

## Séance 1 : Outils et manipulations élémentaires

Dans l'exercice 1, l'objectif est de manipuler certaines formules de Green. Dans l'exercice 2, on utilise la dérivation au sens des distributions pour identifier les fonctions qui appartiennent à l'espace de Sobolev  $H^1$ . Signalons que le résultat de la Question 4 est important et nous servira plus tard. Dans l'exercice 3, on démontre ce fameux théorème de prolongement par continuité des formes linéaires qui est utilisé dans tout le cours. Dans l'exercice 4, on démontre le théorème de trace dans plusieurs configurations et on voit que la trace d'une fonction est dans  $L^2(\partial\Omega)$  quand cette fonction est dans  $H^1(\Omega)$  mais pas si elle est seulement dans  $L^2(\Omega)$ . Dans l'exercice 5, on applique les formules de Green pour déduire une formulation variationnelle dans l'espace  $C^1(\bar{\Omega})$ .

Les exercices et/ou questions signalés par un  $\diamond$  peuvent être faits seulement dans un second temps.

### Exercice 1 Formules de Green

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , dont la frontière  $\partial\Omega$  est "régulière". On note  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure à la frontière.

**Question 0.** Parmi ces formules, quelle est celle qui est correcte

- (a) 
$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall w \in C^\infty(\bar{\Omega});$$
- (b) 
$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall w \in C^\infty(\bar{\Omega});$$
- (c) 
$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall w \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

**Question 1.** Etablir par le calcul l'équivalence entre les formules (1) et (2)

$$\int_{\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u v n_i d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall u, v \in C^\infty(\bar{\Omega}); \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} (u \operatorname{div} \mathbf{v} + \nabla u \cdot \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma, \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \forall \mathbf{v} \in C^\infty(\bar{\Omega})^3. \quad (2)$$

$\diamond$  **Question 2.** Soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux éléments de  $C^\infty(\bar{\Omega})^3$ . Etablir par le calcul la formule

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\Gamma.$$

**Exercice 2 Exemples d'éléments de  $H^1$** 

**Question 0.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3, \dots$ ), dont la frontière  $\partial\Omega$  est "régulière". On rappelle la définition des espaces  $L^2(\Omega)$  et  $H^1(\Omega)$

$$L^2(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ t.q. } \int_{\Omega} |f|^2 < +\infty\}$$

et

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \in \{1, \dots, d\}\}.$$

Quelle assertion est juste

- (a)  $\mathcal{C}^0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  et  $\mathcal{C}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$
- (b)  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$  et  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$
- (c)  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$  et  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ .

**Question 1.** Les fonctions définies respectivement par :

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } ]0, 1[ \\ 2 - x & \text{sur } ]1, 2[ \end{cases}, \quad w(x) = \begin{cases} a & \text{sur } ]0, 1[ \\ b & \text{sur } ]1, 2[ \end{cases}, \quad z(x) = x^p, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

appartiennent-elles à  $H^1(]0, 2[)$  ?

**Question 2.** Soit  $\omega = B(0, 1/2)$  la boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que la fonction définie par

$$u(x, y) = |\log(x^2 + y^2)|^k \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0)$$

appartient à  $H^1(\omega)$  si  $k < 1/2$ , alors qu'elle n'appartient pas à  $\mathcal{C}^0(\bar{\omega})$ , dès que  $k > 0$ .

**Question 3.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  : on le partitionne en  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ , où  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont deux ouverts disjoints. On considère  $v \in L^2(\Omega)$  telle que  $v|_{\Omega_i} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}_i)$ , pour  $i = 1, 2$ . Calculer  $\nabla v$  au sens faible et en déduire la condition nécessaire et suffisante pour que  $v \in H^1(\Omega)$ .

**Question 4.** Montrer que le résultat précédent s'étend aux fonctions  $v \in L^2(\Omega)$  telle que  $v|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$ , pour  $i = 1, 2$ . On utilisera le théorème de trace du cours : la trace d'une fonction de  $H^1(\Omega)$  sur  $\Gamma$ , une partie de mesure non nulle du bord, est dans  $L^2(\Gamma)$ .

**Exercice 3  $\diamond$  Prolongement par continuité**

Soient  $H$  un espace vectoriel normé réel et  $V$  un sous-espace vectoriel de  $H$ , tels que  $V$  soit dense dans  $H$ . Soit  $\ell$  une application linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{R}$ , pour laquelle il existe une constante  $C_\ell > 0$  telle que, pour tout  $v \in V$ , on ait  $|\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_H$ . Montrer que l'on peut prolonger par continuité de façon unique  $\ell$  en une application  $\ell$  linéaire et continue de  $H$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 4 Théorème de trace****Question 1.** Soit

$$\begin{aligned} \gamma_* : \mathcal{C}^1([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto v(0). \end{aligned}$$

Montrer que

$$\forall v \in \mathcal{C}^1([0, 1]), |v(0)| \leq C \|v\|_{H^1(]0,1])}. \quad (3)$$

En utilisant l'exercice précédent, qu'en déduisez vous ?

*Indication : on pourra écrire que pour tout  $v$  dans  $\mathcal{C}^1([0, 1])$ ,  $v(0) = v(x) - \int_0^x v'(t) dt$ .*

**Question 2.** Montrer que l'inégalité (3) où on a remplacé la norme  $H^1$  par la norme  $L^2$  ne peut pas être vérifiée.**Question 3.** Soit  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  et  $\Gamma = \{0\} \times ]0, 1[$  une partie du bord  $\partial\Omega$ . En repartant du résultat de la Question 1, montrer que

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), \|v|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4)$$

Qu'en déduisez vous sur l'application trace sur  $\Gamma$  ? Faire de même en remplaçant  $\Gamma$  par  $\partial\Omega$ .**Question 4.** On considère la demi boule ouverte  $\omega = \{(x, y) \in B(0, 1/2), x > 0\}$  de  $\mathbb{R}^2$ . On a démontré à la question 2 de l'exercice 2 que la fonction définie par

$$u_k(x, y) = |\log(x^2 + y^2)|^k \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0)$$

n'appartient pas à  $C^0(\bar{\omega})$  si  $k > 0$ , mais elle appartient à  $L^2(\omega)$  et même à  $H^1(\omega)$  si  $k < 1/2$ .Est ce que  $u_{1/2}$  a une trace sur le bord de  $\omega$  ? Est ce que  $u_{1/4}$  en a une ? Et  $u_1$  ?**Exercice 5 Solutions classiques du Laplacien**Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , dont la frontière  $\partial\Omega$  est "régulière". On considère le problème aux limitesTrouver  $u$  telle que

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega & \text{(i)} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega & \text{(ii)} \end{cases} \quad (5)$$

Ci-dessus,  $f$  et  $g$  sont continues respectivement sur  $\bar{\Omega}$  et  $\partial\Omega$ .**Question 1.** On suppose que la solution  $u$  appartient à  $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  : c'est une solution dite "classique". Énoncer la formulation variationnelle (FV5) associée à (5), et posée dans l'espace  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ .**Question 2.** Par un calcul direct, montrer que (FV5) admet au plus une solution.

**Question 3.** Que pensez-vous de l'existence d'une solution de (FV5)? En identifiant la forme bilinéaire de (FV5) à un produit scalaire, dans quel espace fonctionnel faudrait-il se placer pour obtenir un problème bien posé, c'est-à-dire pour garantir l'existence et l'unicité de la solution?