Corrigé de la Séance 1 : Outils et manipulations élémentaires

`Dans l'exercice 1, l'objectif est de manipuler certaines formules de Green.`
`Dans l'exercice 2, on utilise la dérivation au sens des distributions pour identifier les fonctions qui appartiennent à l'espace de Sobolev` H^1`. Signalons que le résultat de la Question 4 est important et nous servira plus tard.`
`Dans l'exercice 3, on démontre ce fameux théorème de prolongement par continuité des formes linéaires qui est utilisé dans tout le cours.`
`Dans l'exercice 4, on démontre le théorème de trace dans plusieurs configurations et on voit que la trace d'une fonction est dans` $L^2(\partial\Omega)$ `quand cette fonction est dans` $H^1(\Omega)$ `mais pas si elle est seulement dans` $L^2(\Omega)$`.`
`Dans l'exercice 5, on applique les formules de Green pour déduire une formulation variationnelle dans l'espace` $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$`. .`

`Les exercices et/ou questions signalés par un` $\diamond$ `peuvent être faits seulement dans un second temps.`

Exercice 1 Formules de Green

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On note $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à la frontière.

Question 0. Parmi ces formules, quelle est celle qui est correcte

$$\textbf{(a)} \qquad \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w\, d\Gamma \ (1 \le i \le 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})\,;$$

$$\textbf{(b)} \qquad \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w n_i\, d\Gamma \ (1 \le i \le 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})\,;$$

$$\textbf{(c)} \qquad \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = -\int_{\partial\Omega} w n_i\, d\Gamma \ (1 \le i \le 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}).$$

Question 1. Etablir par le calcul l'équivalence entre les formules (1) et (2)

$$\int_\Omega (u\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} uvn_i\, d\Gamma \ (1 \le i \le 3), \quad \forall u, v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})\,; \tag{1}$$

$$\int_\Omega (u \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \nabla u \cdot \boldsymbol{v})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n})\, d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}), \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^3. \tag{2}$$

Corrigé de la question 1 : Rappels :

$$\forall \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^3,\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i},\ \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n} = \sum_{i=1}^3 v_i n_i\,; \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}),\ \nabla u = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Supposons la relation (1) vérifiée alors en particulier pour les composantes v_i de $\boldsymbol{v}$, elle donne

$$\int_\Omega (u\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u v_i n_i \, d\Gamma \ (1 \leq i \leq 3), \ \forall u, v_i \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \quad \forall\, 1 \leq i \leq 3\,,$$

soit en sommant sur i

$$\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega (u\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i)\, d\Omega = \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial\Omega} u v_i n_i \, d\Gamma, \quad \forall u, v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$$

d'où

$$\int_\Omega (u \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \sum_{i=1}^{3} v_i n_i \, d\Gamma, \quad \forall u, v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}).$$

On en déduit par définition

$$\int_\Omega (u \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} + \nabla u \cdot \boldsymbol{v})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n})\, d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}), \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^3.$$

Réciproquement si on suppose la relation (2) vérifiée alors par définition

$$\int_\Omega (u \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \sum_{i=1}^{3} v_i n_i \, d\Gamma, \ \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}), \ \forall \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^3.$$

En particulier pour $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ on trouve

$$\int_\Omega (u\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} v)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u v n_1 \, d\Gamma\,,$$

soit (1) pour $i = 1$. De la même façon, avec $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$ on obtient (1) pour $i = 2$ et avec $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$ on obtient (1) pour $i = 3$.

◇ **Question 2.** Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux éléments de $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^3$. Etablir par le calcul la formule

$$\int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} - \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{v} \, d\Gamma.$$

Corrigé de la question 2 : Soient $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^3$. montrons que

$$\int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} - \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{v} \, d\Gamma.$$

Rappels :

$$\forall \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^3, \quad \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\, d\Omega \quad &= \quad \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{3} u_i \,(\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v})_i \Big)\, d\Omega \\
&= \quad \int_\Omega u_1 \Big(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \Big) + u_2 \Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \Big) + u_3 \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \Big). \\
&\underset{(I.P.P.)}{=} \quad \int_\Omega \Big(- \frac{\partial u_1}{\partial x_2} v_3 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} v_2 \Big) + \Big(- \frac{\partial u_2}{\partial x_3} v_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} v_3 \Big) + \Big(- \frac{\partial u_3}{\partial x_1} v_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} v_1 \Big). \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega} \Big(u_1 (v_3 n_2 - v_2 n_3) + u_2 (v_1 n_3 - v_3 n_1) + u_3 (v_2 n_1 - v_1 n_2) \Big)\, d\Gamma \\
&= \quad \int_\Omega v_1 \Big(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big) + v_2 \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \Big) + v_3 \Big(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big). \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega} \Big(v_1 (u_2 n_3 - u_3 n_2) + v_2 (u_3 n_1 - u_1 n_3) + v_3 (u_1 n_2 - u_2 n_1) \Big)\, d\Gamma \\
&= \quad \int_\Omega (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{v}\, d\Gamma
\end{aligned}$$

Exercice 2 Exemples d'éléments de H^1

Question 0. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3, \ldots$), dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On rappelle la définition des espaces $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$

$$L^2(\Omega) = \{ f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ t.q. } \int_\Omega |f|^2 < +\infty \}$$

et

$$H^1(\Omega) = \big\{ f \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \forall i \in \{1, \ldots, d\} \big\}.$$

Quelle assertion est juste

(a) $\mathcal{C}^0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et $\mathcal{C}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$

(b) $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$

(c) $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.

Question 1. Les fonctions définies respectivement par :

$$v(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{sur }]0,1[\\ 2-x & \text{sur }]1,2[\end{array} \right. , \quad w(x) = \left\{ \begin{array}{ll} a & \text{sur }]0,1[\\ b & \text{sur }]1,2[\end{array} \right. , \quad z(x) = x^p, \ p \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

appartiennent-elles à $H^1(]0,2[)$?

Corrigé de la question 1 : Ici on doit dériver au sens des distributions, et vérifier que le résultat appartient à $L^2(]0,2[)$.

Pour la fonction v, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]0,2[)$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial v}{\partial x}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(]0,2[),\mathcal{D}(]0,2[)} &= -\left\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_{\mathcal{D}'(]0,2[),\mathcal{D}(]0,2[)} \\
&= -\int_{]0,2[} v \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = -\int_{]0,1[} v \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx - \int_{]1,2[} v \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx \\
&= -\int_{]0,1[} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx - \int_{]1,2[} (2-x) \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx \underset{(I.P.P.)}{=} -\varphi(1) + \left[\varphi(1) - \int_{]1,2[} \varphi\, dx \right] \\
&= -\int_{]0,2[} \chi_{]1,2[} \varphi\, dx
\end{aligned}$$

avec $\chi_{]1,2[}$ la fonction indicatrice de $]1,2[$ qui appartient bien à $L^2(]0,2[)$.

Pour la fonction w, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]0,2[)$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial w}{\partial x}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(]0,2[),\mathcal{D}(]0,2[)} &= -\left\langle w, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_{\mathcal{D}'(]0,2[),\mathcal{D}(]0,2[)} \\
&= -\int_{]0,2[} w \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = -\int_{]0,1[} w \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx - \int_{]1,2[} w \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx \\
&= -\int_{]0,1[} a \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx - \int_{]1,2[} b \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx \underset{(I.P.P.)}{=} -a\varphi(1) + b\varphi(1) \\
&= \left\langle (b-a)\delta_{x=1}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(]0,2[),\mathcal{D}(]0,2[)}
\end{aligned}$$

Si $b = a$ alors de manière évidente $w \in H^1(]0,2[)$. Sinon, comme une masse de Dirac n'est pas mesurable, $w \notin H^1(]0,2[)$.

Pour la fonction z. Elle est de carré intégrable si et seulement si x^{2p} est intégrable c'est-à-dire si et seulement si $p > -1/2$. De même, sa dérivée $\frac{\partial z}{\partial x} = px^{p-1}$ est de carré rintégrable si et seulement si $p > 1/2$. On en déduit

$$z \in H^1(]0,2[) \quad \Leftrightarrow \quad p > 1/2$$

Question 2. Soit $\omega = B(0, 1/2)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction définie par

$$u(x,y) = |\log(x^2+y^2)|^k \text{ pour } (x,y) \neq (0,0)$$

appartient à $H^1(\omega)$ si $k < 1/2$, alors qu'elle n'appartient pas à $\mathcal{C}^0(\bar{\omega})$, dès que $k > 0$.

Corrigé de la question 2 : On montre que (en introduisant les coordonnées polaires c'est à dire en posant $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$)

$$\int_{B(0,1/2)} |\log(x^2+y^2)|^{2k}\, dx\, dy = 2^{2k} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} (\log(r))^{2k}\, r dr\, d\theta.$$

Pour tout k, $r \mapsto (\log(r))^{2k}\, r$ tend vers 0 quand r tend vers 0 donc u est dans $L^2(B(0,1/2))$ pour tout k. Pour savoir si u est dans H^1, on calcule son gradient et on déduit que u est dans H^1 si et seulement si

$$\int_{B(0,1/2)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) dx\, dy < +\infty$$

c'est à dire

$$2^{2k} k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \frac{(\log(r))^{2k-2}}{r^2}\, r dr\, d\theta < +\infty.$$

La primitive de $r^{-1}\log(r)^{2k-2}$ est $(2k-1)^{-1}\log(r)^{2k-1}$ donc l'intégrale précédente est finie si et seulement si $2k-1 < 0$. Pour $k \in (0,1/2)$, on a donc u qui est H^1 sans être continue.

Question 3. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$: on le partitionne en $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints. On considère $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v_{|\Omega_i} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}_i)$, pour $i = 1, 2$. Calculer ∇v au sens faible et en déduire la condition nécessaire et suffisante pour que $v \in H^1(\Omega)$.

Corrigé de la question 3 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$: on le partitionne en $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints. On considère $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v_{|\Omega_i} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}_i)$, pour $i = 1, 2$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que $v \in H^1(\Omega)$.

On sait pour commencer que $v \in L^2(\Omega)$. On va calculer ∇v au sens faible. On pose $v_i = v_{|\Omega_i}$ puis on dérive au sens des distributions. Pour toute fonction $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^N$

$$\begin{aligned}
\Big\langle \nabla v, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^N, \mathcal{D}(\Omega)^N} &= \sum_{i=1}^N \Big\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi_i \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = -\sum_{i=1}^N \Big\langle v, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\
&= -\Big\langle v, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\
&= -\int_\Omega v \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega = -\int_{\Omega_1} v_1 \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} v_2 \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega_2
\end{aligned}$$

En intégrant par parties et en isolant les intégrales sur le bord, pour toute fonction $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^N$

$$\Big\langle \nabla v, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^N, \mathcal{D}(\Omega)^N} = \int_{\Omega_1} \nabla v_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \nabla v_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega_2 - \int_{\partial\Omega_1} v_1 \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_1 d\Gamma_1 - \int_{\partial\Omega_2} v_2 \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_2 d\Gamma_2$$

où $\boldsymbol{n}_1$ (respectivement $\boldsymbol{n}_2$) est la normale extérieure à $\partial\Omega_1$ (respectivement $\partial\Omega_2$). Comme $\boldsymbol{\varphi}$ est à support compact elle s'annule sur la frontière et donc en notant $\Gamma_{1-2} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, on a

$$-\int_{\partial\Omega_1} v_1 \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_1 d\Gamma_1 - \int_{\partial\Omega_2} v_2 \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_2 d\Gamma_2 = -\int_{\Gamma_{1-2}} (v_1 - v_2) \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_1\, d\Gamma_{1-2}$$

car $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$ en tout point de Γ_{1-2} et $\boldsymbol{\varphi}$ est continue à la traversée de Γ_{1-2}. On a donc

$$\Big\langle \nabla v, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^N, \mathcal{D}(\Omega)^N} = \int_{\Omega_1} \nabla v_1 \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \nabla v_2 \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\Omega_2 - \int_{\Gamma_{1-2}} (v_1 - v_2) \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_1 \, d\Gamma_{1-2}$$

soit

$$\nabla v = \chi_{\Omega_1} \nabla v_1 + \chi_{\Omega_2} \nabla v_2 - \delta_{\Gamma_{1-2}} \big(v_1\big|_{\Gamma_{1-2}} - v_2\big|_{\Gamma_{1-2}}\big) \boldsymbol{n}_1$$

où χ_{Ω_i} est la fonction caractéristique de Ω_i et δ est la distribution Dirac. C'est la formule des sauts !

Comme $\delta_{\Gamma_{1-2}}$ n'est pas dans $L^2(\Omega)$ et que $\chi_{\Omega_i} \nabla v_i$ est dans $L^2(\Omega)$, on trouve que v est dans $H^1(\Omega)$ si et seulement si v est continue à la traversée de Γ_{1-2}, c'est à dire $v_1\big|_{\Gamma_{1-2}} = v_2\big|_{\Gamma_{1-2}}$. Dans ce cas, on a

$$\nabla v = \begin{cases} \nabla v_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ \nabla v_2 & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}$$

Question 4. Montrer que le résultat précédent s'étend aux fonctions $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v_{|\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$. On utilisera le théorème de trace du cours : la trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur Γ, une partie de mesure non nulle du bord, est dans $L^2(\Gamma)$.

Corrigé de la question 4 : La démonstration de la question précédente s'étend naturellement aux fonctions $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v_{|\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$. En effet, pour toute fonction $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, on trouve

$$\Big\langle \nabla v, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^N, \mathcal{D}(\Omega)^N} = \int_{\Omega_1} \nabla v_1 \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \nabla v_2 \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\Omega_2 - \int_{\Gamma_{1-2}} (v_1 - v_2) \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_1 \, d\Gamma_{1-2}$$

où $\boldsymbol{n}_1$ est la normale extérieure à $\partial\Omega_1$ et où $v_1\big|_{\Gamma_{1-2}}$ et $v_2\big|_{\Gamma_{1-2}}$ sont dans $L^2(\Gamma_{1-2})$. On a donc

$$\nabla v = \mathbb{1}_{\Omega_1} \nabla v_1 + \mathbb{1}_{\Omega_2} \nabla v_2 - \delta_{\Gamma_{1-2}} (v_1 - v_2) \boldsymbol{n}_1$$

On conclut que v est dans $H^1(\Omega)$ si et seulement si $v_1\big|_{\Gamma_{1-2}} = v_2\big|_{\Gamma_{1-2}}$. Dans ce cas, on a

$$\nabla v = \begin{cases} \nabla v_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ \nabla v_2 & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}$$

Exercice 3 $\diamond$ Prolongement par continuité

Soient H un espace vectoriel normé réel et V un sous-espace vectoriel de H, tels que V soit dense dans H. Soit ℓ une application linéaire de V dans $\mathbb{R}$, pour laquelle il existe une constante $C_\ell > 0$ telle que, pour tout $v \in V$, on ait $|\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_H$. Montrer que l'on peut prolonger par continuité de façon unique ℓ en une application $\tilde{\ell}$ linéaire et continue de H dans $\mathbb{R}$.

Corrigé de la question : On raisonne en plusieurs étapes (simples) :

— Rappel : définition du prolongement par continuité $\tilde{\ell}$.
Soit $h \in H$. Par densité, il existe une suite d'éléments de V, notée $(v_k)_k$, telle que $\lim_{k\to\infty} \|v_k - h\|_H = 0$. Soit $(z_k)_k$ la suite de réels définie par $z_k = \ell(v_k)$ pour tout k. Etudions $(z_k)_k$:

$$|z_k - z_m| = |\ell(v_k) - \ell(v_m)| \overset{\ell \text{ lin.}}{=} |\ell(v_k - v_m)| \leq C_\ell \|v_k - v_m\|_H.$$

Comme $(v_k)_k$ converge (vers h) dans H, c'est en particulier une suite de Cauchy, c'est-à-dire que $\lim_{k,m\to\infty} \|v_k - v_m\|_H = 0$. Ainsi, $(z_k)_k$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Or, $\mathbb{R}$ est complet : $(z_k)_k$ est donc convergente. A partir de là, on définit le prolongement par continuité de ℓ en h comme étant égal à la limite de $(z_k)_k$:

$$\tilde{\ell}(h) = \lim_k \ell(v_k).$$

Bien sûr, on peut effectuer le même raisonnement pour tout élément h de H, ce qui permet de construire $\tilde{\ell}\ :\ H \to \mathbb{R}$.

— Unicité du prolongement $\tilde{\ell}$.
Reprenons le processus précédent de construction... Pour $h \in H$, soient deux suites d'éléments de V, $(v_k)_k$ et $(v'_k)_k$, convergeant vers h. Vérifions maintenant que la définition de $\tilde{\ell}(h)$ est indépendante de la suite choisie, ce qui prouvera l'unicité :

$$|\lim_k \ell(v_k) - \lim_k \ell(v'_k)| = |\lim_k \{\ell(v_k) - \ell(v'_k)\}| \overset{\ell \text{ lin.}}{=} |\lim_k \ell(v_k - v'_k)|.$$

Or, $|\ell(v_k - v'_k)| \leq C_\ell \|v_k - v'_k\|_H$, et $\lim_k \|v_k - v'_k\|_H = 0$ par inégalité triangulaire ($\|v_k - v'_k\|_H \leq \|v_k - h\|_H + \|h - v'_k\|_H$). On en conclut que $\lim_k \ell(v_k) = \lim_k \ell(v'_k)$.

— Linéarité du prolongement $\tilde{\ell}$.
On obtient la linéarité en passant à la limite. Soient $h^1, h^2 \in H$, $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$: par densité, il existe $(v_k^1)_k$ et $(v_k^2)_k$ deux suites d'éléments de V, qui convergent respectivement vers h^1 et h^2 dans H, et

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}(\alpha^1 h^1 + \alpha^2 h^2) &= \lim_k \ell(\alpha^1 v_k^1 + \alpha^2 v_k^2) \\ &\overset{\ell \text{ lin.}}{=} \lim_k \{\alpha^1 \ell(v_k^1) + \alpha^2 \ell(v_k^2)\} = \alpha^1 \tilde{\ell}(h^1) + \alpha^2 \tilde{\ell}(h^2).\end{aligned}$$

— Continuité du prolongement $\tilde{\ell}$ de H dans $\mathbb{R}$.
On veut prouver : $\exists C > 0,\ \forall h \in H,\ |\tilde{\ell}(h)| \leq C\|h\|_H$. Pour cela, $h \in H$ étant donné, soit $(v_k)_k$ une suite d'éléments de V qui converge vers h dans H. On écrit

$$|\tilde{\ell}(h)| = |\lim_k \ell(v_k)| = \lim_k |\ell(v_k)|\,;$$

or, pour tout k, $|\ell(v_k)| \leq C_\ell \|v_k\|_H$. Comme $\lim_k \|v_k\|_H = \|h\|_H$, on en conclut que

$$|\tilde{\ell}(h)| \leq C_\ell \|h\|_H.$$

NB. Le module de continuité est identique pour ℓ et pour son prolongement $\tilde{\ell}$.
NB(bis). On a le même résultat pour des espaces de Banach définis sur $\mathbb{C}$...

Exercice 4 Théorème de trace

Question 1. Soit

$$\begin{array}{rccc} \gamma_\star : & \mathcal{C}^1([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & v(0). \end{array}$$

Montrer que

$$\forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]),\ |v(0)| \leq C\, \|v\|_{H^1(]0,1[)}. \tag{3}$$

En utilisant l'exercice précédent, qu'en déduisez vous ?

Indication : on pourra écrire que pour tout v dans $\mathcal{C}^1([0,1])$, $v(0) = v(x) - \int_0^x v'(t)\, dt$.

Corrigé de la question 1 : Ici, on choisit respectivement :

$$H = H^1(]0,1[), \text{ muni de la norme } \|v\|_{H^1(]0,1[)} := \left\{ \int_0^1 v^2\, dx + \int_0^1 (v')^2\, dx \right\}^{1/2},$$
$$V = C^1([0,1])\,;$$

en effet, $C^1([0,1])$ est dense dans $H^1(]0,1[)$ d'après la proposition 1.7 p. 16 du poly.
Soit maintenant $v \in C^1([0,1])$: on écrit comme indiqué

$$v(0) = v(x) - \int_0^x v'(t)\, dt \implies |v(0)| \leq |v(x)| + \left| \int_0^x v'(t)\, dt \right|.$$

On commence par majorer le second terme, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x v'(t)\, dt \right| &\leq \int_0^x |v'(t)|\, dt \leq \left(\int_0^x 1\, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x |v'(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{x} \left(\int_0^x |v'(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \leq 1 \times \left(\int_0^1 |v'(t)|^2\, dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour faire de même pour le premier terme ($|v(x)|$), on utilise une "astuce" qui permet de passer à une intégrale :

$$|v(0)| = \int_0^1 |v(0)|\, dx\ !$$

La majoration du premier terme "intégré" donne alors

$$\int_0^1 |v(x)|\, dx \leq 1 \times \left(\int_0^1 |v(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

On en conclut que, pour tout élément v de $C^1([0,1])$, on a la majoration

$$|v(0)| \leq \left(\int_0^1 |v(x)|^2\, dx \right)^{1/2} + 1 \times \left(\int_0^1 |v'(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \|v\|_{H^1(]0,1[)}.$$

où pour la dernière inégalité, on a utilisé $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Conclusion : d'après l'exercice précédent, on peut prolonger l'application trace $\gamma_\star$: $v \mapsto v(0)$ de façon unique en une application linéaire et continue de $H^1(]0,1[)$ dans $\mathbb{R}$.

Question 2. Montrer que l'inégalité (3) où on a remplacé la norme H^1 par la norme L^2 ne peut pas être vérifiée.

Corrigé de la question 2 : Soit $(v_m)_{m\geq 1}$ la suite d'éléments de $L^2(]0,1[)$ définie par $v_m(x) = e^{-mx}$. Par un calcul direct :

$$\int_0^1 v_m^2\, dx = \int_0^1 e^{-2mx}\, dx = \left[\frac{1}{-2m} e^{-2mx}\right]_0^1 = \frac{1}{2m}(1 - e^{-2m}).$$

Ainsi $\lim_{m\to\infty} \|v_m\|_{L^2(]0,1[)} = 0$, alors que $v_m(0) = 1$ pour tout $m \geq 1$. On ne peut donc pas trouver de constante $C > 0$ telle que, pour tout $m \geq 1$, on ait $|v_m(0)| \leq C\, \|v_m\|_{L^2(]0,1[)}$.

Question 3. Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ et $\Gamma = \{0\}\times]0,1[$ une partie du bord $\partial\Omega$. En repartant du résultat de la Question 1, montrer que

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \quad \|v|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\, \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4}$$

Qu'en déduisez vous sur l'application trace sur Γ ? Faire de même en remplaçant Γ par $\partial\Omega$.

Corrigé de la question 3 : D'après la question 1, on a

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \quad |v(0,y)|^2 \leq 2\left(\int_0^1 |v(x,y)|^2\, dx + \int_0^1 |\partial_x v(x,y)|^2\, dx\right)$$

et en intégrant par rapport à y, on trouve

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \quad \int_\Gamma |v|_\Gamma|^2 d\Gamma := \int_0^1 |v(0,y)|^2\, dy \leq 2\left(\int_\Omega |v|^2\, d\Omega + \int_\Omega |\partial_x v|^2\, d\Omega\right) \leq 2\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

D'après l'exercice précédent, on peut prolonger l'application trace $\gamma_\Gamma \ :\ v \mapsto v|_\Gamma$ de façon unique en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

En utilisant la même approche que précédemment et en notant $\Gamma_i,\ i = 1,2,3,4$ les côtés du carré Ω, on montre que

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \quad \|v|_{\Gamma_i}\|^2_{L^2(\Gamma_i)} \leq 2\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

soit

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \quad \|v|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \sum_{i=1}^4 \|v|_{\Gamma_i}\|^2_{L^2(\Gamma_i)} d\Gamma \leq 8\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

D'après l'exercice précédent, on peut prolonger l'application trace $\gamma \ :\ v \mapsto v|_{\partial\Omega}$ de façon unique en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

Question 4. On considère la demi boule ouverte $\omega = \{(x,y) \in B(0,1/2), x > 0\}$ de $\mathbb{R}^2$. On a démontré à la question 2 de l'exercice 2 que la fonction définie par

$$u_k(x,y) = |\log(x^2+y^2)|^k \text{ pour } (x,y) \neq (0,0)$$

n'appartient pas à $C^0(\bar{\omega})$ si $k > 0$, mais elle appartient à $L^2(\omega)$ et même à $H^1(\omega)$ si $k < 1/2$.
Est ce que $u_{1/2}$ a une trace sur le bord de ω ? Est ce que $u_{1/4}$ en a une ? Et u_1 ?

Exercice 5 Solutions classiques du Laplacien
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On considère le problème aux limites
Trouver u telle que

$$\left\{ \begin{array}{lll} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega & \text{(i)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega & \text{(ii)} \end{array} \right. . \tag{5}$$

Ci-dessus, f et g sont continues respectivement sur $\bar{\Omega}$ et $\partial\Omega$.

Question 1. On suppose que la solution u appartient à $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$: c'est une solution dite "classique". Enoncer la formulation variationnelle (FV5) associée à (5), et posée *dans l'espace* $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$.

Corrigé de la question 1 : On suppose que la solution u appartient à $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. En multipliant (5)-(i) par $v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ et en intégrant sur Ω, on obtient facilement

$$\int_\Omega uv\, d\Omega - \int_\Omega \Delta u\, v\, d\Omega = \int_\Omega fv\, d\Omega, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$$

Une intégration par parties sur la deuxième intégrale donne

$$\int_\Omega uv\, d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega = \int_\Omega fv\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\Gamma, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$$

soit en utilisant la relation (5)-(ii)

$$\int_\Omega uv\, d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega = \int_\Omega fv\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} gv\, d\Gamma, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$$

Ainsi, pour $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ et $g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$, la formulation variationnelle obtenue est

$$\left| \begin{array}{l} \textit{Trouver } u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \textit{ telle que} \\ \displaystyle\int_\Omega uv\, d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega = \int_\Omega fv\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} gv\, d\Gamma, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \end{array} \right. \tag{FV5}$$

En résumé, si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ vérifie (5) alors u vérifie (FV5) puisque les formules de Green classiques sont valides.

Question 2. Par un calcul direct, montrer que (FV5) admet au plus une solution.

Corrigé de la question 2 : Soient u_1 et u_2 dans $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ deux solutions de (FV5), on a alors $w = u_1 - u_2 \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ qui vérifie

$$\int_\Omega wv \, d\Omega + \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, d\Omega = 0, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$$

soit en particulier pour $v = w$

$$\int_\Omega |w|^2 \, d\Omega + \int_\Omega |\nabla w|^2 \, d\Omega = 0.$$

On en déduit que $w = 0$: la solution de l'équation, si elle existe, est bien unique.

Question 3. Que pensez-vous de l'existence d'une solution de (FV5) ? En identifiant la forme bilinéaire de (FV5) à un produit scalaire, dans quel espace fonctionnel faudrait-il se placer pour obtenir un problème bien posé, c'est-à-dire pour garantir l'existence et l'unicité de la solution ?

Corrigé de la question 3 : On ne peut pas appliquer le theoreme de Lax Milgram dans $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. En effet, on sait que l'espace $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ muni de la norme

$$\|u\| = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| + \sum_{i=1}^{3} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|. \tag{6}$$

est complet mais cette norme ne dérive pas d'un produit scalaire. Si on le munit du produit scalaire naturel pour ce problème

$$\int_\Omega wv \, d\Omega + \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, d\Omega$$

il n'est pas complet.

Si maintenant on examine la formulation variationnelle (FV5), on constate que la forme bilinéaire associée est

$$(u, v) \mapsto \int_\Omega uv \, d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega$$

c'est-à-dire le produit scalaire canonique $\big(\cdot, \cdot\big)_{H^1(\Omega)}$. Il est donc naturel de se placer dans cet espace fonctionnel $H^1(\Omega)$. On obtient alors une nouvelle formulation variationnelle

$$\left| \begin{array}{l} \textit{Trouver } u \in H^1(\Omega) \textit{ telle que} \\ \displaystyle\int_\Omega uv \, d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega fv \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} gv \, d\Gamma, \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{FV5bis}$$

Or l'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $\big(\cdot, \cdot\big)_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert, ce qui permet d'appliquer le théorème de Riesz (ou de Lax-Milgram) pour établir l'existence et l'unicité de la solution. A posteriori, nous mesurons la solution selon la norme de $H^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \Big((u, u)_{H^1(\Omega)}\Big)^{1/2} = \Big(\int_\Omega |u|^2 \, d\Omega + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega\Big)^{1/2}$$