Introduction à la méthode des éléments finis

Résolution des formulations variationnelles

Sonia Fliss

Théorème de Lax Milgram

Soit $u \in V$ solution de

$$\text{Trouver } \underline{u \in V} \text{ telle que} \quad a(u, v) = \ell(v), \quad \underline{\forall v \in V} \qquad \text{(F.V.)}$$

On suppose que

- $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert
- a est une forme bilinéaire de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ qui est
  - continue $\exists M_a > 0, \ \forall v, w \in V, \quad |a(v, w)| \leq M_a \|v\|_V \, \|w\|_V$
  - coercive $\exists \alpha > 0, \ \forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$
- ℓ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ continue

$$\exists M_\ell > 0, \ \forall v \in V, \quad |\ell(v)| \leq M_\ell \|v\|_V$$

Il existe alors une unique solution u dans V de (F.V.), de plus cette solution u dépend continument des données

$$\|u\|_V \leq \frac{M_\ell}{\alpha}$$

Preuve du théorème de Lax Milgram

- Pour tout w dans V, l'application $a_w : v \mapsto a(w,v)$ est une forme linéaire continue sur V, donc il existe un élément de V noté A(w) tel que

$$a_w(v) = a(w,v) = (A(w),v)_V$$

La bilinéarité de a entraîne la linéarité de $A : w \mapsto A(w)$

La continuité de a entraîne la continuité de $A : w \mapsto A(w)$

$$\forall w \in V, \quad \|A(w)\|_V^2 = (A(w),A(w))_V = a(w,A(w)) \leq M_a \|w\|_V \, \|A(w)\|_V$$

$$\Rightarrow \quad \forall w \in V, \quad \|A(w)\|_V \leq M_a \, \|w\|_V$$

- Pour tout w dans V, l'application $v \mapsto \ell(v)$ est une forme linéaire continue sur V, donc il existe un élément de V noté f tel que

$$\ell(v) = (f,v)_V$$

La continuité de ℓ entraîne que $\|f\|_V \leq M_\ell$

Rappel : Soit V un espace de Hilbert réel. Pour toute forme linéaire continue $\mathcal{L} : v \mapsto \mathcal{L}(v)$ il existe un unique f dans V tel que $\mathcal{L}(v) = (f,v)_V$.

Preuve du théorème de Lax Milgram

- Pour tout w dans V, l'application $a_w : v \mapsto a(w, v)$ est une forme linéaire continue sur V, donc il existe un élément de V noté A(w) tel que

$$a_w(v) = a(w, v) = (A(w), v)_V$$

La bilinéarité de a entraîne la linéarité de $A : w \mapsto A(w)$

La continuité de a entraîne la continuité de $A : w \mapsto A(w)$

$$\forall w \in V, \quad \|A(w)\|_V^2 = (A(w), A(w))_V = a(w, A(w)) \leq M_a \|w\|_V \, \|A(w)\|_V$$

$$\Rightarrow \quad \forall w \in V, \quad \|A(w)\|_V \leq M_a \, \|w\|_V$$

- Pour tout w dans V, l'application $v \mapsto \ell(v)$ est une forme linéaire continue sur V, donc il existe un élément de V noté f tel que

$$\ell(v) = (f, v)_V$$

La continuité de ℓ entraîne que $\|f\|_V \leq M_\ell$

Le problème variationnel est équivalent à

Trouver $u \in V$ telle que $A(u) = f$

Preuve du théorème de Lax Milgram

Le problème variationnel est équivalent à

Trouver $u \in V$ telle que $A(u) = f$

Pour démontrer le théorème, il faut donc montrer que A est bijectif de V dans V (ce qui implique l'existence et l'unicité de u).

- La coercivité de a implique l'injectivité de A (et donc l'unicité de u)

$$\forall w \in V, \qquad \alpha \|w\|_V^2 \leq a(w,w) = (A(w), w)_V \underset{C.S.}{\leq} \|A(w)\|_V \, \|w\|_V$$

$$\Rightarrow \quad \forall w \in V, \quad \|A(w)\|_V \geq \alpha \, \|w\|_V \qquad (*)$$

- La surjectivité de A (et donc l'existence de u)

On montre tout d'abord que Im A est fermé.

Soit $(A(w_n))_n$ une suite de Im A qui converge vers $b \in V$. Est ce que $b \in \mathrm{Im} A$?

D'après (*), on a $\alpha \, \|w_n - w_p\|_V \leq \|A(w_n) - A(w_p)\|_V \longrightarrow 0$ quand $n, p \to +\infty$

Donc $(w_n)_n$ est une suite de Cauchy dans V, i.e. elle converge vers $w \in V$.

Par continuité de A, $(A(w_n))_n$ converge vers $A(w)$ et donc $A(w) = b$ et $b \in \mathrm{Im} A$.

Comme V est un espace de Hilbert et Im A est fermé alors $V = \mathrm{Im} A \oplus (\mathrm{Im} A)^{\perp}$

[Théorème admis] V un espace de Hilbert, F est un sev fermé alors $V = F \oplus F^{\perp}$

Soit $v \in (\mathrm{Im}\, A)^{\perp}$, la coercivité de a implique que $\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v,v) = (A(v), v)_V = 0 \Rightarrow v = 0$

$$\Rightarrow \ \mathrm{Im}\, A = V$$

Preuve du théorème de Lax Milgram

Le problème variationnel est équivalent à

Trouver $u \in V$ telle que $A(u) = f$

Autre démonstration

On montre que l'application T: $w \mapsto w - \rho(A(w) - f)$ avec $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{M^2}$ est contractante. En effet, on a

$$\begin{aligned}\|T(v) - T(w)\|_V^2 &= \|v - w - \rho A(v - w)\|_V^2 \\ &= \|v - w\|_V^2 - 2\rho\, a(v - w, v - w) + \rho^2 \|A(v - w)\|_V^2 \\ &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M_a^2)\, \|v - w\|_V^2 \\ &< \beta\, \|v - w\|_V^2 \quad \text{avec } 0 < \beta < 1\end{aligned}$$

Il existe alors une unique solution dans V de $T(u) = u$ (i.e. de $A(u) = f$)

C'est le théorème du point fixe de Picard:

En effet, soit une suite définie par $u_{k+1} = T(u_k)$, comme T est contractante cette suite est de Cauchy et comme V est un espace de Hilbert, elle converge vers une fonction u et

$T(u) = u$ car T est continue.

C'est la seule solution car T est contractante.

Preuve du théorème de Lax Milgram

- On vient de démontrer qu'il existe une unique solution de

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \quad a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \qquad \text{(F.V.)}$$

- Quant au résultat de stabilité...

On a en particulier

$$\underbrace{\alpha \|u\|_V^2 \leq}_{a \text{ est coercive}} \quad a(u,u) = \ell(u) \quad \underbrace{\leq}_{\ell \text{ est continue}} M_\ell \|u\|_V$$

soit

$$\boxed{\|u\|_V \leq \frac{M_\ell}{\alpha}}$$

Quelques remarques sur la coercivité

a est une forme bilinéaire de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ qui est coercive si

$$\exists \alpha > 0,\ \forall v \in V, \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2$$

- L'hypothèse "a coercive" ne peut pas être remplacée par a définie positive

$$\cancel{\forall v \in V, \quad a(v,v) > 0}$$

voir l'exo 1 du TD3.

- Si $\forall v \in V, \quad a(v,v) < 0$, il faut montrer la coercivité sur -a.

- Si $\exists v \in V \setminus \{0\}, \quad a(v,v) = 0$ alors a n'est pas coercive.

- Si $\exists v_n \in V \setminus \{0\}, \quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{a(v_n, v_n)}{\|v_n\|_V^2} = 0$ alors a n'est pas coercive.

Théorème de Lax Milgram complexe

Soit $u \in V$ solution de

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que } \quad a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \qquad \text{(F.V.)}$$

On suppose que

- $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert
- a est une forme sesquilinéaire de $V \times V$ dans $\mathbb{C}$

  $$\forall u, v, w \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad a(\lambda u + v, w) = \lambda a(u,w) + a(v,w)$$
  $$a(u, \lambda w + v) = \bar{\lambda}\, a(u,w) + a(u,v)$$

  - continue $\exists M_a > 0, \ \forall v, w \in V, \quad |a(v,w)| \leq M_a \|v\|_V \|w\|_V$
  - coercive $\exists \alpha > 0, \ \forall v \in V, \quad |a(v,v)| \geq \alpha \|v\|_V^2$
- ℓ est une forme anti-linéaire de V dans $\mathbb{C}$ continue

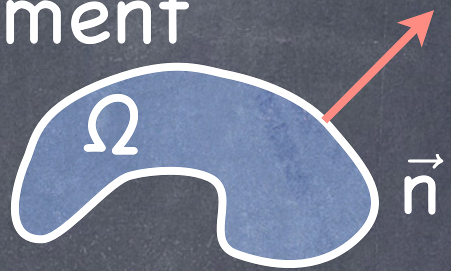
  $$\exists M_\ell > 0, \ \forall v \in V, \quad |\ell(v)| \leq M_\ell \|v\|_V$$

Il existe alors une unique solution u dans V de (F.V.), de plus cette solution u dépend continument des données

$$\|u\|_V \leq \frac{M_\ell}{\alpha}$$

Application au modèle avec C.L. de type Neumann- Fourier

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, $\lambda \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.



On veut résoudre

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que } \left| \begin{array}{ll} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot n + \lambda\, u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

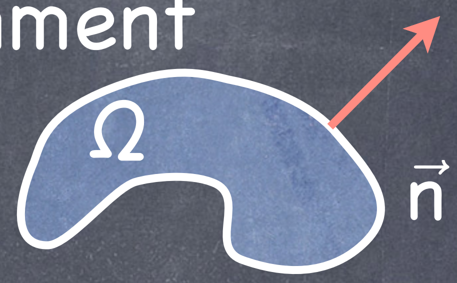
$$\Updownarrow$$

$$V = H^1(\Omega)$$

Trouver $u \in \boxed{H^1(\Omega)}$ telle que $\forall v \in \boxed{H^1(\Omega)}$,

$$\underbrace{\boxed{\int_\Omega \left[\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u\, v\right] d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u\, \gamma_0 v\, d\Gamma}}_{a(u,v)} = \underbrace{\boxed{\int_\Omega f\, v\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, \gamma_0 v\, d\Gamma}}_{\ell(v)}$$

Application au modèle avec C.L. de type Neumann- Fourier



Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, $\lambda \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left[\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u\, v\right] d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u\, \gamma_0 v\, d\Gamma = \int_\Omega f\, v\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, \gamma_0 v\, d\Gamma$$

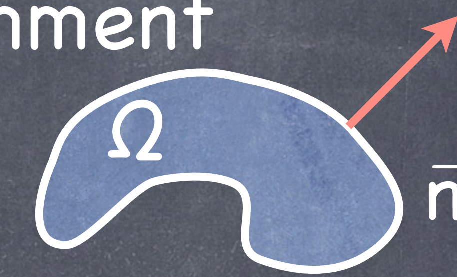
- $V = H^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

Rappel $\forall u, v \in H^1(\Omega)$

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(uv + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\right) d\Omega \qquad \|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\vec{\nabla} u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

Application au modèle avec C.L. de type Neumann- Fourier

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, $\lambda \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.



Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left[\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u\, v\right] d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u\, \gamma_0 v\, d\Gamma = \int_\Omega f\, v\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, \gamma_0 v\, d\Gamma$$

- a est une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ qui est
  - continue : $\forall v, w \in H^1(\Omega)$

$$|a(v,w)| = \left| \int_\Omega \left[\vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} w + v\, w\right] d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} \gamma_0 v\, \gamma_0 w\, d\Gamma \right|$$

$$\underset{\text{C.S.}}{\leq} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} + \lambda \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0 w\|_{L^2(\partial\Omega)}$$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\leq (1 + \lambda C_0^2) \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}$$ d'après la continuité de l'application trace

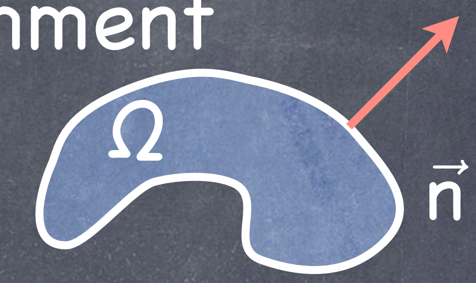
Rappel L'application trace $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ est continue :

$$v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$$

$$\exists C_0,\ \forall v \in H^1(\Omega),\ \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Application au modèle avec C.L. de type Neumann- Fourier

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, $\boxed{\lambda \geq 0}$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.



Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left[\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u\, v\right] d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u\, \gamma_0 v\, d\Gamma = \int_\Omega f\, v\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, \gamma_0 v\, d\Gamma$$

- a est une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ qui est
  - continue
  - coercive : $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$a(v,v) = \int_\Omega \left[\left|\vec{\nabla} v\right|^2 + v^2\right] d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 v)^2\, d\Gamma$$

$$= \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \lambda \|\gamma_0 v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \text{car } \lambda \geq 0$$

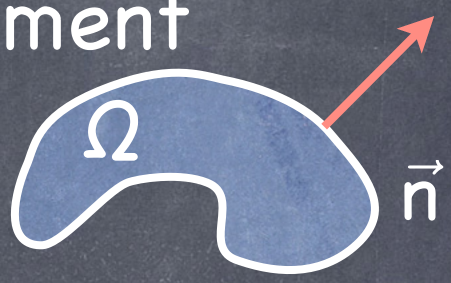
Remarque : pour $\lambda < 0$ mais $|\lambda| < 1/C_0^2$, a reste coercive :

$$a(v,v) = \|v\|^2_{H^1(\Omega)} - |\lambda| \|\gamma_0 v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq (1 - |\lambda| C_0^2)\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Rappel $\exists C_0,\ \forall v \in H^1(\Omega),\ \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$

Application au modèle avec C.L. de type Neumann- Fourier

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, $\lambda \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.



Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left[\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u\, v\right] d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u\, \gamma_0 v\, d\Gamma = \int_\Omega f\, v\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, \gamma_0 v\, d\Gamma$$

- ℓ est une forme linéaire sur $H^1(\Omega)$ qui est continue : $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$|\ell(v)| = \left| \int_\Omega f\, v\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, \gamma_0 v\, d\Gamma \right|$$

$$\underset{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

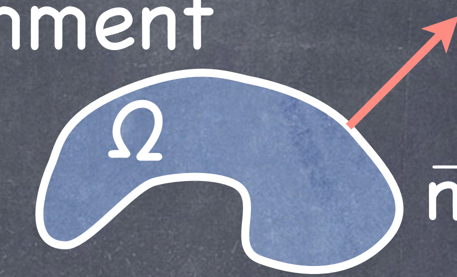
$$\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_0 \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right) \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

d'après la continuité de l'application trace

Rappel $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\vec{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$ $\quad \exists C_0,\ \forall v \in H^1(\Omega),\ \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$

Application au modèle avec C.L. de type Neumann- Fourier

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, $\lambda \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.



Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left[\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u\, v\right] d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u\, \gamma_0 v\, d\Gamma = \int_\Omega f\, v\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, \gamma_0 v\, d\Gamma$$

Toutes les hypothèses du théorème de Lax Milgram sont vérifiées.

Il existe donc une unique solution u dans $H^1(\Omega)$ de ce problème et

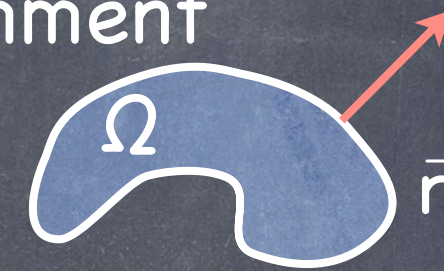
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_0 \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

Comme les problèmes sont équivalents, cette solution est également l'unique solution de

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que
$$\left| \begin{array}{ll} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot n + \lambda\, u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Application au modèle avec C.L. de type Dirichlet

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



On veut résoudre

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que } \left| \begin{array}{l} -\triangle u + u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

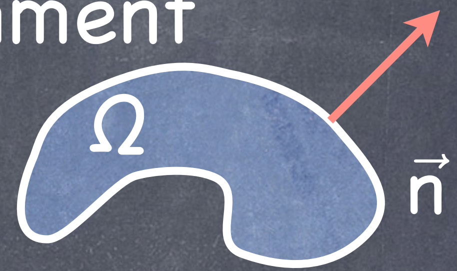
$$V = H^1_0(\Omega)$$

$$\text{Trouver } u \in \boxed{H^1_0(\Omega)} \text{ telle que } \forall v \in \boxed{H^1_0(\Omega)},$$

$$a(u,v) \longleftarrow \boxed{\int_\Omega \left[\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u\, v\right] d\Omega} = \boxed{\int_\Omega f\, v\, d\Omega} \longrightarrow \ell(v)$$

Application au modèle avec C.L. de type Dirichlet

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left[\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u\,v\right] d\Omega = \int_\Omega f\,v\,d\Omega$$

- $V = H_0^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert (en tant que sous-espace fermé d'un espace de Hilbert, $H^1(\Omega)$)
- a est une forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ qui est
    - continue : $\forall v, w \in H_0^1(\Omega)$

$$|a(v,w)| = \left| \int_\Omega \left[\vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} w + v\,w\right] d\Omega \right| \underset{\text{C.S.}}{\leq} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

    - coercive : $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

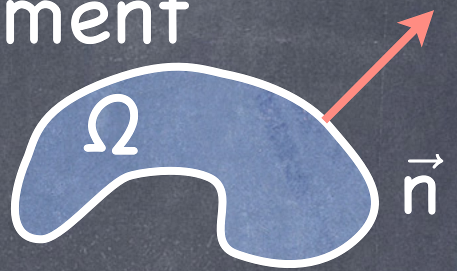
$$a(v,v) = \int_\Omega \left[\left|\vec{\nabla} v\right|^2 + v^2\right] d\Omega = \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

- ℓ est une forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$ qui est continue : $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$|\ell(v)| = \left| \int_\Omega f\,v\,d\Omega \right| \underset{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Application au modèle avec C.L. de type Dirichlet

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left[\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u\,v\right] d\Omega = \int_\Omega f\,v\,d\Omega$$

Toutes les hypothèses du théorème de Lax Milgram sont vérifiées.

Il existe donc une unique solution u dans $H_0^1(\Omega)$ de ce problème et

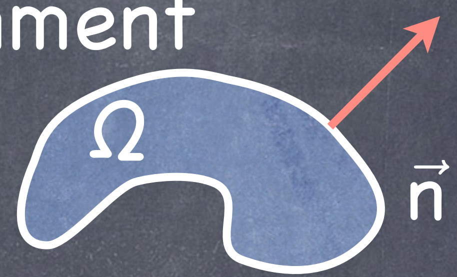
$$\boxed{\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}}$$

Comme les problèmes sont équivalents, cette solution est également l'unique solution de

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left|\begin{array}{l} -\triangle u + u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right.$

Application au 2ème modèle avec C.L. de type Dirichlet

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



On veut résoudre

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que } \left| \begin{array}{l} -\triangle u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$V = H_0^1(\Omega)$$

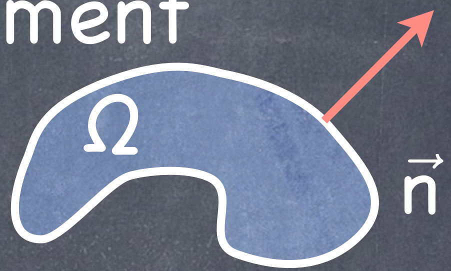
$$\text{Trouver } u \in \boxed{H_0^1(\Omega)} \text{ telle que } \forall v \in \boxed{H_0^1(\Omega)},$$

$$a(u, v) \longleftarrow \boxed{\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega} = \boxed{\int_\Omega f v \, d\Omega} \longrightarrow \ell(v)$$

Essayons de nouveau d'appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Application au 2ème modèle avec C.L. de type Dirichlet

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



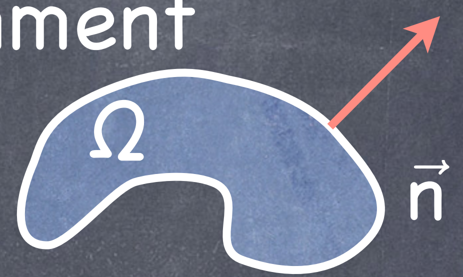
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

- $V = H_0^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert (en tant que sous-espace fermé d'un espace de Hilbert, $H^1(\Omega)$)

Application au 2ème modèle avec C.L. de type Dirichlet

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

- a est une forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ qui est
  - continue : $\forall v, w \in H_0^1(\Omega)$

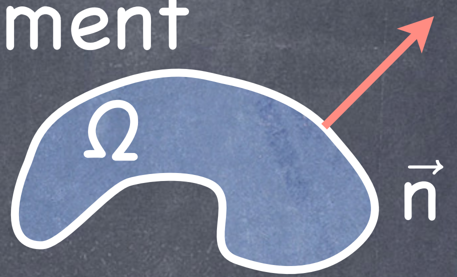
$$|a(v,w)| = \left| \int_\Omega \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} w \, d\Omega \right| \underset{\text{C.S.}}{\leq} \|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)} \|\vec{\nabla} w\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

Rappel $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\vec{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$

Application au 2ème modèle avec C.L. de type Dirichlet

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que $\forall v \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega$$

- a est une forme bilinéaire sur $H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ qui est
  - continue
  - coercive ?

$$\int_\Omega \left[\left| \vec{\nabla} v \right|^2 + v^2 \right] d\Omega$$

$$\exists ? \alpha > 0, \ \forall v \in \boxed{H^1_0(\Omega)}, \ a(v,v) = \int_\Omega \left| \vec{\nabla} v \right|^2 d\Omega \geq \alpha \boxed{\|v\|^2_{H^1(\Omega)}}$$

A priori la réponse est NON dans $H^1(\Omega)$!

Si v=C constante $\neq 0$, $\displaystyle\int_\Omega \left| \vec{\nabla} v \right|^2 d\Omega = 0$ MAIS $\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \text{mes}(\Omega) C^2 \neq 0$

Cependant, on cherche la propriété de coercivité dans $H^1_0(\Omega)$ et la seule fonction constante de $H^1_0(\Omega)$ est la fonction nulle.

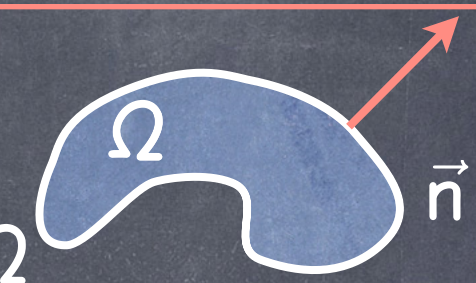
v=C constante $\in H^1_0(\Omega) \quad \Rightarrow \gamma_0(C) = 0 \quad \Rightarrow C = 0$

Inégalité de Poincaré

Théorème : Inégalité de POINCARÉ

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné

$$\exists C_p > 0,\ \forall v \in H^1_0(\Omega), \qquad \int_\Omega v^2\, d\Omega \le C_p \int_\Omega \left|\vec{\nabla} v\right|^2 d\Omega$$



Idée de la preuve : on le prouve pour $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ puis on conclut par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ ds $H^1_0(\Omega)$

Pour $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on prouve l'inégalité en 1D puis on raisonne par cartes locales(exo 2 - TD3)

- par l'absurde et en utilisant le théorème de Rellich (exo 5 - TD3)

Une telle inégalité est fausse dès que v est une constante non nulle.

En fait elle est vraie dans tous les espaces dans lesquels la seule fonction constante existante est la constante nulle.

$$\{v \in H^1(\Omega),\ v|_\Gamma = 0\} \quad \text{où } \Gamma \text{ est une partie de } \partial\Omega$$

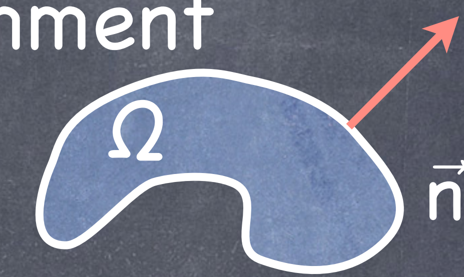
$$\{v \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega v = 0\}$$

Corollaire

Dans $H^1_0(\Omega)$, la semi-norme $|\cdot|_{H^1} := ||\nabla \cdot||_{L^2}$ est une norme équivalente à la norme $||\cdot||_{H^1} := [||\cdot||^2_{L^2} + ||\nabla\cdot||^2_{L^2}]^{1/2}$

Application au 2ème modèle avec C.L. de type Dirichlet

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

- a est une forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ qui est
  - continue
  - coercive ?

$$\int_\Omega \left[\left| \vec{\nabla} v \right|^2 + v^2 \right] d\Omega$$

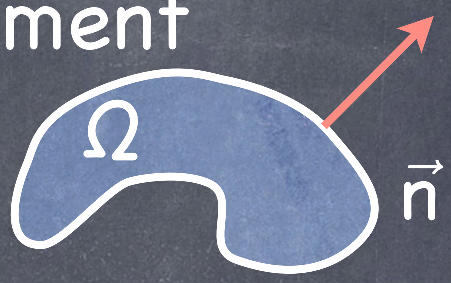
$$\exists ? \alpha > 0, \ \forall v \in \boxed{H_0^1(\Omega)}, \ a(v,v) = \int_\Omega \left| \vec{\nabla} v \right|^2 d\Omega \geq \alpha \boxed{\|v\|^2_{H^1(\Omega)}}$$

Application à notre problème:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[|\vec{\nabla} v|^2 + v^2 \right] d\Omega \leq (1 + C_p) \int_\Omega |\vec{\nabla} v|^2 d\Omega$$

Application au 2ème modèle avec C.L. de type Dirichlet

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

- a est une forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ qui est
    - continue
    - coercive ?

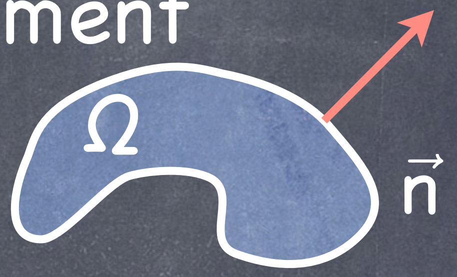
$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \; a(v,v) = \int_\Omega \left| \vec{\nabla} v \right|^2 d\Omega \geq \frac{1}{1+C_p} \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

- ℓ est une forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$ qui est continue : $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$|\ell(v)| = \left| \int_\Omega f v \, d\Omega \right| \underset{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Application au 2ème modèle avec C.L. de type Dirichlet

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

Toutes les hypothèses du théorème de Lax Milgram sont vérifiées.

Il existe donc une unique solution u dans $H_0^1(\Omega)$ de ce problème et

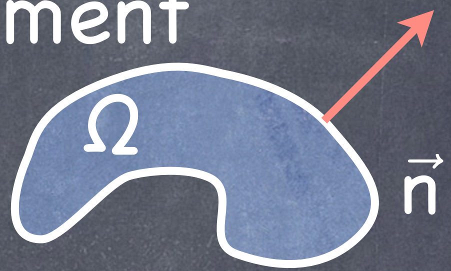
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C_p) \, \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Comme les problèmes sont équivalents, cette solution est également l'unique solution de

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{ll} -\triangle u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$

Application au 2ème modèle avec C.L. de type Neumann

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



On veut résoudre

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que } \left| \begin{array}{ll} -\triangle u = f & \text{dans } \Omega \\ \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$V = H^1(\Omega)$$

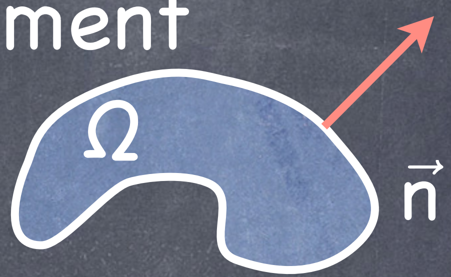
$$\text{Trouver } u \in \boxed{H^1(\Omega)} \text{ telle que } \forall v \in \boxed{H^1(\Omega)},$$

$$a(u,v) \longleftarrow \boxed{\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega} = \boxed{\int_\Omega f v \, d\Omega} \longrightarrow \ell(v)$$

Essayons de nouveau d'appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Application au 2ème modèle avec C.L. de type Neumann

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$,

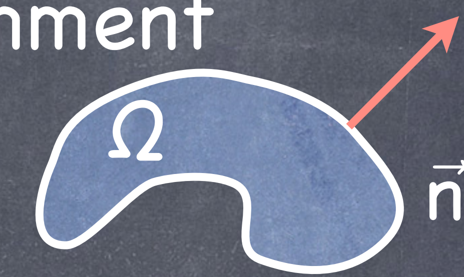
$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

- $V = H^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.
- a est une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ qui est
  - continue
- ℓ est une forme linéaire sur $H^1(\Omega)$ qui est continue

MAIS a n'est pas coercive sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ car l'inégalité de Poincaré n'est pas vraie dans $H^1(\Omega)$.

Voir l'exercice 4 pour plus de détails sur ce problème.

Application au 2ème modèle avec C.L. de type Neumann



Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega \qquad \text{(F.V.)}$$

On montre qu'il n'y a pas unicité de la solution…

On remarque que si u est solution, u+C où C est une constante est également solution.

… et pas nécessairement existence.

Si il existe une solution u dans $H^1(\Omega)$ alors $\displaystyle\int_\Omega f \, d\Omega = 0$

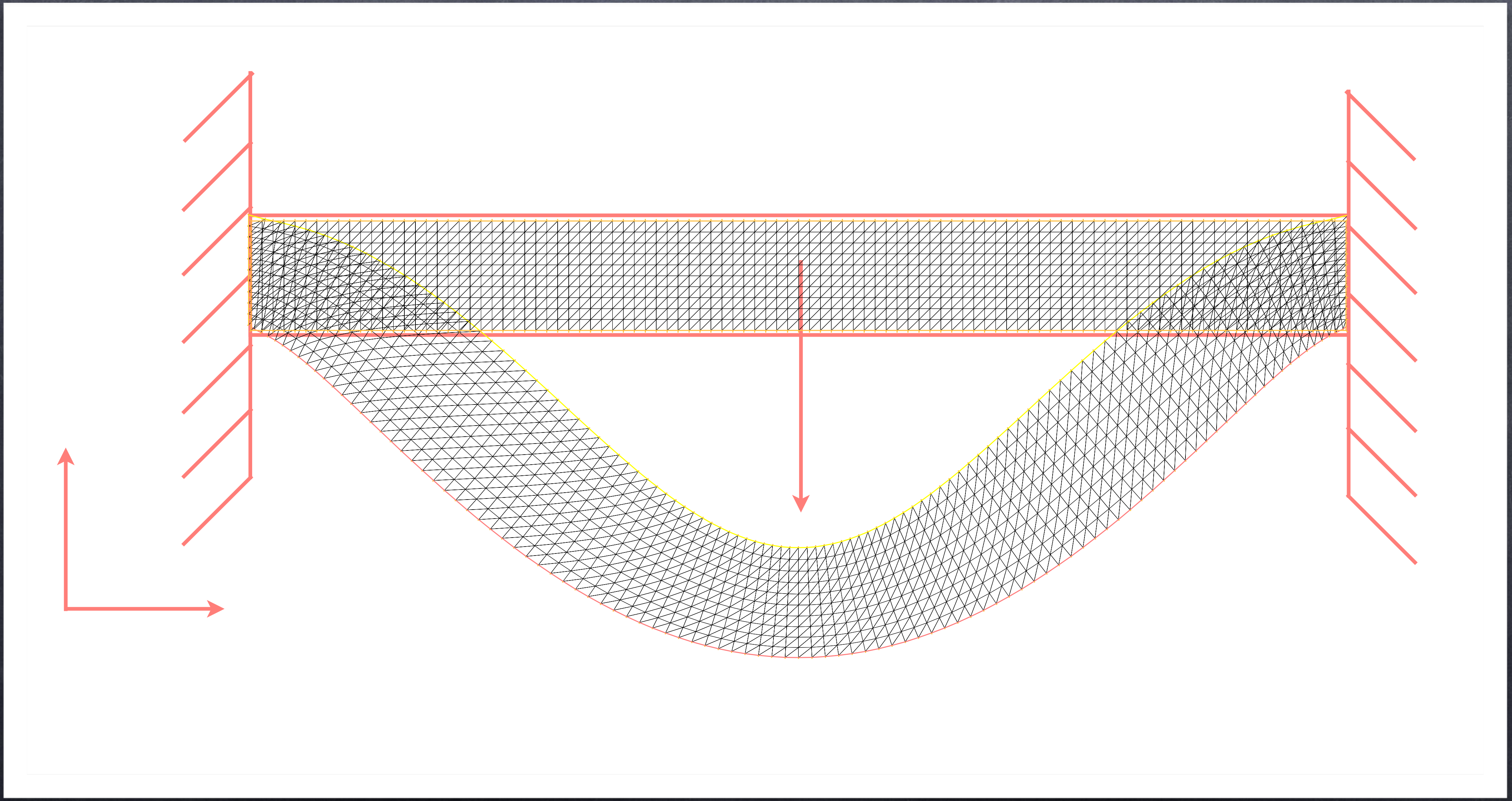
(en prenant dans (F.V.), $v = 1 \in H^1(\mathcal{C})$)

Si $\displaystyle\int_\Omega f \, d\Omega \neq 0$ alors il n'y a pas existence d'une solution dans $H^1(\Omega)$.

Voir l'exercice 4 pour plus de détails sur ce problème.

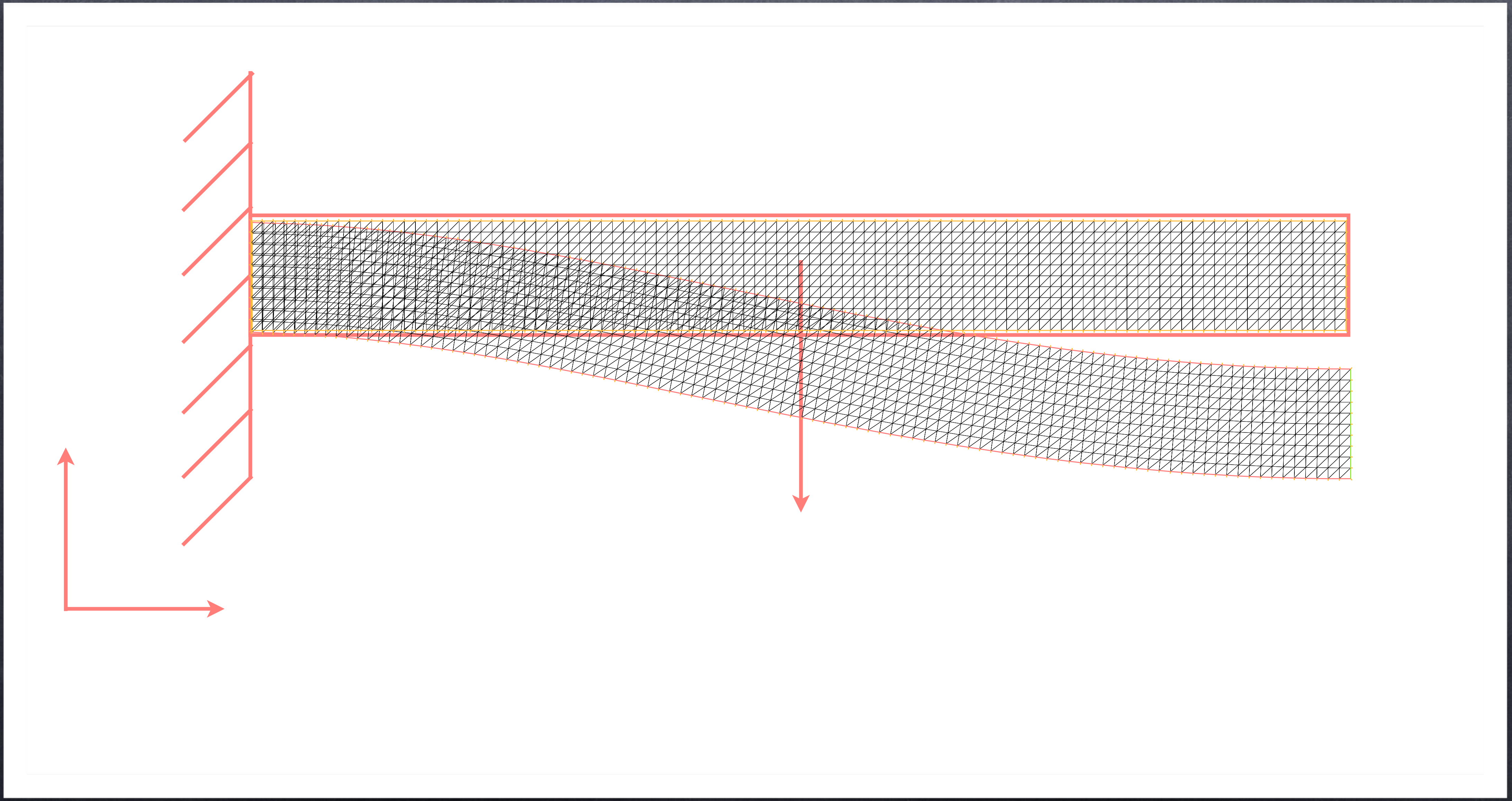
Un exemple frappant

Dirichlet au deux bouts



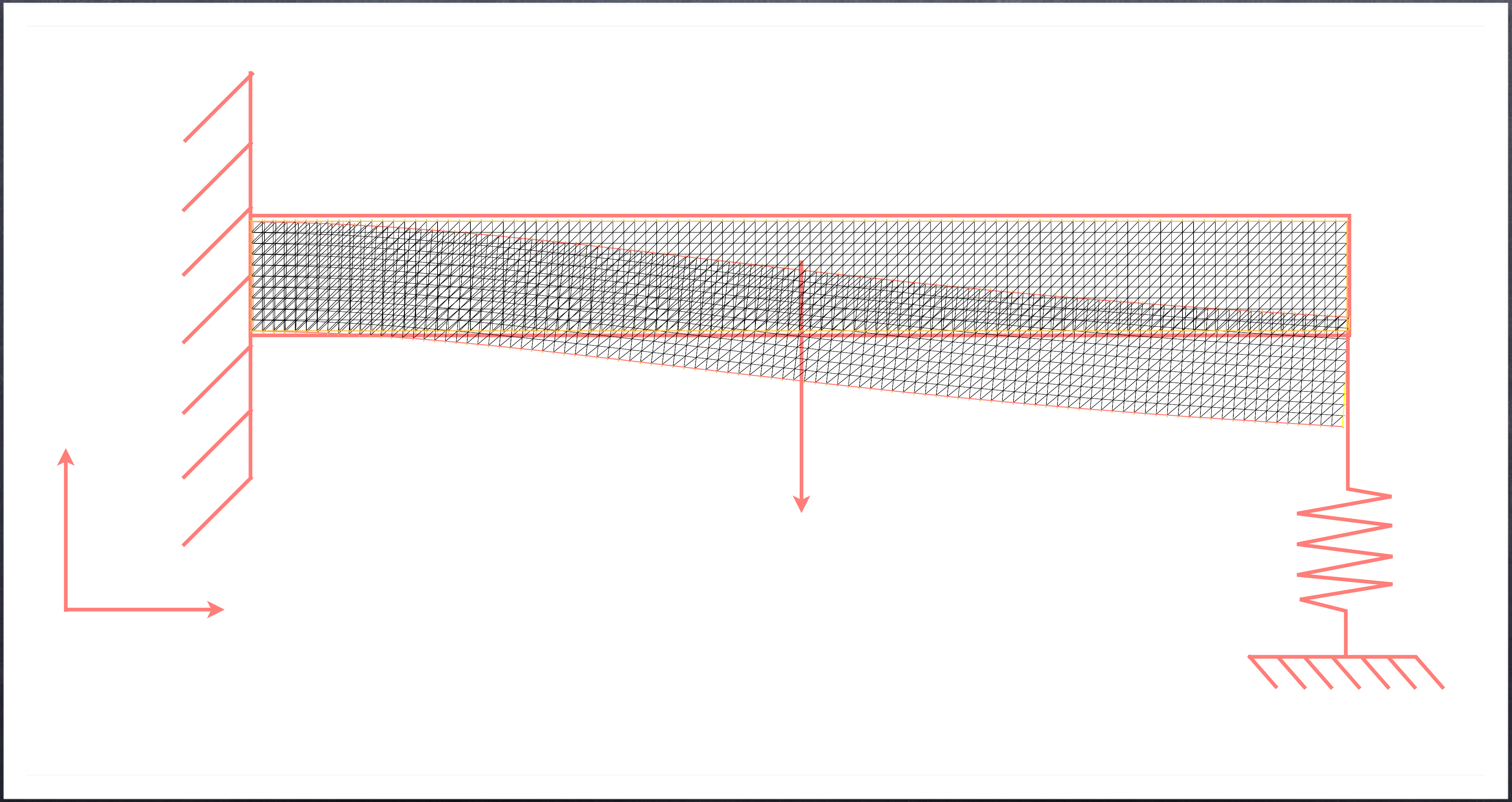
Un exemple frappant

Dirichlet à un bout



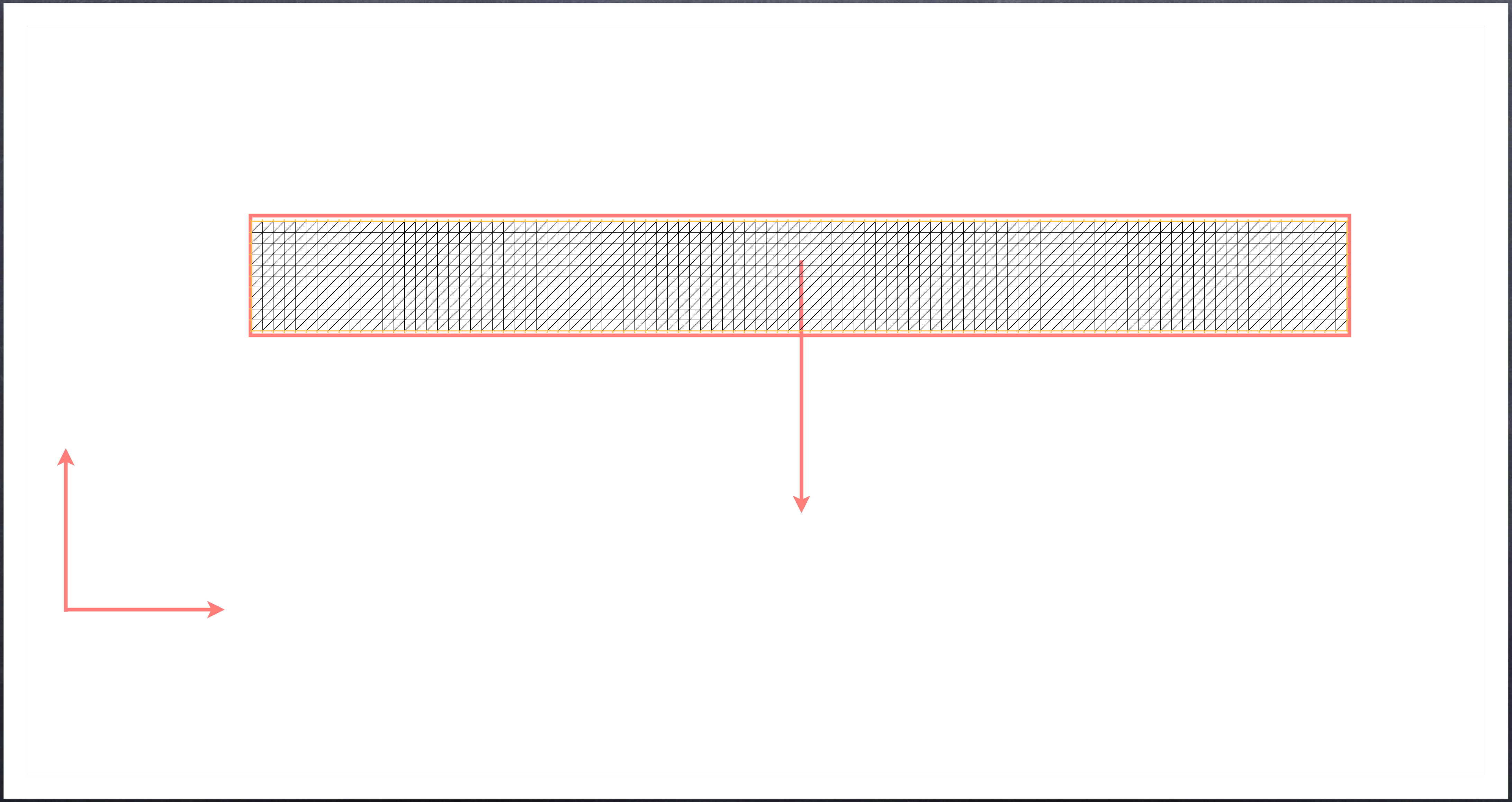
Un exemple frappant

et Fourier



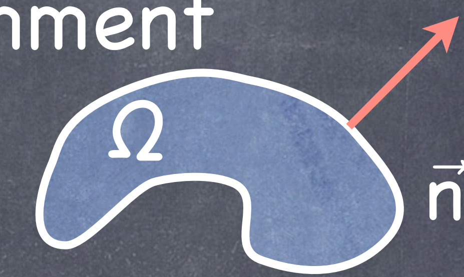
Un exemple frappant

Neumann au deux bouts



Application au 2ème modèle avec C.L. de type Neumann

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et $f \in L^2(\Omega)$.



Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega \qquad \text{(F.V.)}$$

Ce problème n'est pas bien posé...

Soit $f \in L^2(\Omega)$ vérifiant $\int_\Omega f \, d\Omega = 0$. Soit $V = \{v \in H^1(\Omega), \ \int_\Omega v \, d\Omega = 0\}$

Trouver $u \in V$ telle que $\forall v \in V$,

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

Ce problème est bien posé et il est équivalent au problème

Trouver $u \in V$ telle que $\left| \begin{array}{ll} -\triangle u = f & \text{dans } \Omega \\ \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$

Voir l'exercice 4 pour plus de détails sur ce problème.

Lien avec un problème de minimisation

Soit la formulation variationnelle suivante

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que } \quad a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \qquad \text{(F.V.)}$$

On suppose les hypothèses du théorème de Lax-Milgram vérifiées.

On suppose de plus que a est symétrique :

$$\forall v, w \in V, \quad a(v,w) = a(w,v)$$

Proposition Sous les hypothèses ci-dessus,

$$u \text{ solution de (F.V)} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ minimum de } \mathcal{E} \quad \left(\mathcal{E}(u) = \min_{v \in V} \mathcal{E}(v)\right)$$

$$\text{où } \mathcal{E}(v) : \begin{array}{rcl} V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \dfrac{1}{2}a(v,v) - \ell(v) \end{array}$$

Fonctionnelle énergie

Remarques:

- Principe de la moindre quantité d'action pour la mécanique (1744)
- C'est souvent en partant du problème de minimisation (d'une énergie) que la F.V. puis l'EDP+CL sont construites.

Lien avec un problème de minimisation

Proposition Sous les hypothèses ci-dessus,

$$u \text{ solution de (F.V)} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ minimum de } \mathcal{E} \quad (\mathcal{E}(u) = \min_{v\in V} \mathcal{E}(v))$$

$$\text{où } \mathcal{E}(v) : \begin{array}{rcl} V & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v) \end{array}$$

Preuve : $\forall u, v \in V$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u+v) - \mathcal{E}(u) &= \frac{1}{2}a(u+v,u+v) - \ell(u+v) - \frac{1}{2}a(u,u) + \ell(u) \\
&= \frac{1}{2}\left(a(u,v) + a(v,u)\right) + \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v) \\
&\overset{\text{a est sym}}{=} a(u,v) - \ell(v) + \frac{1}{2}a(v,v) \\
&= a(u,v) - \ell(v) + o(\|v\|_V) \qquad \le M_a\|v\|_V^2 \text{ car a est continue} \\
&= d\mathcal{E}(u)(v) + o(\|v\|_V) \quad \text{avec} \quad \forall v \in V, \quad d\mathcal{E}(u)(v) = a(u,v) - \ell(v)
\end{aligned}$$

u solution de (F.V) $\Rightarrow \forall v \in V, \quad \mathcal{E}(u+v) - \mathcal{E}(u) = \underbrace{a(u,v) - \ell(v)}_{=0} + \frac{1}{2}a(v,v) \ge \frac{\alpha}{2}\|v\|_V^2$ (car a coercive)

$\Rightarrow$ u minimum (strict) de $\mathcal{E}$

u minimum de $\mathcal{E}$ $\Rightarrow \forall v \in V, \quad d\mathcal{E}(u)(v) = 0$ car $\mathcal{E}$ est différentiable.

$\Rightarrow$ u solution de (F.V.)

Lien avec un problème de minimisation

Soit la formulation variationnelle suivante

Trouver $u \in V$ telle que $\quad a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \qquad$ (F.V.)

On suppose les hypothèses du théorème de Lax-Milgram vérifiées.

On suppose de plus que a est symétrique :

$$\forall v, w \in V, \quad a(v, w) = a(w, v)$$

Proposition Sous les hypothèses ci-dessus,

u solution de (F.V) $\quad \Leftrightarrow \quad$ u minimum de $\mathcal{E} \quad (\mathcal{E}(u) = \min_{v \in V} \mathcal{E}(v))$

$$\text{où } \mathcal{E}(v) : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v) \end{array}$$

Fonctionnelle énergie

Intérêt: On peut alors utiliser ce problème de minimisation pour

- démontrer l'existence et l'unicité de la solution
- calculer une approximation de la solution u

Un algorithme numérique issu de l'optimisation : l'algorithme du gradient à pas fixé.

Soient V un espace de Hilbert, $\mathcal{E}$ une fonctionnelle différentiable dans V telle que

$$\langle d\mathcal{E}(v) - d\mathcal{E}(u), v - u\rangle \geq \alpha \|v - u\|_V$$

$$\langle d\mathcal{E}(v) - d\mathcal{E}(u), w\rangle \leq M\|v - u\|_V \|w\|_V$$

et $\rho < \dfrac{2\alpha}{M^2}$ alors l'algorithme du gradient à pas fixé

$$\forall v \in V, \quad (u_{k+1}, v)_V = (u_k, v)_V - \rho\langle d\mathcal{E}(u_k), v\rangle$$

converge et la convergence est géométrique, i.e.

$$\exists \beta(\alpha, M, \rho) < 1 \qquad\qquad \|u_k - u\|_V < \beta^k \|u_0 - u\|_V$$

Remarque: il existe un lien entre cet algorithme et la deuxième démonstration du théorème de Lax Milgram (donnée au début du cours)

Voir le Cours "Optimisation différentiable : théorie et applications "

Programme du prochain amphi:

La méthode des éléments finis