Cours 2. Théorie Spectrale et Bandes spectrales

I. Rappel sur la TFB.

$$\mathcal{F}_L \quad \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(K), \quad , \quad K = \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right).$$

$$u \longmapsto \hat{u} \quad \hat{u}(x,k) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} u(x+mL)\, e^{-imkL}$$

Rq: $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u} \in \mathcal{C}^\infty(K)$

$$\hat{u}\left(\frac{L}{2}, k\right) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} u\left(\frac{L}{2}+mL\right) e^{-imkL} \quad \forall k$$

$$= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} u\left(-\frac{L}{2}+(m+1)L\right) e^{-imkL} \quad \forall k$$

$$= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} u\left(-\frac{L}{2}+mL\right) e^{-imkL}\right] e^{ikL}$$

$$= \hat{u}\left(-\frac{L}{2}, k\right) e^{ikL}$$

De même $\quad \partial_x^p \hat{u}\left(\frac{L}{2}, k\right) = \partial_x^p \hat{u}\left(-\frac{L}{2}, k\right) e^{ikL}$

donc $\hat{u} \in \mathcal{C}^\infty_{QP}(K) = \{ \hat{u} \in \mathcal{C}^\infty(K), \ \forall k \ \hat{u}(\cdot,k) \ k-QP \}$.

TFB inverse : $\quad u(x+mL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{u}(x,k)\, e^{+imkL}\, dk \quad \forall x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \ \forall m \in \mathbb{Z}$

u est donc construit morceaux par morceaux $\left(-\frac{L}{2} \ldots \frac{L}{2}+mL\right)$

$-\frac{L}{2}+mL \qquad +\frac{L}{2}+mL \qquad \frac{L}{2}+(m+1)L$

$$u\left(\left(\frac{L}{2}+mL\right)^-\right) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \underbrace{\hat{u}\left(\frac{L}{2}, k\right)} e^{+imkL}\, dk$$

$$u\left(\left(\frac{L}{2}+mL\right)^+\right) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \underbrace{\hat{u}\left(-\frac{L}{2}, k\right) e^{ikL}} e^{imkL}\, dk.$$

u est continue en chaq pt $\frac{L}{2}+mL$ si $\hat{u}\left(\frac{L}{2}, k\right) = \hat{u}\left(-\frac{L}{2}, k\right) e^{ikL} \ \forall k$

$\partial_x u$ - - - - - - - - - - si $\partial_x \hat{u}$ - - -

+ $\mathcal{F}_L : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(K)$ isométrie isomorphisme.

* $\mathcal{F}_L : H^1(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{1,0}(K) = L^2\left(\left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right); H^1\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right)$

$$= \left\{ \hat{u} \in L^2(K), \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \int_{-L/2}^{L/2} |\hat{u}|^2 + \left|\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right|^2 < +\infty \right\}$$

Ce n'est pas un isomorphisme.

En effet $\forall \hat{u} \in H^{1,0}(K)$, $\mathcal{F}_L^{-1} \hat{u} = u \in L^2(\mathbb{R})$

$$u(x+mL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{u}(x,k)\, e^{imkL}\, dk \quad \forall x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \ \forall m \in \mathbb{Z}$$

u est $H^1\left(-\frac{L}{2}+mL, \frac{L}{2}+mL\right) \ \forall m$

u sera H^1 si u C^0 en chaque pt $\frac{L}{2}+mL$ si $\hat{u}(\cdot, k)$ kQP $\forall k$.

$\mathcal{F}_L : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{1,0}_{QP}(K)$ est un isomorphisme.

avec $H^{2,0}_{QP}(K) = \{ \hat{u} \in H^{1,0}(K),\ \text{p.p } k.\ \hat{u}(\cdot,k) \in H^1_k(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}) \}$

$$H^1_k\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right) = \left\{ w \in H^1\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right),\ w\left(\frac{L}{2}\right) = e^{ikL} w\left(-\frac{L}{2}\right) \right\}$$

<u>Rq</u> : $H^1_k(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})$ est fermé ds $H^1(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})$ donc muni de la norme $\| \ \|_{H^1}$ c'est un espace de Hilbert

* $\mathcal{F}_L : H^2(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{2,0}_{QP}(K)$ isométrie isomorphisme

$$H^{2,0}_{QP}(K) = \left\{ \hat{u} \in H^{2,0}(K),\ \text{p.p } k\ \hat{u}(\cdot,k) \in H^2_k\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right) \right\}.$$

$$H^2_k\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right) = \left\{ w \in H^2\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right), \partial_x w\left(\frac{L}{2}\right) = e^{ikL} \partial_x w\left(-\frac{L}{2}\right) \right\}$$
$$w \in H^1_k\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)$$

<u>Application</u> : Soit $u_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$ solution de $\quad (0 < e^- \leq e_p(x) \leq e^+ < +\infty)$

$$-\Delta u_\varepsilon - e_p(x)(\omega^2 + i\varepsilon) u_\varepsilon = f \text{ dans } \mathbb{R}.\ \text{avec } e_p\ L \text{ per.}$$

Si on applique la TFB $\cdot \mathcal{F}_L$.

$\forall k$, $\hat{u}_\varepsilon(\cdot,k)$ solution dans $H^2_k(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})$ de

$$-\Delta \hat{u}_\varepsilon(\cdot,k) - e_p(x)(\omega^2 + i\varepsilon)\, \hat{u}_\varepsilon(\cdot,k) = \hat{f}(\cdot,k) \text{ ds } \left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)$$

Soit $\begin{cases} \hat{A}(k) = -\dfrac{1}{e_p}\Delta \\ D(\hat{A}(k)) = H^2_k\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right) \end{cases}$

$$\hat{A}(k)\, \hat{u}_\varepsilon(\cdot,k) - (\omega^2 + i\varepsilon)\, \hat{u}_\varepsilon(\cdot,k) = \hat{f}(\cdot,k)$$

Que faire maintenant ?

Si A est une matrice sym réelle, et u solution de.

$$Au - \lambda u = f.$$

$\lambda_1 \leq \dots \lambda_N$ les val prop de A $(u_1 \dots u_N)$ vect prop associés.

$$\lambda \neq \lambda_k \Rightarrow \quad u = \sum_{j=1}^{N} \frac{(f, u_k)}{\lambda - \lambda_k} u_k$$

On va généraliser ce genre de décomposition et plus généralement la notion de spectre aux opérateurs étudiés.

II Quelques éléments de théorie spectrale

1. Opérateurs bornés, non bornés fermés

Soit H un espace de Hilbert.

- On dit que A est <u>borné</u> si $\exists c, \forall u \in D(A)$ $\|Au\|_H \leq c \|u\|_H$. $\forall u \in D(A)$.

borné = continu.

<u>exemple</u> : $H = L^2(\Omega)$, $f \in L^\infty(\Omega)$ $\quad Au = fu \quad \forall u \in L^2$. A borné.

- On dit que A est <u>non borné</u> si il n'existe pas de constante c c.à.d si $\exists (u_n) \in D(A)$ tq $\|u_n\|_H = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|Au_n\|_H = +\infty$

<u>exemple</u> : $H = L^2(\mathbb{R})$, $Au = -\frac{d^2}{dx^2}$ $\quad D(A) = H^2(\mathbb{R})$ dense ds $L^2(\mathbb{R})$. A non borné.

- On dit que A est <u>fermé</u> si $G(A) = \{(u, Au), u \in D(A)\}$ fermé dans $H \times H$.

si pour toute suite $u_n \in D(A)$ tq $u_n \to u$ dans H et $Au_n \to v$ dans H on a $u \in D(A)$ et $Au = v$

ssi $D(A)$ muni de la norme du graphe $\|u\|^2_{D(A)} = \|u\|^2_H + \|Au\|^2_H$ est un espace de Hilbert.

<u>exemple</u> : • tout opérateur borné avec $D(A) = H$ est fermé.

• $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ est un op. fermé.

<u>Lemme</u> : si A est fermé $(A : D(A) \subset H \to H)$ et bijectif de $D(A)$ dans H alors A^{-1} est fermé.

<u>Théorème du graphe fermé (Banach)</u> Soit A un opérateur de H dans H dont le domaine est H et qui est un opérateur fermé alors A est borné de H ds H.

<u>Théorème</u> : Soit A un op. de $D(A) \subset H \to H$, bijectif de $D(A)$ dans H alors A^{-1} est borné de H dans H.

2. Spectre pour les op. fermés.

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur fermé de domaine dense.

<u>Definition</u>. Ens résolvant $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I$ inversible (l'inverse est borné)$\}$

$\forall \lambda \in \rho(A)$, $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ la résolvante.

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

<u>Lemme</u> : $\rho(A)$ ouvert. ($\sigma(A)$ est fermé)

<u>Preuve</u> $\lambda \in \rho(A)$, $A - \xi Id = (A - \lambda Id)(I + (\lambda - \xi) R(\lambda))$

$A - \xi Id$ inversible dès que $|\lambda - \xi| < \frac{1}{\|R(\lambda)\|}$

<u>Remarque</u> : $\lambda \in \rho(A) \Rightarrow \exists c > 0$ $\forall u \in D(A)$. $\|u\|_H \leq c \|Au - \lambda u\|_H$ ($(A - \lambda Id)^{-1}$ est borné).

$\exists (u_n)_n \in D(A)^{\mathbb{N}}$ tq $\|u_n\|_H = 1$ et $\|Au_n - \lambda u_n\|_H \to 0$ $\Rightarrow$ $\lambda \in \sigma(A)$.

On verra que pour les opérateurs autoadjoints il y a équivalence

Définition du spectre : $\lambda \in \sigma(A)$

(i) si $(A-\lambda Id)$ n'est pas injectif. alors λ est une **valeur propre**.

$\ker(A-\lambda Id)$ est le sous espace propre associé.

λ est dans le **spectre ponctuel** (σ_p)

(ii) $(A-\lambda Id)$ inj mais pas surj.

(a) $\overline{Im(A-\lambda Id)} = H$ $\lambda \in$ spectre continu (σ_c)

(b) $Im(A-\lambda Id)$ fermé $\lambda \in$ spectre résiduel (σ_r)

$$\boxed{\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)}$$

3. Opérateurs adjoints - opérateurs autoadjoints.

Definition : Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un op. dont le domaine est dense dans H.

On appelle A^* l'opérateur $D(A^*) \subset H \to H$ défini par :

$$\begin{cases} D(A^*) = \{ v \in H \text{ tq } \exists w \in H \ (v, Au) = (w, u) \ \forall u \in D(A) \} \\ A^* v = w \end{cases}$$

L'unicité de w vient de la densité de $D(A)$ dans H

$D(A^*)$ est un sous espace vectoriel de H et A^* un op. linéaire.

Proposition : * A borné $\Rightarrow$ A^* borné et $\|A\| = \|A^*\|$.

* A^* est fermé. * A fermé $\Rightarrow$ $D(A^*)$ dense dans H.

Définition : * $A : D(A) \subset H \to H$ est symétrique si $\forall u, v \in D(A)$ $(Au, v) = (u, Av)$

si A est de domaine dense, A adjoint, si A est symétrique $D(A) \subset D(A^*)$.

si A est sym et borné $D(A) = D(A^*)$.

* Un opérateur $A : D(A) \subset H \to H$ de domaine dense est autoadjoint si $A^* = A$ ($D(A) = D(A^*)$ et $Au = A^*u$ $\forall u \in D(A)$).

⚠ sym $\not\Leftrightarrow$ autoadj si l'op. borné sym $\Leftrightarrow$ autoadj.

Pour montrer qu'un op sym est autoadj, on utilisera le résultat suivant

Théorème : Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un op. symétrique tel que $Im(A+I) = H$ alors le domaine de A est dense et A est autoadj.

Preuve : * On va montrer que $D(A)^\perp = \{0\}$. Soit $w \in D(A)^\perp$, $\exists z$ tq $Az + z = w$

$\forall u \in D(A)$ $0 = (w, u) = (Az + z, u) = (z, Au + u)$ $z \in Im(A+I)^\perp = \{0\}$ $\Rightarrow w = 0$

* Il suffit de prouver $D(A^*) \subset D(A)$ pour montrer que A est autoadj.

Soit $v \in D(A^*)$, $\exists z \in D(A)$ tq $Az + z = A^*v + v$

$\forall u \in D(A)$ $(v, Au + u) = (A^*v + v, u) = (Az + z, u) \overset{A \text{ sym}}{=} (z, Au + u)$ $\Rightarrow \left| \begin{array}{l} v = z \\ v \in D(A) \end{array} \right.$

exemple : * $A = -\Delta$ $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$ A autoadjoint

* $A = -\Delta$ $D(A) = \{u \in H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0\}$ autoadjoint.
* $A = -\Delta$ $D(A) = \{u \in H^2(\Omega), u|_\Gamma = 0\}$ autoadjoint
* $A = -\Delta$ $D(A) = \{u \in H^2(\Omega), u|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0\}$ sym mais pas autoadj

on montre que $D(A^*) = H^2(\Omega)$.

4. Théorie spectrale des op. autoadjoints.

Soit $A : D(A) \subset H \to H$. un op autoadj.

Supposons $u \in D(A)$, $u \neq 0$ $Au = \lambda u$. alors $(Au, u)_H = \lambda \|u\|_H^2$ et $(Au,u)_H = (u, Au)_H = \overline{(Au,u)_H}$

donc $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nous allons voir que tout le spectre est réel.

Théorème : soit $A : D(A) \subset H \to H$ autoadj alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Preuve : Soit $\lambda \notin \mathbb{R}$ $\forall u \in D(A)$ $|(Au - \lambda u, u)_H|^2 = |(Au,u) - \mathrm{Re}\,\lambda \|u\|_H^2|^2 + |\mathrm{Im}\,\lambda|^2 \|u\|_H^4$

$$|(Au - \lambda u, u)_H|^2 \leq \|Au - \lambda u\|_H^2 \|u\|_H^2$$

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\,\lambda|} \|Au - \lambda u\|_H \quad (*)$$

$(*) \Rightarrow$ $A - \lambda Id$ inj.

$(*) \Rightarrow$ * $\mathrm{Im}(A - \lambda Id)$ fermée : (v_n) suite de $\mathrm{Im}(A - \lambda Id)$ tq $v_n \to v$ ds H
$\exists u_n$, $Au_n - \lambda u_n = v_n$. D'après $(*)$, (u_n) est une suite de Cauchy dans H donc elle cv vers u
comme A est fermé $Au - \lambda u = v$ $v \in \mathrm{Im}(A - \lambda Id)$

On a également
$$\|u\|_H \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\,\lambda|} \|Au - \bar{\lambda} u\|_H \quad (**)$$

$(**) \Rightarrow$ * $\mathrm{Im}(A - \lambda Id)$ dense : $\ker(A - \bar{\lambda} u) = \{0\}$
$\ker(A^* - \bar{\lambda} Id)^\perp = \overline{(\mathrm{Im}(A - \lambda Id))} = H$
(on montre facilement que $\ker A^* = \mathrm{Im}\,A^\perp$
et $(F^\perp)^\perp = \bar{F}$

On a donc $A - \lambda Id$ surj.

Corollaire - Soit $A : D(A) \subset H \to H$ autoadj. $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Preuve : soit $\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ $\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda Id)} = \ker(A - \lambda Id)^\perp$
si $\lambda \notin \sigma_p(A)$ alors l'image de $(A - \lambda Id)$ est nécessairement dense.

Théorème - $A : D(A) \subset H \to H$ autoadj alors
$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists (u_n)_n \in D(A)^{\mathbb{N}}$ tq $\|u_n\|_H = 1$ et $\|Au_n - \lambda u_n\|_H \longrightarrow 0$.

Preuve $\Leftarrow$ vrai pour les op fermés de domaine dense
$\Rightarrow$ $\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ si $\forall u \in D(A)$ $\|u\|_H \leq C \|A - \lambda Id\|_H$ $\Rightarrow$ $A - \lambda Id$ inj et surj
donc $\lambda \notin \sigma(A)$ contradiction

Corollaire : $\Theta(A)$ l'image numérique de A définie par :

$$\Theta(A) = \{ (Au,u)_H \ ,\ u \in D(A),\ \|u\|_H = 1 \}.$$

alors $\sigma(A) \subset \overline{\Theta(A)}$

Preuve : Soit $\lambda \in \sigma(A)$, $\exists U_n \in D(A)^{\mathbb{N}}$ $\|U_n\|_H = 1$ $\|AU_n - \lambda U_n\|_H \Rightarrow 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (AU_n, U_n)_H = \lambda$ donc $\lambda \in \overline{\Theta(A)}$

Lemme (admis) : $A : D(A) \subset H \to H$ autoadj et soit $\lambda \in \rho(A)$ alors :

$$\|(A - \lambda Id)^{-1}\| = \frac{1}{dist(\lambda, \sigma(A))}$$

Rappel Op compact : Soit A un op linéaire borné de H dans H, il est compact ssi de toute suite bornée (U_n) de H, on peut extraire une sous suite $(U_{n'})$ tq $(AU_{n'})$ converge dans H.

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un op. non borné. Alors A est dit à résolvante compacte ssi $\exists \lambda \in \rho(A)$ tq $(A - \lambda Id)^{-1}$ est compact.

Théorème (admis). Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un op autoadj borné inférieurement (càd $\exists c$ $\forall u \in D(A)$ $(Au,u)_H \geq c\|u\|_H^2$) et à résolvante compacte. Alors il existe une base hilbertienne de H : $\{ \omega_m \in D(A),\ m \geq 1 \}$ et une suite de réels $(\lambda_m)_{m\geq 1}$ tq

$$\begin{cases} c \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_m & < +\infty \\ \lim\limits_{m\to+\infty} \lambda_m = +\infty \\ A\omega_m = \lambda_m \omega_m \end{cases}$$

De plus, les valeurs propres λ_m admettent la caractérisation suivante :

$$\lambda_m = \min_{\substack{V_m \in \underbrace{\mathcal{V}_m(D(A))}_{\text{ens de sev de } D(A) \text{ de dim } m}}} \ \max_{u \in V_m} \ \frac{(Au,u)_H}{\|u\|_H^2}.$$

Application : $\begin{cases} \hat{A}(k) = -\dfrac{1}{\rho_p} \Delta \\ D(\hat{A}(k)) = H_k^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \end{cases}$ $\quad H = L_\rho^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$. $(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \rho u \bar{v}$

$\forall k \in \left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right)$, $\hat{A}(k)$ est autoadjoint, borné inférieurem^t (≥ 0) et à résolvante compacte.

On a donc

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_1(k) \leq \lambda_2(k) \leq \dots \lambda_m(k) \dots \\ \lim\limits_{m\to+\infty} \lambda_m(k) = +\infty \\ A(k)\, \omega_m(\cdot,k) = \lambda_m(k)\, \omega_m(\cdot,k) \end{cases}$$

$\{ \omega_m(\cdot,k),\ m \geq 1 \}$ base hilbertienne de $L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$.

Preuve : (k) $\forall u, v \in D(A(k))$, $(A(k)u, v)_{L^2_\ell} = -\int_{-L/2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v = (u, A(k)v)_{L^2_\ell}$

$A(k)$ est symétrique

* $\operatorname{Im}(A(k) + Id) = L^2_\ell$.

En effet, le problème $\begin{cases} A(k)u + u = f & \forall f \in L^2 \\ u \in D(A(k)) \end{cases}$ est bien posé d'après le théorème de Lax Milgram.

$A(k)$ est donc autoadjoint

* $(A(k)u, u) \geq 0$.

* $A(k) + Id$ est inversible $(-1 \in \rho(A(k)))$.

$(A(k) + Id)^{-1}$ est compact : Soit $f_n \in L^2$ borné, on appelle $u_n \in D(A(k))$ l'unique solution de $A(k)u_n + u_n = f_n$.

la suite (u_n) est donc bornée dans $D(A(k)) = H^2_k\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$

Comme $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ est borné, d'après le théorème de Rellich, on peut extraire une sous suite (u_n') qui converge dans $L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$

c'est à dire $(A(k) + Id)^{-1} f_n'$ cv dans L^2

donc $(A(k) + Id)^{-1}$ est compacte

On a $$\lambda_m(k) = \min_{V_m \in \mathcal{O}_m(D(A(k)))} \max_{u \in V_m} \frac{(A(k)u, u)_H}{\|u\|_H^2}$$

Proposition : $\forall m$, $k \longmapsto \lambda_m(k)$ sont Lipschitziennes, $\frac{2\pi}{L}$-périodique et paire.