Corrigé de la Séance 3 : Theorème de Lax-Milgram

Exercice 1 Etude élémentaire de la coercivité
Soit V muni de la norme $\|\cdot\|_V$ un espace de Hilbert réel, et a une forme bilinéaire et continue de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$.

Question 0. On dit que a est *coercive* si

(a) $\forall v \in V \setminus \{0\}, \quad a(v,v) > 0$

(b) $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall v \in V,\ a(v,v) \geq \alpha ||v||_V^2$

(c) $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall u, v \in V,\ a(u,v) \geq \alpha ||u||_V ||v||_V$.

Corrigé de la question 0 : La réponse est la **(b)**. Si a vérifie **(a)**, on dit qu'elle est définie positive.

Question 1. En dimension finie. Si $V = \mathbb{R}^N$, établir que a définie-positive équivaut à a coercive.

Corrigé de la question 1 : Soient $V = \mathbb{R}^N$ et $\mathbb{S}$ la sphère unité de V : $\mathbb{S} := \{u \in V \text{ tel que } \|u\|_V = 1\}$. Comme $\mathbb{S}$ est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^N$ (un espace vectoriel de dimension finie), on en déduit que $\mathbb{S}$ est compacte.
Soit ℓ_a la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} \ell_a : \mathbb{S} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & a(u,u) \end{array}.$$

La fonction ℓ_a est continue sur $\mathbb{S}$, qui est compacte : ℓ_a atteint son maximum et son minimum sur $\mathbb{S}$. Notons α le minimum : $\exists u_{min} \in \mathbb{S}$ tel que $\ell_a(u_{min}) = \alpha$. Comme a est définie-positive et $u_{min} \neq 0$ (il est de norme un), on en déduit que $\alpha > 0$.
Soit $v \in V \setminus \{0\}$ quelconque. Posons $u = v/\|v\|_V$: alors $u \in \mathbb{S}$ et l'on a $\ell_a(u) \geq \alpha$, ce que l'on peut réécrire par bilinéarité

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

On en déduit que a est coercive.

Question 2. En dimension infinie.

(a) Que se passe-t-il si V est de dimension infinie ?

(b) Montrer notamment que pour $V = H^1(]0,1[)$, la forme bilinéaire a définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$$

est définie positive mais n'est pas coercive.

Corrigé de la question 2 :

(a) En dimension infinie, un ensemble fermé et borné n'est pas automatiquement compact. On ne peut donc pas raisonner comme précédemment...
Qui plus est, nous avons le contre-exemple suivant : soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne [1] de V. On peut écrire tout élément v de V sous la forme

$$v = \sum_0^\infty v_k e_k, \text{avec } \forall k \in \mathbb{N},\ v_k = (v|e_k)_V, \text{et } \|v\|_V = \left\{\sum_0^\infty v_k^2\right\}^{1/2}.$$

Pour définir une forme bilinéaire, il suffit de décrire son action sur tout couple d'éléments de la base. Posons :

$$a_\star(e_i, e_j) = \delta_{i,j}\frac{1}{j+1},\ \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que

$$a_\star(v, v) = \sum_0^\infty \frac{v_k^2}{k+1}.$$

Par construction, $a_\star$ est donc définie-positive. Par contre, elle n'est pas coercive, puisque l'on a la relation $\lim_{k\to+\infty} a_\star(e_k, e_k) = 0$!
NB. Dans un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, la sphère unité $\mathbb{S}$ n'est donc jamais compacte ! Sinon, le raisonnement de la Q1 s'appliquerait, et il suivrait que la forme $a_\star$, qui est définie-positive, est coercive...

(b) Par exemple, $V = H^1(]0,1[)$, la forme bilinéaire a définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$$

est définie positive de manière évidente. Mais elle n'est pas coercive puisque pour

$$u_n(x) = cos(n\pi x),\ n \geq 1$$

on a

$$a(u_n, u_n) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \|u_n\|_V^2 = \frac{1}{2}(1 + n^2\pi^2)$$

Question 3. Soit $V = H^1(]0,1[)$ et la forme bilinéaire a continue de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - \omega^2 \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que ni a ni $-a$ ne sont coercives.

1. On suppose ici que l'espace de Hilbert V est séparable, c'est-à–dire qu'il contient un sous-ensemble dénombrable et dense. Comme V est en particulier un espace métrique, on peut montrer qu'il existe une famille dénombrable qui en constitue une base. Et, pour finir, on peut orthogonaliser celle-ci...

Corrigé de la question 3 : Soit $V = H^1(]0,1[)$ et la forme bilinéaire a définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - \omega^2 \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ fixé. On montre facilement que

$$a(1,1) = -\omega^2 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ a(u_n,u_n) = \frac{1}{2}(n^2\pi^2 - \omega^2)$$

où on a choisi de nouveau $u_n = cos(n\pi x)$. En particulier il existe un entier p assez grand tel que $a(u_p,u_p) > 0$. On montre alors qu'il existe une constante β telle que pour $u = 1 + \beta u_p$ on ait $a(u,u) = 0$, avec $u \neq 0$. En effet, il suffit de remarquer que $a(1,u_p) = 0$ et de choisir β telle que

$$\beta^2 = -\frac{a(1,1)}{a(u_p,u_p)} = 2\frac{\omega^2}{p^2\pi^2 - \omega^2}.$$

La forme bilinéaire a n'est donc pas coercive et pour les mêmes raisons $-a$ non plus.

Exercice 2 Inégalités de Poincaré et laplacien avec conditions de Dirichlet

Question 1. Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\ \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq C_1\,\{\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + |v(0)|\}.$$

Corrigé de la question 1 : Tout d'abord, nous rappelons avoir démontré dans l'Ex4 du TD1 que l'application trace définie par

$$\begin{aligned} \gamma_\star : C^1([0,1]) &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto v(0) \end{aligned}$$

se prolonge de façon unique en une application linéaire et continue de $H^1(]0,1[)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit v une fonction $C^1([0,1])$, on peut écrire

$$\forall x \in [0,1], \quad v(x) = v(0) + \int_0^x v'(y)\,dy. \tag{1}$$

Par application de l'inégalité triangulaire au membre de droite (pour la norme de $L^2(]0,1[;dx)$), on déduit

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 |v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^x v'(y)\,dy\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |v(0)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^x |v'(y)|^2\,dy\right) x\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + |v(0)| \\
&\leq \left(\int_0^1 |v'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} + |v(0)|,
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir la deuxième inégalité et on majoré x par 1. Ainsi en utilisant des arguments de densité et de continuité de l'application trace en 0 on montre que $C_1 = 1$ est tel que

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \quad \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq C_1\left[\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + |v(0)|\right].$$

Question 2. On considère le domaine $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une constante $C_p > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \left[\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}\right]. \tag{2}$$

Corrigé de la question 2 : Soit v une fonction $C^1(\Omega)$. D'après la question précédente, on a

$$\forall y \in [0,1], \quad \|v(\cdot,y)\|^2_{L^2(]0,1[)} \leq 2\left[\|\partial_x v(\cdot,y)\|^2_{L^2(]0,1[)} + |v(0,y)|^2\right].$$

où on a utilisé que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$. En intégrant en y, on obtient

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\left[\|\partial_x v\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^1 |v(0,y)|^2\,dy\right] \leq 2\left[\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right].$$

En utilisant que $\sqrt{a^2+b^2} \leq (a+b)$, on trouve

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2}\left[\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}\right].$$

En utilisant des arguments de densité et de continuité de l'application trace, on déduit l'inégalité recherchée pour $v \in H^1(\Omega)$.

Question 3. On admet que cette inégalité est vraie quel que soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Que devient cette inégalité dans $H^1_0(\Omega)$? En déduire que la semi-norme H^1 définie par

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad |v|_{H^1} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}$$

est équivalente à la norme H^1 dans $H^1_0(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad C_1\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq |v|^2_{H^1} \leq C_2\|v\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{3}$$

Corrigé de la question 3 : On a immédiatement, par définition de l'espace $H^1_0(\Omega)$ l'inégalité de Poincaré :

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}. \tag{4}$$

Montrons maintenant l'équivalence des normes dans $H^1_0(\Omega)$. On a de manière évidente

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré on a aussi

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} = (\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^N})^{1/2} \leq \sqrt{1+C_p^2}\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Dans $H^1_0(\Omega)$, la norme H^1 et la semi-norme H^1 sont donc équivalentes.

Question 4. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière"et un terme source $f \in L^2(\Omega)$.
On considère le problème aux limites
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. . \tag{5}$$

Construire la formulation variationnelle de ce problème et montrer que le théorème de Lax Milgram s'applique. Pour varier par rapport à ce qui a été fait en cours, on vous propose de munir l'espace $H^1_0(\Omega)$ de la semi-norme H^1.

Corrigé de la question 4 : On montre facilement que ce problème est équivalent à la formulation variationnelle suivante :
Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{6}$$

Pour l'équivalence entre les 2 problèmes, voir le TD2.

On munit l'espace $H^1_0(\Omega)$ de la semi-norme H^1. En tant qu'espace fermé de $H^1(\Omega)$ et muni de la norme H^1, c'est un espace de Hilbert. Comme la norme H^1 et la semi-norme H^1 sont équivalentes dans $H^1_0(\Omega)$, l'espace $H^1_0(\Omega)$ muni de la semi-norme H^1 est aussi un espace de Hilbert
La forme $\ell(v) = \int_\Omega f v \, d\Omega$ est, de manière évidente, linéaire, et également continue :

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad |\ell(v)| = \left| \int_\Omega f v \, d\Omega \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|f\|_{L^2(\Omega)} |v|_{H^1}.$$

où on a utilisé l'inégalité de Poincaré.
La forme $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega$ est, elle, clairement bilinéaire, et continue

$$\forall u, v \in H^1_0(\Omega), \quad |a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} = |u|_{H^1} \, |v|_{H^1}.$$

Il ne reste plus qu'à démontrer la coercivité de a pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram et conclure au caractère bien posé du problème. On a

$$\forall u \in H^1_0(\Omega), \quad a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega = |u|^2_{H^1},$$

La forme bilinéaire a est donc coercive, le théorème de Lax-Milgram s'applique : il existe une unique solution au problème (6) et donc au problème (5).

Question 5. Montrer que l'unique solution u de (5) dépend continument des données.

Corrigé de la question 5 : Il suffit d'écrire (6) pour $v = u$. On obtient

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega = \int_\Omega f u \, d\Omega = \ell u$$

En utilisant la coercivité de a et la continuité de ℓ, on obtient

$$|u|_{H^1} \leq C_p \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Exercice 3 Laplacien avec conditions de Fourier
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière", des termes sources $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ et $\lambda > 0$.
On considère le problème aux limites
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda \, u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{7}$$

Question 0. Quelle assertion est fausse

(a) $H^1(\Omega)$ muni de la norme $||\cdot||_{L^2}$est un espace de Hilbert.

(b) $H^1(\Omega)$ muni de la norme $||\cdot||_{H^1}$est un espace de Hilbert.

(c) $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $||\cdot||_{H^1}$est un espace de Hilbert..

Corrigé de la question 0 : La réponse **(a)** est fausse : H^1 est complet pour la norme $||\cdot||_{H^1}$ pas pour la norme $||\cdot||_{L^2}$. Notons que $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $||\cdot||_{H^1}$ est un espace de Hilbert en tant que sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ (on peut le justifier de 2 façons différentes : (1) c'est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ ou bien (2) c'est le noyau de l application trace qui est continue dans $H^1(\Omega)$.)

Question 1. Construire la formulation variationnelle de ce problème et en utilisant l'inégalité (2) (admise pour un domaine Ω général), montrer que le problème est bien posé.

Corrigé de la question 1 : On montre que ce problème est équivalent à la formulation variationnelle suivante :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} uv \, d\Gamma = \int_\Omega fv \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} gv \, d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{8}$$

Pour l'équivalence entre les 2 problèmes, voir le TD2.

La forme $\ell(v) = \int_\Omega fv \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} gv \, d\Gamma$ est clairement linéaire. Pour la continuité, notons que :

$$\begin{aligned} \forall v \in H^1(\Omega), \quad |\ell(v)| &\leq \left| \int_\Omega fv \, d\Omega \right| + \left| \int_{\partial\Omega} gv \, d\Gamma \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après la continuité de l'application trace :

$$\exists C_0 > 0, \ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)};$$

on déduit la continuité de la forme linéaire :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad |\ell(v)| \leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_0 \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Le caractère bilinéaire de la forme $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} uv \, d\Gamma$ est évident. Pour la continuité,

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \quad |a(u,v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \lambda \, \|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

On utilise encore la continuité de l'application trace pour finalement avoir

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \quad |a(u,v)| \leq (1 + \lambda \, C_0^2) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ici encore, il ne reste plus qu'à démontrer la coercivité de a. Notons que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, d\Gamma = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \lambda \, \|u|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}.$$

D'après (2), on a

$$\frac{1}{2C_p^2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left[\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|u|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right],$$

avec $C_p > 0$ indépendant de u, soit finalement

$$\begin{aligned} \forall u \in H^1(\Omega), \quad 2a(u,u) &\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \min(\lambda, 1) \left[\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|u|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right] \\ &\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \frac{\min(\lambda,1)}{2C_p^2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \min(1, \frac{\min(\lambda,1)}{2C_p^2}) \|u\|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Le théorème de Lax-Milgram s'applique et donne l'existence et l'unicité de la solution de (8) et donc de (7).

Question 2. Montrer que l'unique solution u de (7) dépend continument des données.

Corrigé de la question 2 : Il suffit d'écrire (8) pour $v = u$. On obtient

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, d\Gamma = \int_\Omega f u \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g u \, d\Gamma = \ell u$$

En utilisant la coercivité de a et la continuité de ℓ, on obtient

$$|u|_{H^1} \leq 2(\min(1, \frac{\min(\lambda,1)}{2C_p^2}))^{-1} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_0 \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right).$$

Exercice 4 Inégalités de Poincaré-Wirtinger et Laplacien avec conditions de Neumann

Question 1. Montrer qu' il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \; \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq C_2 \left\{ \|v'\|_{L^2(]0,1[)} + |m(v)| \right\},$$

avec $m(v) = \displaystyle\int_0^1 v(y) \, dy$ la moyenne de v.

Corrigé de la question 1 : Tout d'abord, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut montrer, en utilisant des arguments de densité, que l'application moyenne

$$\begin{aligned} m : C^0([0,1]) &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \int_0^1 v(y) \, dy \end{aligned}$$

est continue de $L^2(]0,1[)$ dans $\mathbb{R}$.

En intégrant pour $v \in C^1([0,1])$ l'identité

$$v(x) = \int_y^x v'(z)\,dz + v(y),$$

sur $[0,1]$ par rapport à la variable y, on obtient

$$\forall x \in [0,1], \quad v(x) = \int_0^1 \int_y^x v'(z)\,dz\,dy + m(v).$$

D'où

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1], \quad |v(x)| &\leq \int_0^1 \left| \int_y^x v'(z)\,dz \right| dy + |m(v)| \leq \int_0^1 \int_0^1 |v'(z)|\,dzdy + |m(v)| \\ &\leq \int_0^1 |v'(z)|\,dz + |m(v)|.\end{aligned}$$

Par intégration directe des carrés sur $]0,1[$: $\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \| \int_0^1 |v'(z)|\,dz + |m(v)|\,\|_{L^2(]0,1[)}$. En appliquant à nouveau l'inégalité triangulaire (cf. les calculs après (1)), on en déduit donc que pour $v \in C^1([0,1])$

$$\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v'\|_{L^2(]0,1[)} + |m(v)|.$$

Des arguments de densité nous permettent de déduire que (avec $C_2 = 1$)

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \quad \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq C_2 \left\{ \|v'\|_{L^2(]0,1[)} + |m(v)| \right\}.$$

On admettra dans la suite que pour tout Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, on a l'inégalité de Poincaré-Wirtinger :

$$\exists C > 0,\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\Big(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \Big| \int_\Omega v(x)\,dx \Big| \Big). \tag{9}$$

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière" et des termes sources $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.
On considère le problème aux limites
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{10}$$

Question 2. Montrer que pour que (10) admette au moins une solution, il est nécessaire que f et g vérifient

$$\int_\Omega f\,d\Omega + \int_\Gamma g\,d\Gamma = 0. \tag{11}$$

On suppose dans toute la suite que f et g vérifient (11).

Corrigé de la question 2. Supposons qu'il existe une solution de (10). En multipliant l'équation volumique de (10) par $v = 1$, en intégrant sur Ω et en utilisant une formule de Green, on obtient la condition nécessaire d'existence.

Question 3. Démontrer que s'il existe une solution dans $H^1(\Omega)$ du problème (10) alors il en existe une infinité.

Corrigé de la question 3 : Soit u une solution du problème, alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction

$$x \mapsto u(x) + c$$

est aussi solution du problème.

Question 4. Définissons l'espace

$$V_m = \left\{ u \in H^1(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega u = 0 \right\}.$$

Montrer que V_m muni de la norme H^1 est un espace de Hilbert.

Corrigé de la question 4. C'est un sous espace vectoriel de H^1 qui est fermé. En effet, c'est le noyau de l'application moyenne qui est continue pour la norme H^1. Muni de la norme H^1, c'est donc bien un espace de Hilbert.

Question 5. En cherchant une solution de (10) dans V_m, écrire la formulation variationnelle (FV) dans V_m vérifiée par u. Prouver que (FV) admet une unique solution u_m dans V_m.

Corrigé de la question 5. Si $u \in V_m$ est solution de (10) alors u est, de manière évidente, solution de la formulation variationnelle
Trouver $u \in V_m$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v \, d\Gamma, \quad \forall v \in V_m. \tag{12}$$

Nous allons chercher à vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.
On munit l'espace V_m de la norme H^1. D'après la Question 4, V_m est bien un espace de Hilbert.
En utilisant les mêmes arguments que pour le cas des conditions de Fourier, on montre que la forme $\ell(v) = \int_\Omega f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v \, d\Gamma$ est linéaire et continue.
En utilisant les mêmes arguments que pour le cas des conditions de Dirichlet, on montre que la forme $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega$ est bilinéaire et continue. Pour la coercivité, il suffit d'utiliser, l'équivalence de la semi-norme H^1 et la norme H^1 dans l'espace V_m, qui est peut être démontrée en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (9).
En vertu du théorème de Lax-Milgram, le problème (12) est bien posé.

Question 6. Montrer que, sous la condition nécessaire d'existence (11), la formulation variationnelle écrite dans V_m est équivalente au problème (10).*Attention* $\mathcal{D}(\Omega) \not\subset V_m$.

Corrigé de la question 6. Une fonction-test $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ n'appartient pas toujours à V_m : l'idée est de faire intervenir $v - m(v) \in V_m$ où $m(v) = \frac{\int_\Omega v\, d\Omega}{\int_\Omega d\Omega}$ est la moyenne de v. On écrit alors pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\langle f, v\rangle &= \int_\Omega f v\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v\, d\Gamma \quad \text{car } v\,|_{\partial\Omega} = 0\\
&= \int_\Omega f\,(v - m(v))\; d\Omega + m(v)\int_\Omega f\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v\, d\Gamma\\
&= \int_\Omega f\,(v - m(v))\; d\Omega - m(v)\int_{\partial\Omega} g\, d\Gamma + \int_{\partial\Omega} g v\, d\Gamma \quad \text{car (11) est vérifiée}\\
&= \int_\Omega f\,(v - m(v))\; d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\,(v - m(v))\; d\Gamma\\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\,(v - m(v))\; d\Omega \quad \text{car } u \text{ est solution de (FV)}\\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega = \langle -\Delta u, v\rangle
\end{aligned}$$

On a donc que $-\Delta u = f$ au sens des distributions et comme f est dans $L^2(\Omega)$, cette égalité est vraie presque partout. On retrouve maintenant la condition aux limites en écrivant pour $v \in H^1(\Omega)$ (et en notant que $v - m(v) \in V_m$) :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} g v\, d\Gamma &= \int_{\partial\Omega} g\,(v - m(v))\; d\Gamma + m(v)\int_{\partial\Omega} g\, d\Gamma\\
&= \int_{\partial\Omega} g\,(v - m(v))\; d\Gamma - m(v)\int_\Omega f\, d\Omega \quad \text{car (11) est vérifiée}\\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\,(v - m(v))\; d\Omega - \int_\Omega f\,(v - m(v))\; d\Omega\\
&\qquad - m(v)\int_\Omega f\, d\Omega \quad \text{car } u \text{ est solution de (FV)}\\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega - \int_\Omega f v\, d\Omega\\
&= \int_\Omega (-\Delta u - f) v\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\Gamma\\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\Gamma.
\end{aligned}$$

Ci-dessus, on a utilisé la Formule de Green pour obtenir l'avant-dernière égalité. Ceci étant vrai pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on en déduit la condition aux limites de Neumann sur $\partial\Omega$ comme habituellement.

Exercice 5 $\diamond$ Inégalités de Poincaré dans $\mathbb{R}^N$
Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière".

Question 1. On note Γ une partie de $\partial\Omega$ de mesure non-nulle.
Montrer qu'il existe une constante C_1 telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ \|v\|_{L^2(\Omega)} \le C_1 \left\{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \|\gamma_\Gamma v\|_{L^2(\Gamma)}\right\},$$

où γ_Γ est l'application trace $\gamma_\Gamma\ :\ H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$.

Corrigé de la question 1. Raisonnons par l'absurde. On aurait alors le résultat :

$$\forall C,\ \exists v \in H^1(\Omega),\ \|v\|_{L^2(\Omega)} > C\left\{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \|\gamma_\Gamma v\|_{L^2(\Gamma)}\right\}.$$

On peut choisir en particulier $C = n$, pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Ainsi, il existe $v_n \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)^N} + \|\gamma_\Gamma v_n\|_{L^2(\Gamma)} < \frac{1}{n}. \tag{13}$$

Par construction, on remarque que la suite $(\nabla v_n)_n$ tend vers 0 dans $L^2(\Omega)^N$.

Par ailleurs, la suite $(v_n)_n$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, puisque

$$\|v_n\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_n\|^2_{L^2(\Omega)^N} < 1 + \frac{1}{n^2} < 2.$$

D'après le théorème de Rellich, il existe une sous-suite extraite de $(v_n)_n$, *toujours notée* $(v_n)_n$, qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$, vers une limite $v \in L^2(\Omega)$. On a bien sûr $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Que vaut ∇v, pris au sens des distributions ? Soit $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega)^N$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle \nabla v, \boldsymbol{\phi}\rangle &= -\langle v, \operatorname{div}\boldsymbol{\phi}\rangle && \text{(dérivation au sens des distributions)}\\
&= -\int_\Omega v \operatorname{div}\boldsymbol{\phi}\, d\Omega && (v \in L^2(\Omega))\\
&= -\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega v_n \operatorname{div}\boldsymbol{\phi}\, d\Omega && (v = \lim_{n\to+\infty} v_n \text{ dans } L^2(\Omega))\\
&= +\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \nabla v_n \cdot \boldsymbol{\phi}\, d\Omega && \text{(intégration par parties)}\\
&= 0 && (\lim_{n\to+\infty}\nabla v_n = 0 \text{ dans } L^2(\Omega)^N).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\nabla v = 0$! Comme $0 \in L^2(\Omega)^N$, v appartient donc à $H^1(\Omega)$. Et puisque son gradient est nul sur Ω connexe, on a $v = cste$.
Comme d'une part $\lim_{n\to+\infty} v_n = v$ dans $L^2(\Omega)$ et d'autre part $\lim_{n\to+\infty}\nabla v_n = 0 = \nabla v$ dans $L^2(\Omega)^N$, on a en fait

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = v \text{ dans } H^1(\Omega).$$

Quel est l'avantage, par rapport à la convergence de $(v_n)_n$ dans $L^2(\Omega)$? *L'application trace est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, mais elle n'est pas continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.* De la convergence dans $H^1(\Omega)$, on en déduit la convergence des traces $(\gamma_\Gamma v_n)_n$ vers $\gamma_\Gamma v$ dans $L^2(\Gamma)$. D'après (13), $\gamma_\Gamma v = 0$, or on sait que $v = cste$, d'où finalement $v = 0$ dans Ω. Ceci contredit le fait que $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Question 2. Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ \|v\|_{L^2(\Omega)} \le C_2\left\{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |m(v)|\right\},$$

avec $m(v) = \dfrac{\int_\Omega v\, d\Omega}{\int_\Omega d\Omega}$ la moyenne de v.

Corrigé de la question 2. La procédure est quasi-identique à celle de la Q1. Raisonnons par l'absurde. On a alors le résultat :

$$\forall C,\ \exists v \in H^1(\Omega),\ \|v\|_{L^2(\Omega)} > C(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |m(v)|).$$

On peut encore une fois choisir $C = n$, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: il existe $v_n \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)^N} + |m(v_n)| < \frac{1}{n}.$$

Par construction, on remarque que la suite $(\nabla v_n)_n$ tend vers 0 dans $L^2(\Omega)^N$.
Par ailleurs, la suite $(v_n)_n$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, puisque pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $\|v_n\|^2_{H^1(\Omega)} < 2$. D'après le théorème de Rellich, il existe une sous-suite extraite de $(v_n)_n$, *toujours notée* $(v_n)_n$, qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$, vers une limite $v \in L^2(\Omega)$. On a bien sûr $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Que vaut ∇v, pris au sens des distributions ? En utilisant exactement les mêmes arguments qu'à la Q1, on montre que $\nabla v = 0$! Comme $0 \in L^2(\Omega)^N$, v appartient donc à $H^1(\Omega)$. Et puisque son gradient est nul sur Ω connexe, on a $v = cste$.

Mais dans ce cas

$$v = \frac{\int_\Omega v\, d\Omega}{\int_\Omega d\Omega} = \frac{1}{\int_\Omega d\Omega} \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega v_n\, d\Omega = 0,$$

ce qui contredit l'égalité $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Question 3. Soit $L : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ linéaire et continue. A quelle condition sur L peut-on prouver qu'il existe une constante C_3 telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \left\{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |L(v)|\right\}.$$

Corrigé de la question 3. Si la forme linéaire L est telle que $L(1) = 0$, alors il n'existe pas de constante C_3 telle que

$$\|1\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \left\{\|\nabla 1\|_{L^2(\Omega)^N} + |L(1)|\right\},$$

puisque $\|1\|_{L^2(\Omega)} > 0$, alors que le membre de droite vaut 0 !

Supposons maintenant que $L(1) \neq 0$ et raisonnons comme à la Q2 par l'absurde : on commence par, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe $v_n \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)^N} + |L(v_n)| < \frac{1}{n},$$

jusqu'à obtenir une limite v dans $L^2(\Omega)$ constante et telle que $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Comme d'une part $\lim_{n\to+\infty} v_n = v$ dans $L^2(\Omega)$ et d'autre part $\lim_{n\to+\infty} \nabla v_n = 0 = \nabla v$ dans $L^2(\Omega)^N$, on a en fait

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = v \text{ dans } H^1(\Omega).$$

Puisque la forme L est continue sur $H^1(\Omega)$, ceci implique que

$$L(v) = \lim_{n\to+\infty} L(v_n) = 0.$$

Par linéarité, $L(v) = L(v \times 1) = v \times L(1)$ et, comme $L(1) \neq 0$ on a nécessairement $v = 0$, ce qui contredit finalement $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Question 4. Donner des exemples de sous-espaces de $H^1(\Omega)$, pour lesquels la semi-norme H^1

$$|\cdot|_1 \;:\; v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}$$

est une norme, équivalente à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Corrigé de la question 4. Nous pouvons donc donner une classe d'espaces où la semi-norme H^1 est en réalité une norme, soit

$$\forall \Gamma \subset \partial\Omega \text{ de mesure non nulle,} \quad \mathcal{V}_\Gamma = \big\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v_{|\Gamma} = 0 \big\}$$

et notamment

$$H_0^1(\Omega).$$

Les espaces

$$\mathcal{V}_m = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega v\, d\Omega = 0 \right\}$$

$$\forall \mathcal{O} \subset \Omega \text{ de mesure non nulle,} \quad \mathcal{V}_{m,\mathcal{O}} = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\mathcal{O}} v\, d\Omega = 0 \right\}$$

$$\forall \Gamma \subset \partial\Omega \text{ de mesure non nulle,} \quad \mathcal{V}_{m,\Gamma} = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_\Gamma v\, d\Gamma = 0 \right\}$$

conviennent aussi.