Séance 3 : Theorème de Lax-Milgram

`Dans l'exercice 1, nous montrons que la coercivité implique le caractère défini positif d'une forme bilinéaire et que, dans le cas de la dimension infinie, il n'y a pas équivalence .`

`Dans les exercice 2, 3 et 4, nous étudions le laplacien avec des conditions de type Dirichlet, Fourier et Neumann. Dans chacune de ces situations, nous cherchons à appliquer le théorème de Lax Milgram. Pour cela nous utilisons des inégalités de type Poincaré que nous démontrons dans des configurations simples.`

`Dans l'exercice 5, qui est considéré comme hors programme mais qui peut être fait pour aller plus loin, nous démontrons des inégalités de type Poincaré dans des ouverts bornés connexes` Ω `de` $\mathbb{R}^n$`. On utilise pour cela un théorème important d'analyse (admis), le théorème de Rellich.`

Exercice 1 Etude élémentaire de la coercivité
Soit V muni de la norme $\|\cdot\|_V$ un espace de Hilbert réel, et a une forme bilinéaire et continue de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$.

Question 0. On dit que a est *coercive* si

(a) $\forall v \in V \setminus \{0\}, \quad a(v,v) > 0$

(b) $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall v \in V,\ a(v,v) \geq \alpha ||v||_V^2$

(c) $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall u, v \in V,\ a(u,v) \geq \alpha ||u||_V ||v||_V$.

Question 1. En dimension finie. Si $V = \mathbb{R}^N$, établir que a définie-positive équivaut à a coercive.

Question 2. En dimension infinie.
(a) Que se passe-t-il si V est de dimension infinie ?
(b) Montrer notamment que pour $V = H^1(]0,1[)$, la forme bilinéaire a définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$$

est définie positive mais n'est pas coercive.

Question 3. Soit $V = H^1(]0,1[)$ et la forme bilinéaire a continue de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - \omega^2 \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que ni a ni $-a$ ne sont coercives.

Indication pour Q2-(b) et Q3 : utiliser comme fonction test $u = \cos(n\pi x)$ pour différentes valeurs de n

Exercice 2 Inégalités de Poincaré et laplacien avec conditions de Dirichlet

Question 1. Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\ \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq C_1 \left\{ \|v'\|_{L^2(]0,1[)} + |v(0)| \right\}.$$

Question 2. On considère le domaine $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une constante $C_p > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \left[\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \right]. \tag{1}$$

Question 3. On admet que cette inégalité est vraie quel que soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Que devient cette inégalité dans $H^1_0(\Omega)$? En déduire que la semi-norme H^1 définie par

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad |v|_{H^1} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}$$

est équivalente à la norme H^1 dans $H^1_0(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad C_1 \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq |v|^2_{H^1} \leq C_2 \|v\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{2}$$

Question 4. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière"et un terme source $f \in L^2(\Omega)$.
On considère le problème aux limites
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{3}$$

Construire la formulation variationnelle de ce problème et montrer que le théorème de Lax Milgram s'applique. Pour varier par rapport à ce qui a été fait en cours, on vous propose de munir l'espace $H^1_0(\Omega)$ de la semi-norme H^1.

Question 5. Montrer que l'unique solution u de (3) dépend continument des données.

Exercice 3 Laplacien avec conditions de Fourier
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière", des termes sources $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ et $\lambda > 0$.
On considère le problème aux limites
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda\, u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{4}$$

Question 0. Quelle assertion est fausse

(a) $H^1(\Omega)$ muni de la norme $||\cdot||_{L^2}$est un espace de Hilbert.

(b) $H^1(\Omega)$ muni de la norme $||\cdot||_{H^1}$est un espace de Hilbert.

(c) $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $||\cdot||_{H^1}$est un espace de Hilbert..

Question 1. Construire la formulation variationnelle de ce problème et en utilisant l'inégalité (1) (admise pour un domaine Ω général), montrer que le problème est bien posé.

Question 2. Montrer que l'unique solution u de (4) dépend continument des données.

Exercice 4 Inégalités de Poincaré-Wirtinger et Laplacien avec conditions de Neumann

Question 1. Montrer qu' il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\ \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq C_2\ \left\{\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + |m(v)|\right\},$$

avec $m(v) = \displaystyle\int_0^1 v(y)\,dy$ la moyenne de v.

On admettra dans la suite que pour tout Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, on a l'inégalité de Poincaré-Wirtinger :

$$\exists C > 0,\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\Big(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \Big|\int_\Omega v(x)\,dx\Big|\Big). \tag{5}$$

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière"et des termes sources $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.
On considère le problème aux limites
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. . \tag{6}$$

Question 2. Montrer que pour que (6) admette au moins une solution, il est nécessaire que f et g vérifient

$$\int_\Omega f\,d\Omega + \int_\Gamma g\,d\Gamma = 0. \tag{7}$$

On suppose dans toute la suite que f et g vérifient (7).

Question 3. Démontrer que s'il existe une solution dans $H^1(\Omega)$ du problème (6) alors il en existe une infinité.

Question 4. Définissons l'espace

$$V_m = \left\{ u \in H^1(\Omega) \,\Big|\, \int_\Omega u = 0 \right\}.$$

Montrer que V_m muni de la norme H^1 est un espace de Hilbert.

Question 5. En cherchant une solution de (6) dans V_m, écrire la formulation variationnelle (FV) dans V_m vérifiée par u. Prouver que (FV) admet une unique solution u_m dans V_m.

Question 6. Montrer que, sous la condition nécessaire d'existence (7), la formulation variationnelle écrite dans V_m est équivalente au problème (6).*Attention* $\mathcal{D}(\Omega) \not\subset V_m$.

Exercice 5 $\diamond$ Inégalités de Poincaré dans $\mathbb{R}^N$
Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière".

Question 1. On note Γ une partie de $\partial\Omega$ de mesure non-nulle.
Montrer qu'il existe une constante C_1 telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \left\{ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \|\gamma_\Gamma v\|_{L^2(\Gamma)} \right\},$$

où γ_Γ est l'application trace $\gamma_\Gamma \ :\ H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$.

Question 2. Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \left\{ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |m(v)| \right\},$$

avec $m(v) = \dfrac{\int_\Omega v\, d\Omega}{\int_\Omega d\Omega}$ la moyenne de v.

Question 3. Soit $L \ :\ H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ linéaire et continue. A quelle condition sur L peut-on prouver qu'il existe une constante C_3 telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \left\{ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |L(v)| \right\}.$$

Indication : on pourra raisonner par l'absurde pour les questions 1., 2. et 3., à l'aide du théorème de Rellich.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ "suffisamment régulière". Alors, de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$.

Question 4. *Donner des exemples de sous-espaces de $H^1(\Omega)$, pour lesquels la semi-norme H^1*

$$|\cdot|_1 \ :\ v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}$$

est une norme, équivalente à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.