \lambda_m \left(\hat{u}_\varepsilon(\cdot,k), w_m(\cdot,k)\right)_{L^2_e} w_m$

$\hat{u}_\varepsilon(\cdot,k) \in D(A(k))$ ssi $\sum_{m\geq 1} |\lambda_m|^2 |u_{\varepsilon m}|^2 <+\infty$

$$u_{\varepsilon m}(k) = \frac{\left(\hat{f}(\cdot,k), w_m(\cdot,k)\right)_{L^2}}{\lambda_m(k) - (\omega^2+i\varepsilon\omega)} \qquad (\lambda_m(k)>0).$$

$$u_\varepsilon(x,k) = \sum_{m\geq 1} \frac{\left(\hat{f}(\cdot,k), w_m(\cdot,k)\right)_{L^2}}{\lambda_m(k) - \omega^2 - i\varepsilon\omega}\, w_m(x,k)$$

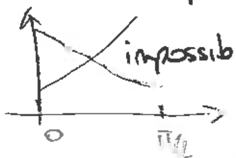
la somme convergeant dans $L^2(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})$.

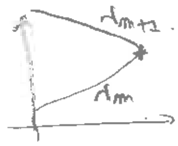
<u>Rappels sur les courbes de dispersion</u>. $k \to \lambda_m(k)$ (1D resultat).

* $\forall m$ $k \mapsto \lambda_m(k)$ est $\frac{2\pi}{L}$ périodique, paire, lipschitzienne (principe du min max)

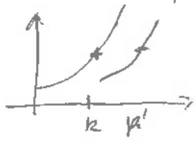
  On peut montrer que ces fonctions sont C^∞ sur $]0,\frac{\pi}{L}[$

* $\forall k$ la multiplicité de $\lambda_m(k)$ ne peut être que 1 et 2 et elle est 2 seulement pour $k=0$ ou $\frac{\pi}{L}$.





* $\forall k \neq k' \in]0,\pi[$, $\sigma(A(k)) \cap \sigma(A(k')) = \emptyset$



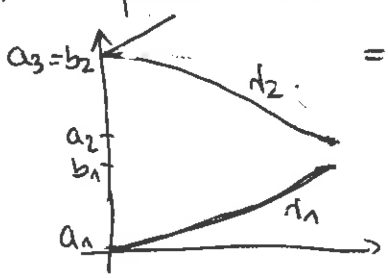
* Chaque fonction $k \to \lambda_m(k)$ est strictement monotone sur $(0,\frac{\pi}{L})$

  strictem^t $\nearrow$ si m impair.

  strictem^t $\searrow$ si m pair.

Si on pose $I_m = [a_m, b_m]$ $= \lambda_m([0,\frac{\pi}{L}])$ avec $\begin{cases} a_m = \lambda_m(0) \\ b_m = \lambda_m(\frac{\pi}{L}) \end{cases}$ si m impair

$\begin{cases} a_m = \lambda_m(\frac{\pi}{L}) \\ b_m = \lambda_m(0) \end{cases}$ si m pair



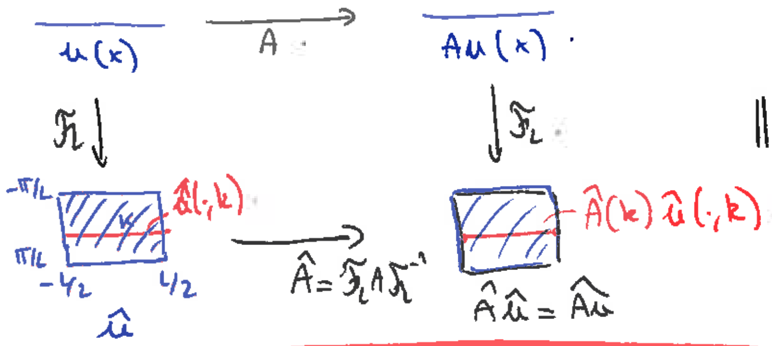
I_m bandes spectrales

$a_{m+1} \geq b_m$ l'intersection de 2 bandes spectrales est soit vide soit réduite à un point.

$G_{2m} =]\lambda_{2m}(0), \lambda_{2m+1}(0)[$, $G_{2m-1} =]\lambda_{2m-1}(\frac{\pi}{L}), \lambda_{2m}(\frac{\pi}{L})[$. gaps spectraux

si $G_{2m} = \emptyset$ alors $\lambda_{2m}'(0) \neq 0$ et $\lambda_{2m+1}'(0)\neq 0$, si $G_{2m}\neq\emptyset$ alors $\lambda_{2m}'(0)=0$ $\lambda_{2m}''(0)\neq 0$

$\lambda_{2m+1}'(0)=0$ $\lambda_{2m+1}''(0)\neq 0$



$$\|Au\|_{L^2}^2 = \int_k \|A(k)\hat{u}(\cdot,k)\|_{L^2}^2$$

$$\boxed{\text{Théorème.}\quad \sigma(A) = \bigcup_{k\in[0,\frac{\pi}{L}]} \sigma(A(k)) = \bigcup_{m=1}^{+\infty} I_m}$$

$\boxed{\text{Preuve}}$: ① Mq $\mathbb{C}\setminus \bigcup_m I_m \subset \rho(A)$.

comme $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$, il suffit de montrer q. $\mathbb{R}^+ \setminus \bigcup_m I_m \subset \rho(A)$.

Soit $z \in \mathbb{R}^+\setminus \bigcup_m I_m$, $A - z$ est un isomorphisme de H^2 dans L^2.

ssi $\forall f \in L^2$, $\exists!\, u \in H^2(\mathbb{R})$ $Au - zu = f$.

Si un tel u existe alors nécessairement $\forall k$ $\hat{A}(k)\hat{u}(\cdot,k) - z\,\hat{u}(\cdot,k) = \hat{f}(\cdot,k)$

$\{w_m(\cdot,k), m\geq 1\}$ base hilbertienne de $L^2((-\frac{L}{2},\frac{L}{2}), \rho\, dx) = L^2_{ep}$

$$\hat{f}(\cdot,k) = \sum_{m\geq 1} f_m(k)\, w_m(\cdot,k) \qquad \|\hat{f}(\cdot,k)\|_{L^2_{ep}}^2 = \sum_{m\geq 1} |f_m(k)|^2$$

$$\hat{u}(\cdot,k) = \sum_{m\geq 1} u_m(k)\, w_m(\cdot,k) \qquad \|\hat{u}(\cdot,k)\|_{L^2_{ep}}^2 = \sum_{m\geq 1} |u_m(k)|^2$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda_m(k) - z)\, u_m(k) = f_m(k)$$

comme $z \notin \bigcup_m I_m \Rightarrow u_m(k) = \dfrac{f_m(k)}{\lambda_m(k) - z}$

Soit u telle que $\hat{u}(\cdot,k) = \sum u_m(k)\, w_m(\cdot,k)$.

* $u \in L^2$ car. $\|\hat{u}(\cdot,k)\|_{L^2_e}^2 = \sum_{m\geq 1} \left|\dfrac{f_m(k)}{\lambda_m(k)-z}\right|^2 \leq \dfrac{1}{\mathrm{dist}(z,\bigcup_m I_m)^2}\, \|\hat{f}(\cdot,k)\|_{L^2_{ep}}^2$.

donc $\hat{u} \in L^2$ et. $\|\hat{u}\|_{L^2(K)} \leq \dfrac{1}{\mathrm{dist}(z,\bigcup_m I_m)}\, \|\hat{f}\|_{L^2(K)}$

$$\underset{\text{Plancherel}}{\Rightarrow} \quad \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\mathrm{dist}(z,\bigcup_m I_m)}\, \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

* $u \in D(A)$ car. $\hat{A}(k)\hat{u}(\cdot,k) = \sum_{m\geq 1} \dfrac{\lambda_m(k)}{\lambda_m(k)-z}\, f_m(k)\, w_m(\cdot,k)$.

On peut montrer $\sup_m \left|\dfrac{\lambda_m(k)}{\lambda_m(k)-z}\right| \leq M(k)$ et $\sup_k M(k) \leq M$.

En effet $\exists m_0$ $\forall m \geq m_0$ $\lambda_m(k) \geq z+1$.

comme $x \to \dfrac{x}{x-z}$ $\searrow$ on a. $\dfrac{\lambda_n(k)}{\lambda_n(k)-z} \leq z+1 \quad \forall n \geq n_0$

et par ailleurs $\left|\dfrac{\lambda_n(k)}{\lambda_n(k)-z}\right| \leq \dfrac{C_n}{d(z, \bigcup_n I_n)}$

$$\forall n \quad \forall k \in \left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right) \quad \frac{\lambda_n(k)}{\lambda_n(k)-z} \leq M$$

donc $\| \hat{A}(k)\, \hat{u}(\cdot, k)\|_{L^2} \leq M \, \| \hat{f}(\cdot, k)\|_{L^2}$

donc $Au \in L^2 \qquad \|Au\|_{L^2} \leq M \|f\|_{L^2}$

* Par construction u est solution de $Au - zu = f$

Remarque : si $u \in L^2$ et $Au \in L^2$ alors $(Au, u)_H = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 < +\infty$.

② $\forall \lambda \in \bigcup_n I_n \quad \lambda \in \sigma(A)$

Rappel : si A est autoadjoint $D(A) \subset H \to H$ alors

$\lambda \in \sigma(A) \iff \exists u_n \in D(A)^{\mathbb{N}}$ tq $\|u_n\|_H = 1$ et $\|Au_n - \lambda u_n\|_H \to 0$.

Soit $\lambda \in \bigcup_n I_n$. $\exists n_0 \ \exists k_0 \quad \lambda = \lambda_{n_0}(k_0)$ soit $w_{n_0}(\cdot, k_0)$ un vect prop. associé.

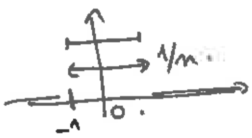
si on choisit u / " $\hat{u}(\cdot, k) = w_{n_0}(\cdot, k_0)\, \delta_{k=k_0}$ "

" $\|Au - \lambda u\|_{L^2} = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \| \hat{A}(k) \hat{u}(\cdot, k) - \lambda \hat{u}(\cdot, k)\|_{L^2} = \|\hat{A}(k_0) w_{n_0}(\cdot, k_0) - \lambda w_{n_0}(\cdot, k_0)\|_{L^2}$

$= \|(\lambda_{n_0}(k_0) - \lambda) w_{n_0}(\cdot, k_0)\|_{L^2} = 0$ "

sauf que u def ainsi $\notin L^2$, $\notin D(A)$!

On va choisir une suite u_n qui " cv " en un certain sens vers ce u.

Soit $\chi_n(k)$ 

$\hat{u}_n(x, k) = \sqrt{n}\, w_{n_0}(\cdot, k)\, \chi_n(k - k_0)$

$\|\hat{u}_n(\cdot, k)\|_{L^2_\ell} = \sqrt{n}\, \chi_n(k - k_0)$.

$\|u_n\|^2_{L^2} = n \int_k |\chi_n(k-k_0)|^2 dk = 1$.

$\|Au_n - \lambda u_n\|^2_{L^2} = \int_k \|\hat{A}(k)\hat{u}_n(\cdot,k) - \lambda \hat{u}_n(\cdot, k)\|^2_{L^2}$

$= \int_k \|(\lambda_{n_0}(k) - \lambda)\, \hat{u}_n(\cdot, k)\|^2_{L^2} = \int_k (\lambda_{n_0}(k) - \lambda)^2\, n\, \chi_n(k - k_0)$

$k \to \lambda_{n_0}(k)$ C^0, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta \quad |k - k_0| \leq \eta \Rightarrow |\lambda_{n_0}(k) - \lambda| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon>0$ $\exists n_0$ $\forall n\geq n_0$. $\frac{1}{2n}\leq \eta$ et $\forall k\in[k_0-\frac{1}{2n}, k_0+\frac{1}{2n}]$ $|\lambda_m(k)-\lambda|\leq\varepsilon$.

$\forall n\geq n_0$ $\|A u_n-\lambda u_n\|_{L^2}^2\leq\varepsilon^2$. dc $\|Au_n-\lambda u_n\|_{L^2}\to 0$.

Proposition : le spectre ponctuel de A (les valeurs propres) est vide.

Preuve : supposons $\lambda\in\sigma(A)$ une valeur propre, u vecteur propre associé $\neq 0$

$Au-\lambda u=0 \Rightarrow \forall k$ $(\hat{A}.(k)-\lambda)\hat{u}(\cdot,k)=0$.

$\lambda\in\sigma(\hat{A}(k))$ ou $\hat{u}(\cdot,k)=0$.

comme. les $\lambda_m(k)$ ne peuvent rencontrer λ qu'en un pt.

donc $\hat{u}(\cdot,k)=0$ p.p $k\in[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow \hat{u}=0\Rightarrow u=0$

On dit que le spectre de A est purement essentiel ou continu.

Revenons au problème $(\mathcal{J}_\varepsilon)$.

$$\hat{u}_\varepsilon(x,k)=\sum_{m\geq 1}\frac{\overbrace{(\hat{f}(\cdot,k),w_m(\cdot,k))_{L^2}}^{f_m(k)}}{\lambda_m(k)-(\omega^2+i\varepsilon\omega)}\,w_m(x,k)$$ la somme cv ds L^2.

$u_\varepsilon(\cdot,k)\in L^2$, $u_\varepsilon(\cdot,k)\in D(A(k))=H^2_k$.

$$A(k)u_\varepsilon(\cdot,k)=\sum_{m\geq 1}.\frac{f_m(k)\,\lambda_m(k)}{\lambda_m(k)-(\omega^2+i\varepsilon\omega)}\,w_m(\cdot,k)$$ la somme cv ds L^2.

$$\forall n\ \forall x\in(-\tfrac{L}{2},\tfrac{L}{2}),\ u_\varepsilon(x+nL)=\mathcal{F}_L.(\hat{u}_\varepsilon)=\sqrt{\frac{2\pi}{L}}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{u}_\varepsilon(x,k)\,e^{inkL}\,dk.$$

Peut on maintenant étudier la limite ?

① Supposons $\omega^2\notin\sigma(A)=\bigcup_m I_m$

$A-\omega^2 Id$ est inversible de H^2 dans L^2.

En utilisant la même approche que précédemment

on montre que $-\Delta u-\rho\omega^2 u=f$ est un pb bien posé ds H^2

$$\text{et}\quad \hat{u}(x,k)=\sum_{m\geq 1}\frac{f_m(k)}{\lambda_m(k)-\omega^2}\,w_m(x,k).$$

Théorème : On a $\|u_\varepsilon - u\|_{H^2} = O(\varepsilon)$.

Preuve : $\bullet$ $\|u_\varepsilon - u\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \|\hat{u}_\varepsilon(\cdot,k) - \hat{u}(\cdot,k)\|^2_{L^2}\, dk$.

$$\|\hat{u}_\varepsilon(\cdot,k) - \hat{u}(\cdot,k)\|^2_{L^2} = \sum_{m\geq 1} |\hat{f}_m(k)|^2 \frac{\varepsilon^2\omega^2}{|\lambda_m(k) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)|^2 |\lambda_m(k) - \omega^2|^2}$$

$$\leq \underbrace{\sum_{m\geq 1} |\hat{f}_m(k)|^2}_{\|\hat{f}(\cdot,k)\|^2_{L^2_{ep}}} \frac{\varepsilon^2\omega^2}{d(\omega^2, \sigma(A))^4}$$

donc $\|u_\varepsilon - u\|^2_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \dfrac{\varepsilon^2\omega^2}{d(\omega^2,\sigma(A))^4}$

$\bullet$ $\|\partial_x^2(u_\varepsilon - u)\|^2_{L^2} \leq c\,\|A(u_\varepsilon - u)\|_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \|\hat{A}(k)(\hat{u}_\varepsilon(\cdot,k) - \hat{u}(\cdot,k))\|^2_{L^2}\, dk$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{m\geq 1} |\hat{f}_m(k)|^2 \underbrace{\frac{\lambda_m(k)^2\,\varepsilon^2\omega^2}{|\lambda_m(k) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)|^2 |\lambda_m(k) - \omega^2|^2}}_{\leq C(\omega)\,\varepsilon^2}$$

en utilisant le même arg^t q p. 4-5.

$$\leq C(\omega)\,\varepsilon^2 \|f\|^2_{L^2}$$

$\bullet$ $\|\partial_x(u_\varepsilon - u)\|^2_{L^2} = \left(A(u_\varepsilon - u), (u_\varepsilon - u)\right)_{L^2_{ep}} = O(\varepsilon^2)$. ∎

② Cas où $\omega^2 \in \sigma(A)$

$\exists m_0, k_0$ $\lambda_{m_0}(k_0) = \omega^2$.

Hypothèse : On suppose $\exists !\, k_0 \in \left]0, \frac{\pi}{L}\right[$ tq $\lambda_{m_0}(k_0) = \omega^2$

$$\hat{u}_\varepsilon(\cdot,k) = \underbrace{\sum_{m\neq m_0} \frac{\tilde{f}_m(k)}{\lambda_m(k) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)}\, w_m(\cdot,k)}_{\hat{u}_\varepsilon^{evan}(\cdot,k)} + \underbrace{\frac{\tilde{f}_{m_0}(k)}{\lambda_{m_0}(k) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)}\, w_{m_0}(\cdot,k)}_{\hat{u}_\varepsilon^{prop}(\cdot,k)}$$

$u_\varepsilon^{evan} = \mathcal{F}_L^{-1}(\hat{u}_\varepsilon^{evan})$ et $u_\varepsilon^{prop} = \mathcal{F}_L^{-1}(\hat{u}_\varepsilon^{prop})$.

Théorème : u_ε^{evan} cv dans H^2 vers $u^{evan} = u^{evan}_{\varepsilon=0} \in H^2(\mathbb{R})$

et $\|u_\varepsilon^{evan} - u^{evan}\|_{H^2(\mathbb{R})} = O(\varepsilon)$

Preuve : Remplacer dans la preuve du cas ① $\sum_{m\geq 1}$ par $\sum_{m\neq m_0}$. ∎

Passage à la limite pour u_ε^{prop}, $u_\varepsilon^{prop}(x+pL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L} dk \frac{f_{m_0}(k) w_{m_0}(\cdot,k)}{\lambda_{m_0}(k) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)} e^{ip\dots}$

On suppose que $f \in L^2_c(\mathbb{R})$ (L^2 à supp compact).

Remarque : Le résultat s'étend au cas où $f \in L^2_s$ $s > 1/2$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(1+x^2)^s dx < +\infty$$

Théorème : $u_\varepsilon^{prop} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u^{prop}$ dans $H^2\left(-\frac{L}{2}+pL, \frac{L}{2}+pL\right)$ $\forall p \in \mathbb{Z}$.

où
$$u^{prop}(x+pL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \Bigg[\text{v.p.} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{\tilde{f}_{m_0}(k)\, w_{m_0}(\cdot,k)}{\lambda_{m_0}(k) - \omega^2} e^{ipkL} dk + i\pi \frac{f_{m_0}(k_0)\, w_{m_0}(\cdot,k_0)}{|\lambda_{m_0}'(k_0)|} e^{ipk_0L} + i\pi \frac{f_{m_0}(-k_0)\, w_{m_0}(\cdot,-k_0)}{|\lambda_{m_0}'(k_0)|} \Bigg].$$

avec
$$\text{v.p.} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{\tilde{f}_{m_0}(k)\, w_{m_0}(\cdot,k)}{\lambda_{m_0}(k) - \omega^2} e^{ipkL} dk = \lim_{\delta \to 0} \int_{I_\delta(k_0)} \frac{\tilde{f}_{m_0}(k)\, w_{m_0}(\cdot,k)}{\lambda_{m_0}(k) - \omega^2} e^{ipkL} dk.$$

où $I_\delta(k_0) = \left]-\pi, \pi\right[\setminus \left(\left]-k_0-\delta, -k_0+\delta\right[\cup \left]k_0-\delta, k_0+\delta\right[\right)$.

Remarque : Si $\rho_p = \rho_0$ alors $u_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi^2 - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_0} e^{ix\xi} d\xi$.

on a $u_\varepsilon \to u$ dans H^2_{loc} où

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \Bigg[\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi^2 - \omega^2\rho_0} e^{ix\xi} d\xi + i\pi \frac{\hat{f}(\omega\sqrt{\rho_0})\, e^{ix\omega\sqrt{\rho_0}}}{\omega\sqrt{\rho_0}} + i\pi \frac{\hat{f}(-\omega\sqrt{\rho_0})\, e^{-ix\omega\sqrt{\rho_0}}}{\omega\sqrt{\rho_0}} \Bigg]$$

Pour démontrer ces résultats le résultat principal est celui de

Théorème (Plemelj-Privalov) Soit $v \in C^1(-a,b)$ $a>0$ $b>0$

$$\int_{-a}^{b} \frac{v(t)}{t - i\varepsilon} dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \text{p.v.} \int_{-a}^{b} \frac{v(t)}{t} dt + i\pi v(0).$$

Preuve :
$$\left| \int_{-a}^{b} \frac{v(t)}{t-i\varepsilon} dt - \text{p.v.} \int_{-a}^{b} \frac{v(t)}{t} dt - i\pi v(0) \right| \leq \left| \int_{-a}^{b} \frac{v(t)\, t}{t^2+\varepsilon^2} dt - \text{p.v.} \int_{-a}^{b} \frac{v(t)}{t} \right| + \left| \int_{-a}^{b} \frac{v(t)\, i\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2} - i\pi v(0) \right|$$

$$\left|\int_{-a}^{b}\frac{v(t)\,t}{t^2+\varepsilon^2}\,dt - p.v\int_{-a}^{b}\frac{v(t)}{t}\right| = \left|\, p.v.\int_{-a}^{b}\frac{v(t)\,\varepsilon^2}{t(t^2+\varepsilon^2)}\right| = \left|\, p.v.\int_{-a}^{b}\frac{(v(t)-v(0))\,\varepsilon^2}{t(t^2+\varepsilon^2)}\right| + \left|\, p.v.\int_{-a}^{b}\frac{v(0)\,\varepsilon^2}{t(t^2+\varepsilon^2)}\right|$$

$t \longmapsto \dfrac{v(0)\,\varepsilon^2}{t(t^2+\varepsilon^2)}$ est impaire dc $p.v.\displaystyle\int_{-a}^{b}\frac{v(0)\,\varepsilon^2}{t(t^2+\varepsilon^2)} = \int_{a}^{b}\frac{v(0)\,\varepsilon^2\,dt}{t(t^2+\varepsilon^2)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ $\uparrow$ fi impaire

$$\left|\int_{-a}^{b}\frac{(v(t)-v(0))\,\varepsilon^2}{t(t^2+\varepsilon^2)}\right| \leq C_v\int_{-a}^{b}\frac{\varepsilon^2\,dt}{t^2+\varepsilon^2} = C_v\,\varepsilon\int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon}\frac{dt}{t^2+1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

$$\left|\int_{-a}^{b}\frac{v(t)\,i\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2} - i\pi\, v(0)\right| = \left|\int_{-a}^{b}\frac{(v(t)-v(0))\,\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2} + v(0)\left(\int_{-a}^{b}\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2} - \pi\right)\right|.$$

$$\leq \varepsilon\int_{-a}^{b}\frac{|v(t)-v(0)|}{t^\alpha}\,\frac{t^\alpha}{t^2+\varepsilon^2}\,dt + |v(0)|\underbrace{\left|\int_{-a/\varepsilon}^{b/\varepsilon}\frac{dt}{t^2+1} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}\right|}_{\downarrow\,\varepsilon\to 0 \;\; 0}$$

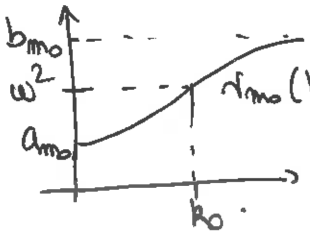
$$\| \quad C_v\,\varepsilon^\alpha\int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon}\frac{t^\alpha}{t^2+1}\,dt \quad (\alpha<1).$$

$$\downarrow \varepsilon\to 0$$

$$0$$

Preuve du théorème sur la lim de u_ε

$$\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\frac{f_{m_0}(k)\,\omega_{m_0}(\cdot,k)}{\lambda_{m_0}(k)-(\omega^2+i\varepsilon_\omega)}\,e^{ipk}\,dk = \int_{0}^{\pi/L} + \int_{-\pi/L}^{0}$$



soit $t = \lambda_{m_0}(k) - \omega^2$.

$k = \lambda_{m_0}^{-1}(t+\omega^2)$

$$\phi_{m_0}(\cdot,t) = f_{m_0}\left(\lambda_{m_0}^{-1}(t+\omega^2)\right)\omega_{m_0}\left(\cdot,\lambda_{m_0}^{-1}(t+\omega^2)\right)\, e^{ip\,\lambda_{m_0}^{-1}(t+\omega^2)}.$$

$$\int_{0}^{\pi/L} = \int_{a_{m_0}-\omega^2}^{b_{m_0}-\omega^2}\frac{\phi_{m_0}(\cdot,t)}{t-i\varepsilon_\omega}\left|\gamma_{m_0}'(t+\omega^2)\right|dt \qquad \text{où } \gamma_{m_0} = \lambda_{m_0}^{-1}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} p.v.\int_{a_{m_0}-\omega^2}^{b_{m_0}-\omega^2}\frac{\phi_{m_0}(\cdot,t)}{t}\left|\gamma_{m_0}'(t+\omega^2)\right|dt \quad \leftarrow \text{on refait ce chgt de variable } t=\lambda_{m_0}(k)-\omega^2$$

$$+\, i\pi\,\underbrace{\phi_{m_0}(\cdot,0)\left|\gamma_{m_0}'(\omega^2)\right|}_{\dfrac{f_{m_0}(k_0)\,\omega_{m_0}(\cdot,k_0)\,e^{ipk_0}}{|\lambda_{m_0}'(k)|}}$$

La solution définie par absorption limite pour

$$\omega^2 \notin \sigma_0 = \{ \lambda \,,\ \exists m\ \exists k\ \lambda_m(k)=\lambda \text{ et } \lambda_m'(k)=0 \}.$$
$$= \partial(\sigma(A)).$$

de
$$-\partial_x^2 u - \omega^2 \rho_p u = f \quad \text{avec } f \in L^2_c$$

et où $\omega^2 = \lambda_{m_0}(k_0)$

est donné par. $u = u_{evan} + u_{prop}$.

- $u_{evan} \in H^2(\mathbb{R})$ et $\hat{u}_{evan}(\cdot,k) = \displaystyle\sum_{m\neq m_0} \frac{\hat{f}_m(k)}{\lambda_m(k)-\omega^2}\, w_m(\cdot,k)$.
- $u_{prop} \in H^2_{loc}(\mathbb{R})$ et $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)$.

$$u_{prop}(x+p) = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}}\left[v.p \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{e^{ipkL}\hat{f}_{m_0}(k)\, w_{m_0}(\cdot,k)}{\lambda_{m_0}(k)-\omega^2}\,dk + i\pi \sum_{\pm} \frac{\hat{f}_{m_0}(\pm k_0)\, e^{\pm ipk_0L}\, w_{m_0}(\cdot,\pm k_0)}{|\lambda_{m_0}'(k_0)|}\right].$$

__Remarques__ :
- si $f \in L^2_c \Rightarrow k \mapsto \hat{f}(\cdot,k)$ C^∞ par rapport à k.

$\Rightarrow \hat{f}_{m_0}(k) = \left(\hat{f}(\cdot,k), w_{m_0}(\cdot,k)\right)_{L^2}$ C^∞ par rapport à k.

- si $f \in L^2_s \Leftrightarrow \int |f(x)|^2 (1+x^2)^s dx < +\infty$.

$f \in L^2_s \Rightarrow k \mapsto \hat{f}(\cdot,k) \in H^s\left(\left(-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\right), L^2\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)\right)$.

__Comportement de la solution physique ou sortante. quand $x \to \pm\infty$__

① $u_{evan} \in H^2(\mathbb{R})$ donc $u_{evan} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ et $\partial_x u_{evan} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$

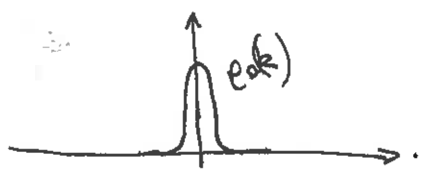
__Lemme__ : si $u \in H^1(\mathbb{R})$ alors u C^0 et $u \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$.

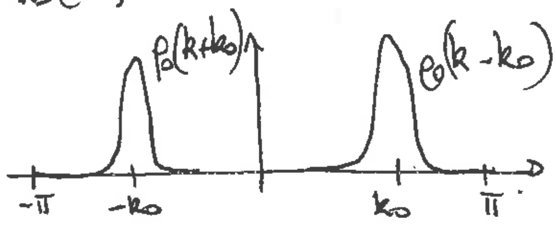
__Preuve__ : on écrit
$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)|\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|\hat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{1/2}}_{\|u\|_{H^1}} (1+\xi^2)^{-1/2}\,d\xi$$
$$\le \|\hat{u}(\xi)(1+\xi^2)^{1/2}\|_{L^2}\, \|(1+\xi^2)^{-1/2}\|_{L^2}$$

donc $\hat{u} \in L^1$ ce qui par le th. de Riemann Lebesgue nous donne que u C^0 et $u \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$.

② Soit
$$A(p) = v.p. \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{e^{ipk.L}\hat{f}_{m_0}(k)\, w_{m_0}(\cdot,k)}{\lambda_{m_0}(k)-\omega^2}\,dk.$$

soit





On pose $\chi_0(k) = 1 - \rho_d(k-k_0) - \rho_d(k+k_0)$.

$$A(p) = \underbrace{\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{f_{m_0}(k)\, w_{m_0}(\cdot,k)\, e^{ipk}}{\lambda_{m_0}(k)-\omega^2} \chi(k) e^{ipkL} dk}_{A_0(p)} + \underbrace{v.p.\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \cdots \rho(k-k_0)\, dk}_{A_+(p)} + \underbrace{v.p.\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \cdots \rho(k+k_0)\, dk}_{A_-(p)}$$

Rappel. (Th. de Riemann Lebesgue) si $\psi \in L^1(\mathbb{R},x)$ $\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{i\lambda x} dx = 0$.

Proposition 1 : $A_0(p) \xrightarrow[p\to\pm\infty]{} 0$. (la fonction à intégrer est continue donc L^1).

$$A_+(p) = v.p. \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{\phi_{m_0}(\cdot,k)}{\lambda_{m_0}(k)-\lambda_{m_0}(k_0)} \rho(k-k_0) e^{ipkL} dk. \quad \text{avec } \phi_{m_0}(\cdot,k) = f_{m_0}(k)\, w_{m_0}(\cdot,k)$$

Remarquons que $\lambda_{m_0}(k) - \lambda_{m_0}(k_0) \underset{k\to k_0}{\sim} \lambda_{m_0}'(k_0)(k-k_0)$

$$A_+(p) = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{\phi_{m_0}(\cdot,k) - \phi_{m_0}(\cdot,k_0)}{\lambda_{m_0}(k)-\lambda_{m_0}(k_0)} \rho(k-k_0) e^{ipkL} dk \xrightarrow{p\to\pm\infty} 0 \text{ (Riemann Lebesgue)}$$

$$+ \phi_{m_0}(\cdot,k_0)\; v.p. \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{k-k_0}{\lambda_{m_0}(k)-\lambda_{m_0}(k_0)} \frac{\rho(k-k_0)}{k-k_0} e^{ipkL} dk$$

Lemme : $\psi \in \mathcal{C}_c^1$ $\quad \lim_{\lambda\to+\infty} v.p. \int \frac{e^{i\lambda x}}{x} \psi(x)\, dx = i\pi \psi(0)$

Preuve du lemme. $v.p. \int_{-A}^{A} \frac{e^{i\lambda x}}{x} \psi(x)\, dx = \underbrace{\int_{-A}^{A} \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x} e^{i\lambda x} dx}_{\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0} + \psi(0)\, v.p. \int_{-A}^{A} \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx$

$$v.p. \int_{-A}^{A} \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx = i\, v.p. \int_{-A}^{A} \frac{\sin \lambda x}{x} = i \int_{-\lambda A}^{\lambda A} \frac{\sin u}{u} du.$$

$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin u}{u} du = \pi$ car $\int_{-M}^{M} \frac{\sin u}{u} du = \int_{-M}^{M} du \sin u \int_0^{+\infty} e^{-ut} dt = 2\int_0^M \int_0^{+\infty} \sin u\, e^{-ut} dt\, du$

$$= 2\,\mathrm{Im} \int_0^{+\infty} \int_0^{M} e^{iu} e^{-tu} du\, dt = 2\,\mathrm{Im} \int_0^{+\infty} \frac{e^{(i-t)M} - 1}{i-t}$$

$$\xrightarrow[M\to+\infty]{} -2\,\mathrm{Im} \int_0^{+\infty} \frac{-(i+t)\,dt}{1+t^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

Application du lemme . $\displaystyle v.p. \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{\varphi(k-k_0)}{k-k_0} \frac{k-k_0}{\lambda_{m_0}(k)-\lambda_{m_0}(k_0)} e^{ip(k-k_0)L} dk\, e^{ipk_0L}$

$$= e^{ipk_0L}\, v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \frac{\xi}{\lambda_{m_0}(\xi+k_0)-\lambda_{m_0}(k_0)}$$

$$\longrightarrow i\pi \frac{e^{ipk_0L}}{\lambda'_{m_0}(k_0)} \quad \text{d'après le lemme.}$$

On a donc $\displaystyle A\pm(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} i\pi \frac{e^{\pm ipk_0L}}{\lambda'_{m_0}(\pm k_0)} \phi_{m_0}(\cdot, \pm k_0)$.

Donc $\displaystyle u_{prop}(x+pL) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\, i\pi \Big[\sum_{\pm} \frac{e^{\pm ipk_0L}}{\lambda'_{m_0}(\pm k_0)} \phi_{m_0}(x, \pm k_0) + \sum_{\pm} \frac{e^{\pm ipk_0L}}{|\lambda'_{m_0}(k_0)|} \phi_{m_0}(x, \pm k$

Cas 1 : $\lambda'_{m_0}(k_0) > 0$. $\lambda'_{m_0}(k_0) = |\lambda'_{m_0}(k_0)|$ et $\lambda'_{m_0}(-k_0) = -|\lambda'_{m_0}(k_0)|$
par parité de λ_{m_0}.

$$u_{prop}(x+pL) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\, 2i\pi \frac{e^{ipk_0L}}{|\lambda'_{\lambda}(k_0)|} f_{m_0}(k_0)\, w_{m_0}(x, k_0)$$

Cas 2. $\lambda'_{m_0}(-k_0) > 0$

$$u_{prop}(x+pL) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\, 2i\pi \frac{e^{-ipk_0L}}{|\lambda'(k_0)|} f_{m_0}(-k_0)\, w_{m_0}(x, -k_0).$$

et en utilisant des arg similaires.

Cas 1 : $\displaystyle u_{prop}(x+pL) \xrightarrow[p\to-\infty]{} \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\, 2i\pi \frac{e^{-ipk_0L}}{|\lambda'_{m_0}(k_0)|} f_{m_0}(-k_0)\, w_{m_0}(x, -k_0)$.

Cas 2 : $\displaystyle u_{prop}(x+pL) \xrightarrow[p\to-\infty]{} \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\, 2i\pi \frac{e^{ipk_0L}}{|\lambda'_{m_0}(k_0)|} f_{m_0}(k_0)\, w_{m_0}(x, +k_0)$

On peut donc définir une condition de radiation.

Definition : u satisfait une condition de radiation sortante ssi

$\exists u^\pm$ tq. $\forall p\in\mathbb{Z}$ $\forall x\in(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ $\quad u(x+pL) = u^\pm w_m(x, \pm\xi)\, e^{\pm ip\xi L} + v^\pm(x+pL)$

avec $m, \xi \in [-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}[$ tq $\lambda_m(\xi) = \omega^2$ et $\lambda'_m(\xi) > 0$

et $v^\pm$ et $\displaystyle \frac{\partial v^\pm}{\partial x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$

Théorème : Supposons $\omega^2 \notin \sigma_0$.
Il existe une unique solution de :
$$-\Delta u - \rho_p \omega^2 u = f.$$
qui satisfait la condition de radiation

Preuve : + existence : la sol° def par absorption limite.
+ unicité : soit u solution de.
$$-\Delta u - \rho_p \omega^2 u = 0.$$
et on suppose qu'il existe $u^\pm$ tel que $w_m(x+pL, \pm\xi)$.
$$u(x+pL) = u^\pm w_m(x, \pm\xi)\, e^{\pm i p \xi L} + v^\pm(x+pL) \quad (CR\pm)$$
$$0 = \int_{-NL-L/2}^{NL+L/2} (-\Delta u - \rho_p \omega^2 u)\,\bar{u} = \left[-\frac{\partial u}{\partial x}\bar{u}\right]_{-NL-L/2}^{NL+L/2} + \int_{-LN-L/2}^{NL+L/2} \nabla u \nabla \bar{u} - \rho_p \omega^2 u \bar{u}$$
$$= \left[-\frac{\partial u}{\partial x}\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} u\right]_{-NL-L/2}^{NL+L/2} + \int_{-NL-L/2}^{NL+L/2} u\,\underbrace{(-\Delta \bar{u} - \rho_p \omega^2 \bar{u})}_{0}.$$

Soit $q(x_0, u, v) = u(x_0)\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}(x_0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0)\,\bar{v}(x_0)$.

On vient de montrer que $q(NL+\frac{L}{2}, u, u) = q(-NL-\frac{L}{2}, u, u)$ (egalité des flux)

En utilisant (CR+) on montre que.
$$q(NL+\tfrac{L}{2}, u, u) = q(NL+\tfrac{L}{2}, w_m(\cdot,+\xi), w_m(\cdot\xi))\, u^+ \bar{u}^+$$
$$+ q(NL+\tfrac{L}{2}, w_m(\cdot,+\xi), v^+)\,u^+ + \bar{u}^+ q(NL+\tfrac{L}{2}, v^+, w_m(\cdot,+\xi))$$
$$+ q(NL+\tfrac{L}{2}, v^+, v^+).$$

(1) Comme v^+ et $\partial_x v^+ \xrightarrow[\infty]{} 0$ en $+\infty$, les 3 derniers termes tendent vers 0 qd $N \to +\infty$.

(2) $q(NL+\frac{L}{2}, w_m(\cdot,+\xi), w_m(\cdot,\xi)) = w_m(\frac{L}{2},\xi)\, e^{iNL\xi}\, \frac{\partial \overline{w_m}}{\partial x}(\frac{L}{2},\xi)\, e^{-iNL(\xi)} - \overline{w_m}(\frac{L}{2},\xi)\frac{\partial w_m}{\partial x}(\frac{L}{2},\xi)$
$$= q(\tfrac{L}{2}, w_m(\cdot,\xi), w_m(\cdot,\xi)).$$

Lemme : $q(\frac{L}{2}, w_m(\cdot,\xi), w_m(\cdot,\xi)) = i\lambda_m'(\xi)$.

Preuve : Rappelons le pb satisfait par $w_m(\cdot, k)$.
$$\begin{cases} -\Delta w_m(\cdot,k) - \lambda_m(k)\,\rho_p\, w_m(\cdot,k) = 0 \\ w_m(\frac{1}{2},k) = e^{ikL}\, w_m(-\frac{1}{2},k) \\ \partial_x w_m(\frac{1}{2},k) = e^{ikL}\, \partial_x w_m(-\frac{1}{2},k) \end{cases}$$

Si on dérive par rapport à k et on prend la valeur en $k=\xi$, on trouve

$$\begin{cases} -\Delta \partial_k w_m(\cdot,\xi) - \lambda_m(\xi) e_p(x)\, \partial_k w_m(\cdot,\xi) = \lambda_m'(\xi)\, w_m(\cdot,\xi)\, e_p(x) \\ \partial_k w_m\left(\frac{L}{2},\xi\right) = e^{i\xi L}\partial_k w_m\left(-\frac{L}{2},\xi\right) + iL e^{i\xi L} w_m\left(-\frac{L}{2},\xi\right) \\ \partial_x\left(\partial_k w_m\left(\frac{L}{2},\xi\right)\right) = e^{i\xi L}\partial_x\left(\partial_k w_m\left(-\frac{L}{2},\xi\right)\right) + iLe^{i\xi L}\partial_x w_m\left(-\frac{L}{2},\xi\right) \end{cases}$$

En utilisant une formule de Green on a:

$$0 = \int_{-L/2}^{L/2} \left(-\Delta w_m(\cdot,\xi) - \lambda_m(\xi) e_p\, w_m(\cdot,\xi)\right) \overline{\partial_k w_m(\cdot,\xi)}$$

$$= q\left(\frac{L}{2}, w_m(\cdot,\xi), \partial_k w_m(\cdot,\xi)\right) - q\left(-\frac{L}{2}, w_m(\cdot,\xi), \partial_k w_m(\cdot,\xi)\right)$$

(1) $$- \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} w_m(\cdot,\xi)\, \underbrace{\overline{\left(-\Delta - \lambda_m(\xi) e_p\right)\partial_k w_m(\cdot,\xi)}}_{= \lambda_m'(\xi)\, \overline{w_m(\cdot,\xi)}\, e_p(x)}}_{\lambda_m'(\xi)}$$

De plus.

$$q\left(\frac{L}{2}, w_m(\cdot,\xi), \partial_k w_m(\cdot,\xi)\right) = \partial_x \overline{\partial_k w_m\left(\frac{L}{2},\xi\right)}\, w_m\left(\frac{L}{2},\xi\right) - \partial_x w_m\left(\frac{L}{2},\xi\right) \overline{\partial_k w_m\left(\frac{L}{2},\xi\right)}$$

$$= \left[e^{-i\xi L}\overline{\partial_x \partial_k w_m\left(-\frac{L}{2},\xi\right)} - iLe^{-i\xi L}\overline{\partial_x w_m\left(-\frac{L}{2},\xi\right)}\right]\left[e^{i\xi L} w_m\left(-\frac{L}{2},\xi\right)\right]$$

(2) $$- \left[e^{i\xi L}\partial_x w_m\left(-\frac{L}{2},\xi\right)\right]\left[e^{-i\xi L}\overline{\partial_k w_m\left(-\frac{L}{2},\xi\right)} - iLe^{-i\xi L}\overline{w_m\left(-\frac{L}{2},\xi\right)}\right]$$

$$= q\left(-\frac{L}{2}, w_m(\cdot,\xi), \partial_k w_m(\cdot,\xi)\right) - iL\, q\left(-\frac{L}{2}, w_m, w_m\right)$$

(1) et (2) nous donnent. $-iL\, q\left(-\frac{L}{2}, w_m, w_m\right) = \lambda_m'(\xi)$

$$\boxed{q\left(\frac{L}{2}, w_m, w_m\right) = \frac{i}{L}\lambda_m'(\xi)}$$

$$q\left(NL + \frac{L}{2}, u, u\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{i}{L}\lambda_m'(\xi)\,|u^+|^2.$$

$$q\left(-NL - \frac{L}{2}, u, u\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{i}{L}\lambda_m'(-\xi)\,|u^-|^2.$$

L'égalité des flux nous donne $\frac{i}{L}\lambda_m'(\xi)\,|u^+|^2 - \frac{i}{L}\lambda_m'(-\xi)|u^-|^2 = 0$

soit $|u^+|^2 + |u^-|^2 = 0 \Rightarrow |u^+| = u^- = 0$.

On a donc $u \in H^2$ solution de $-\Delta u - e_p \omega^2 u = 0$. avec $\omega^2 \in \sigma(A_p)$

on a vu que A n'a pas de spectre ponctuel donc $\underline{u=0}$