Corrigé de la Séance 2 : Formulations variationnelles

Dans la suite, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On note $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à la frontière.

Exercice 1 Problème avec condition aux limites de Fourier
On considère le problème aux limites
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\left\{\begin{array}{ll} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} + \lambda\, u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. . \tag{1}$$

avec $\lambda \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Question 0. On rappelle que γ_0 est la première application trace. Quelle assertion est juste

(a) $\operatorname{Im}\gamma_0 \subset L^2(\partial\Omega)$ et $\operatorname{Im}\gamma_0$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$

(b) $L^2(\partial\Omega) \subset \operatorname{Im}\gamma_0$ et $L^2(\partial\Omega)$ est dense dans $\operatorname{Im}\gamma_0$

(c) $L^2(\partial\Omega) = \operatorname{Im}\gamma_0$.

Corrigé de la question 0 : C'est la réponse (a) : γ_0 est une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, son image est donc incluse dans $L^2(\partial\Omega)$. On a vu dans le cours que son image est même dense dans $L^2(\partial\Omega)$.

Question 1. Construire la formulation variationnelle (FV1) associée à (1).

Corrigé de la question 1 : En multipliant la 1ère équation de (1) par $v \in H^1(\Omega)$ et en integrant sur Ω on obtient facilement

$$\int_\Omega uv\, d\Omega - \int_\Omega \Delta u\, v\, d\Omega = \int_\Omega fv\, d\Omega, \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Comme u est dans $H^1(\Omega)$ et $\Delta u = u - f \in L^2(\Omega)$, on a $u \in H^1(\Omega, \triangle)$. On suppose pour simplifier que $u \in H^2(\Omega)$. On peut donc appliquer la formule de Green au deuxième terme, on a

$$\int_\Omega uv\, d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma = \int_\Omega fv\, d\Omega, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Il suffit enfin d'utiliser la 2ème équation de (1) pour trouver la formulation variationnelle associée :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} \int_\Omega uv\, d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma & \\ = \int_\Omega fv\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} gv|_{\partial\Omega}\, d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega). & \end{aligned} \tag{FV1}$$

Question 2. Prouver l'unicité de la solution de (FV1). Que se passe-t-il si $\lambda < 0$?

Corrigé de la question 2 : Soient u_1, u_2 deux solutions de (FV1), alors

$$\int_\Omega (u_1 - u_2) v \, d\Omega + \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} (u_1|_{\partial\Omega} - u_2|_{\partial\Omega}) \, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

On choisit la fonction-test $v = u_1 - u_2$ pour trouver

$$\|u_1 - u_2\|^2_{H^1(\Omega)} + \lambda \, \|u_1|_{\partial\Omega} - u_2|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = 0.$$

Puisque $\lambda \geq 0$, on en déduit que $\|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)} = 0$ et donc $u_1 = u_2$.
Lorsque $\lambda < 0$, le 1er terme est positif, et le 2nd est négatif : on ne peut pas conclure tout de suite. Cependant, si $\lambda < 0$ mais $|\lambda|$ petit, on peut encore conclure. En effet, on a par continuité de l'application trace

$$\|u_1|_{\partial\Omega} - u_2|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0^2 \, \|u_1 - u_2\|^2_{H^1(\Omega)},$$

donc comme $\lambda < 0$, on obtient

$$0 = \|u_1 - u_2\|^2_{H^1(\Omega)} + \lambda \, \|u_1|_{\partial\Omega} - u_2|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq (1 + \lambda \, C_0^2) \, \|u_1 - u_2\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Si $1 + \lambda \, C_0^2 > 0$, c'est à dire $\lambda > -1/C_0^2$, le dernier terme est positif et donc nul ! Ceci nous donne de nouveau l'unicité.
Si $\lambda < 0$ et $\lambda < -1/C_0^2$, on ne peut pas conclure.

Question 3. Etablir l'équivalence entre les problèmes (1) et (FV1).

Corrigé de la question 3 : D'après ce que l'on vient de voir, si u est solution de (1), alors u vérifie (FV1). Examinons la réciproque. Dans (FV1), si on choisit $v \in \mathscr{D}(\Omega) (\subset H^1(\Omega))$, on a alors :

$$\int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v) \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega,$$

puisque $v = 0$ sur $\partial\Omega$. On remplace ensuite les intégrales $\displaystyle\int_\Omega \cdot \, \partial_\alpha v \, d\Omega$ par des crochets de dualité $\langle \cdot, \partial_\alpha v \rangle$, puis on dérive au sens des distributions :

$$\langle f, v \rangle = \langle u, v \rangle + \sum_{i=1,3} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle = \langle u, v \rangle - \sum_{i=1,3} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle \Delta u, v \rangle.$$

On en déduit que

$$\langle u - \Delta u, v \rangle = \langle f, v \rangle \,, \ \forall v \in \mathscr{D}(\Omega),$$

c'est-à-dire que $u - \Delta u = f$ au sens des distributions. Puisque u et f appartiennent à $L^2(\Omega)$, $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et ainsi $u - \Delta u = f$ presque partout dans Ω. En particulier, on a :

$$\int_\Omega (u - \Delta u) \, v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega, \ \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2}$$

Maintenant, on revient à (FV1) en sachant que u est dans $H^1(\Omega, \triangle)$ ($u \in H^1(\Omega)$ et $\Delta u = u - f \in L^2(\Omega)$). On suppose $u \in H^2(\Omega)$ et on peut appliquer la formule de Green :

$$\int_\Omega (u - \Delta u)\, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma + \lambda \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma$$
$$= \int_\Omega f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma,\ \forall v \in H^1(\Omega),$$

et, d'après (2), on aboutit à

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} + \lambda u|_{\partial\Omega} - g \right) v \, d\Gamma = 0,\ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme $(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} + \lambda u|_{\partial\Omega} - g)$ est dans $L^2(\partial\Omega)$ et que l'image de l'application trace γ_0 est dense dans $L^2(\partial\Omega)$, l'égalité prouve que $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} + \lambda u|_{\partial\Omega} = g$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc presque partout sur $\partial\Omega$.

$\diamond$ **Remarque (qui sort du cadre du cours) :** Si on ne suppose pas que u est dans $H^2(\Omega)$, on peut encore appliquer une formule de Green généralisée puisque $u \in \{w \in H^1(\Omega) \mid \Delta w \in L^2(\Omega)\}$ et on trouve

$$\int_\Omega (u - \Delta u)\, v \, d\Omega + {}_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}< \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega} >_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \lambda\ {}_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}< u|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega} >_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$
$$= \int_\Omega f v \, d\Omega + {}_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}< g, v|_{\partial\Omega} >_{H^{1/2}(\partial\Omega)},\ \forall v \in H^1(\Omega),$$

où $H^{1/2}(\partial\Omega) = \mathrm{Im}(\gamma_0)$ et $H^{-1/2}(\partial\Omega) := \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)'$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$. D'après (2), on aboutit à

$${}_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}\langle \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} + \lambda u|_{\partial\Omega} - g, v|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = 0,\ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme $(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} + \lambda u|_{\partial\Omega} - g)$ est par définition une forme linéaire et continue sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$, l'égalité ci-dessus valable pour tout élément de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ prouve que $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} + \lambda u|_{\partial\Omega} = g$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Pour conclure, comme g et $u|_{\partial\Omega}$ appartiennent à $L^2(\partial\Omega)$, on en déduit que $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} + \lambda u|_{\partial\Omega} = g$ presque partout sur $\partial\Omega$.

Exercice 2 Diffusion de la chaleur
On considère le problème aux limites
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(k\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{3}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $k \in L^\infty(\Omega)$ et $k(\boldsymbol{x}) \geq k_{min} > 0$ presque pour tout $\boldsymbol{x}$ dans Ω.

Question 0. Donner les espaces auxquels doivent appartenir $\vec{W}$ et v pour pouvoir écrire la formule de Green suivante

$$\int_\Omega \left(\operatorname{div} \vec{W}\, v + \vec{W} \cdot \nabla v\right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{W} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma$$

$$\begin{array}{ll} \textbf{(a)} & \vec{W} \in (L^2(\Omega))^3 \text{ et } v \in H^1(\Omega) \\ \textbf{(b)} & \vec{W} \in (L^2(\Omega))^3,\ \operatorname{div} \vec{W} \in L^2(\Omega) \text{ et } v \in H^1(\Omega) \\ \textbf{(c)} & \vec{W} \in (H^1(\Omega))^3 \text{ et } v \in H^1(\Omega) \end{array}$$

En déduire les espaces auxquels doivent appartenir u et v pour pouvoir écrire la formule de Green suivante

$$\int_\Omega (\operatorname{div}(k\nabla u)v + k\nabla u \cdot \nabla v)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} k\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma$$

Corrigé de la question 0 : (a) Si $\vec{W}$ est seulement dans $(L^2(\Omega))^3$, on ne sait donc pas que $\operatorname{div} \vec{W} \in L^2(\Omega)$, on ne peut donc pas espérer pouvoir donner un sens à l'intégrale volumique.
(b) Si $\vec{W} \in (L^2(\Omega))^3$ et $\operatorname{div} \vec{W} \in L^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on peut donner un sens à l'intégrale volumique. Mais on ne sait pas si $\vec{W} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ est dans $L^2(\partial\Omega)$.
(c) Si $\vec{W} \in (H^1(\Omega))^3$ et $v \in H^1(\Omega)$ alors les intégrales volumiques ont bien un sens et également les intégrales surfaciques. En effet, on a $\vec{W}_i|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ et donc $\vec{W} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ aussi. On a aussi $v|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$.

Pour écrire

$$\int_\Omega (\operatorname{div}(k\nabla u)v + \nabla u \cdot \nabla v)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} k\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma$$

il suffit donc de prendre v dans $H^1(\Omega)$ et u dans $H^1(\Omega)$ tel que $k\nabla u \in (H^1(\Omega))^n$. Dans ce cas, la première intégrale volumique a bien un sens. L'intégrale surfacique aussi puisque $k\nabla u$ a bien une trace sur le bord et en particulier $k\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ est bien dans $L^2(\partial\Omega)$.)

Question 1. Construire la formulation variationnelle (FV3) associée à (3) (on supposera pour simplifier que u est dans $H^1(\Omega)$ et est telle que $k\nabla u \in (H^1(\Omega))^3$).

Corrigé de la question 1 : Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de (3).
En multipliant la 1ère équation de (3) par $v \in H^1(\Omega)$ et en integrant sur Ω on obtient

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(k\nabla u)\, v\, d\Omega = \int_\Omega fv\, d\Omega, \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

On aimerait utiliser la formule de Green de la Q0. On a d'après la première équation de (3) que $\operatorname{div}(k\nabla u) = -f \in L^2(\Omega)$. On suppose de plus pour simplifier que u est telle que $k\nabla u \in (H^1(\Omega))^n$. On peut appliquer la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega - \int_{\partial\Omega} k\nabla u \cdot \mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} v\big|_{\partial\Omega}\, d\Gamma = \int_\Omega fv\, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Comme nous n'avons aucune information sur la trace normale de u sur le bord, on va faire disparaître l'intégrale surfacique en prenant $v|_{\partial\Omega} = 0$ sur $\partial\Omega$, c'est à dire $v \in H_0^1(\Omega)$. Enfin, comme nous n'avons pas utilisé la condition aux bords de u dans la formulation variationnelle, on va intégrer cette condition dans l'espace dans lequel nous recherchons la solution, c'est à dire $H_0^1(\Omega)$.
On en déduit la formulation variationnelle associée à (3) :

$$\begin{aligned} &\textit{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \textit{ telle que} \\ &\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega fv \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{FV3}$$

Question 2. Prouver l'unicité de la solution de (FV3).

Corrigé de la question 2 : Soient u_1, u_2 deux solutions de (FV3), alors

$$\int_\Omega k\nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v \, d\Omega = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On choisit la fonction-test $v = u_1 - u_2$ pour trouver

$$\int_\Omega k|\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, d\Omega = 0.$$

Par définition de k on sait que

$$k_{min} \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, d\Omega \le \int_\Omega k|\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, d\Omega$$

avec $k_{min} > 0$, et on conclut que $\nabla(u_1 - u_2) = 0$ dans Ω. Ainsi, $u_1 - u_2$ est une fonction constante sur chaque composante connexe de l'ouvert Ω. Comme de plus on sait que $(u_1 - u_2)\big|_{\partial\Omega} = 0$, toutes les constantes sont nulles et donc $u_1 = u_2$.

Question 3. Etablir l'équivalence entre les problèmes (3) et (FV3).

Corrigé de la question 3 : D'après ce qui précède, si u est solution de (3), alors u vérifie (FV3). La réciproque est très simple à établir. En effet, comme u une solution de (FV3) appartient à $H_0^1(\Omega)$, on a $u|_{\partial\Omega} = 0$. Puis, on choisit dans (FV3) une fonction-test v de $\mathscr{D}(\Omega)$, et on raisonne à l'inverse de la 1ère question pour trouver que $-\operatorname{div}(k\nabla u) = f$ au sens des distributions. Puisque f appartient à $L^2(\Omega)$, $\operatorname{div}(k\nabla u) \in L^2(\Omega)$ et finalement $-\operatorname{div}(k\nabla u) = f$ presque partout dans Ω.

Exercice 3 Coefficients discontinus
Soit d un entier naturel non nul, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière suffisamment régulière. On le partitionne en $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints à frontières suffisamment régulières. On note $\Sigma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, et on suppose, pour des raisons techniques dépassant le cadre de ce cours, que $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$. On note $\overrightarrow{n}$ le vecteur unitaire sortant à Ω_2.

Soient $\kappa_1,\ \kappa_2$ deux constantes strictement positives et définissons $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$\kappa(x) = \begin{cases} \kappa_1 & \text{si} \quad x \in \Omega_1, \\ \kappa_2 & \text{si} \quad x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Soit enfin $g \in L^2(\Sigma)$. On résout le problème variationnel $(\mathcal{P})$
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Sigma g\, v|_\Sigma \, d\Sigma, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Interpréter le problème $(\mathcal{P})$ en termes d'équations aux dérivées partielles dans Ω_1 et Ω_2, de conditions aux limites et de condition sur l'interface Σ (pour cette dernière, on raisonnera "formellement").

Corrigé de la question :

(i) Tout d'abord, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, on sait que $u \in H^1(\Omega)$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

(ii) On ne peut pas raisonner directement au sens des distributions dans $\mathcal{D}(\Omega)$ dans la suite, puisque d'une part la forme linéaire ℓ ne s'annule pas automatiquement sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et d'autre part elle met en jeu des intégrales qui ne sont pas "volumiques"...
Soit plutôt $\phi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$, que l'on prolonge par 0 à Ω : son prolongement, noté ϕ, appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on peut l'utiliser comme fonction-test dans $(\mathcal{P})$, et on a $\ell(\phi) = 0$:

$$0 = \int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla \phi \, d\Omega = \kappa_i \int_{\Omega_i} (\nabla u)|_{\Omega_i} \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega_i = \kappa_i \langle \nabla(u|_{\Omega_i}), \nabla \phi_i \rangle = -\kappa_i \langle \Delta(u|_{\Omega_i}), \phi_i \rangle.$$

NB. Pour justifier l'égalité $(\nabla u)|_{\Omega_i} = \nabla(u|_{\Omega_i})$, voir TD1-Ex2-Q4.
Dans la suite, nous notons $u_i := u|_{\Omega_i}$ pour $i = 1, 2$. Ainsi, $\Delta u_i = 0$ au sens des distributions, à savoir dans $\mathcal{D}'(\Omega_i)$; en particulier $\Delta u_i = 0$ presque partout.

(iii) Pour finir, prenons $v \in H_0^1(\Omega)$ et intégrons par parties sur Ω_1 et Ω_2, en supposant que chaque u_i est dans $H^2(\Omega_i)$ pour pouvoir appliquer la formule de Green.
Ici, $v_i := v_{|\Omega_i}$ pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma gv \, d\Sigma &= \int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \\
&= \kappa_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, d\Omega_1 + \kappa_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, d\Omega_2 \\
&= \kappa_1 \left(\int_{\partial\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1|_{\partial\Omega_1} v_1|_{\partial\Omega_1} \, d\Gamma - \int_{\Omega_1} \Delta u_1 \, v_1 \, d\Omega_1 \right) \\
&\quad + \kappa_2 \left(\int_{\partial\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_2|_{\partial\Omega_2} v_2|_{\partial\Omega_2} \, d\Gamma - \int_{\Omega_2} \Delta u_2 \, v_2 \, d\Omega_2 \right) \\
&= \kappa_1 \int_{\partial\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1|_{\partial\Omega_1} v_1|_{\partial\Omega_1} \, d\Gamma + \kappa_2 \int_{\partial\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_2|_{\partial\Omega_2} v_2|_{\partial\Omega_2} \, d\Gamma.
\end{aligned}$$

Par définition v s'annule sur la frontière $\partial\Omega$. Ainsi, le support de $v|_{\partial\Omega_i}$ est inclus dans l'interface Σ, pour $i = 1, 2$. On peut donc remplacer dans ce cas les intégrales sur $\partial\Omega_i$ par des intégrales sur Σ. Notons enfin que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ sur Σ. Il reste donc

$$\int_\Sigma g\, v|_\Sigma \, d\Sigma = \int_\Sigma (\kappa_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1|_\Sigma - \kappa_2 \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_1|_\Sigma)\, v|_\Sigma \, d\Sigma, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On admet comme dans le cours que ceci implique (car l'ensemble des traces sur l'interface Σ d'éléments de $H^1_0(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Sigma)$)

$$(\kappa_1 \nabla u_1 - \kappa_2 \nabla u_2) \cdot \mathbf{n}_1 = g \text{ dans } L^2(\Sigma).$$

On en déduit finalement que

$$(\kappa_1 \nabla u_1 - \kappa_2 \nabla u_2) \cdot \mathbf{n}_1 = g \text{ presque partout sur } \Sigma.$$

$\diamond$ **Remarque (qui sort du cadre du cours) :** Ici, $v_i := v|_{\Omega_i}$ pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma g\, v|_\Sigma \, d\Sigma &= \int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \\
&= \kappa_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, d\Omega_1 + \kappa_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, d\Omega_2 \\
&= \kappa_1 \left({}_{H^{-1/2}(\partial\Omega_1)}< \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1|_{\partial\Omega_1}, v_1|_{\partial\Omega_1} >_{H^{1/2}(\partial\Omega_1)} - \int_{\Omega_1} \Delta u_1 \, v_1 \, d\Omega_1 \right) \\
&\quad + \kappa_2 \left({}_{H^{-1/2}(\partial\Omega_2)}< \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_2|_{\partial\Omega_2}, v_2|_{\partial\Omega_2} >_{H^{1/2}(\partial\Omega_2)} - \int_{\Omega_2} \Delta u_2 \, v_2 \, d\Omega_2 \right) \\
&= \kappa_1 \, {}_{H^{-1/2}(\partial\Omega_1)}< \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1, v_1 >_{H^{1/2}(\partial\Omega_1)} + \kappa_2 \, {}_{H^{-1/2}(\partial\Omega_2)}< \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_2, v_2 >_{H^{1/2}(\partial\Omega_2)} .
\end{aligned}$$

Par définition v s'annule sur la frontière $\partial\Omega$. Ainsi, le support de $v|_{\partial\Omega_i}$ est inclus dans l'interface Σ, pour $i = 1, 2$. On peut donc remplacer dans ce cas les crochets de dualité (entre espaces fonctionnels définis) sur $\partial\Omega_i$ par des crochets de dualités (entre espaces fonctionnels définis) sur Σ. Et de même pour le membre de gauche. Notons enfin que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ sur Σ. Il reste donc

$${}_{H^{-1/2}(\Sigma)}< g, v|_\Sigma >_{H^{1/2}(\Sigma)} = {}_{H^{-1/2}(\Sigma)}< (\kappa_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1|_\Sigma - \kappa_2 \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_1|_\Sigma), v|_\Sigma >_{H^{1/2}(\Sigma)}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

Par surjectivité de l'ensemble des traces sur l'interface Σ d'éléments de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Sigma)$, on trouve

$$\kappa_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \kappa_2 \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_1 = g \text{ dans } H^{-1/2}(\Sigma).$$

Comme $g \in L^2(\Sigma)$, on en déduit finalement que

$$\kappa_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \kappa_2 \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_1 = g \text{ presque partout sur } \Sigma.$$

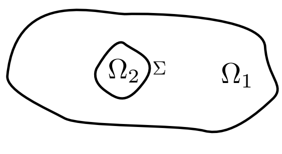

FIGURE 1 – Un exemple de domaine Ω.