Homogénéisation : mise en oeuvre et validation

Nous nous intéressons dans ce TP au problème de Poisson dans un matériau ayant une microstructure périodique

Trouver $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. .$$

où $f \in L^2(\Omega)$, A_ε un tenseur caractéristique du matériau qui satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme et qui s'écrit

$$A_\varepsilon(\mathbf{x}) = A(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$$

avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, ε la période de la microstructure et A un tenseur $1-$périodique.

Nous allons commencer par calculer la solution exacte de ce problème pour différentes périodes (ε sera donc un paramètre du problème). Nous verrons notamment que les calculs deviennent prohibitifs pour des périodes de la microstructure très petites quand on veut avoir une bonne approximation de la solution. En effet, le pas du maillage devra être choisi assez petit par rapport à la période. Nous nous intéresserons ensuite à la solution du problème homogénéisé. Pour cela, il faudra calculer les coefficients du tenseur homogénéisé en résolvant les problèmes de cellule puis résoudre le problème à coefficients homogénéisés qui lui est beaucoup moins coûteux. Enfin, on validera ce processus en comparant la solution exacte et la solution homogénéisée, qualitativement et quantitativement.

1 Solution exacte

1.1 Discrétisation

Question 1. En utilisant les routines écrites dans le précédent TP, écrire un programme principal qui résout le problème (1) discret avec des éléments finis P^1. La période ε du milieu sera un paramètre de votre programme qui pourra être changé facilement.

1.2 Validation du code

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée $u_{\varepsilon,h}$ correcte. Pour cela, on résout le problème (1) avec une solution u égale à $u(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)$, pour $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$ et $A =$Id.

Question 2. Calculer la donnée f correspondante et modifier la routine `f.m`.

Question 3. Comparer qualitativement la solution exacte et la solution discrète.

Question 4. Faites de même pour

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 2+\sin(2\pi x_1) & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)} \quad A = \begin{pmatrix} 2+\sin(2\pi x_1) & 0 \\ 0 & 4+\sin(2\pi x_1) \end{pmatrix} \qquad \text{(iv)} \quad A = (2+\sin(2\pi x_1))*(4+\sin(2\pi x_2))*\mathrm{Id}$$

2 Solution du problème homogénéisé

2.1 Les problèmes de cellule

Pour déterminer le tenseur homogénéisé, il faut résoudre les problémes de cellule suivants (écrits directement sous leur forme variationnelle)

Pour $i \in \{1,2\}$, *trouver* $w_i \in V$ *telle que*

$$\text{(2)} \qquad \forall \phi \in V, \quad \int_Y (A(y)\,\nabla_y w_i(y), \nabla_y \phi(y))\,dy = -\int_Y (A(y)\,e_i, \nabla_y \phi(y))\,dy$$

où $Y = (0,1)^2$, $y = (y_1, y_2)$ et $V = \{\psi \in H^1_{\#}(Y),\ \int_Y \psi(y)\,dy = 0\}$.

Question 1. Rappeler pourquoi ce problème est bien posé.

Il existe plusieurs méthodes pour prendre en compte la contrainte sur la moyenne. Nous vous proposons d'utiliser la méthode dite de *pénalisation* qui consiste à calculer plutôt la solution du problème suivant : soit $\eta > 0$, *Pour* $i \in \{1,2\}$, *trouver* $w_i^\eta \in H^1_{\#}(Y)$ *telle que* $\forall \phi \in H^1_{\#}(Y)$,

$$\text{(3)} \qquad \int_Y (A(y)\,\nabla_y w_i^\eta(y), \nabla_y \phi(y))\,dy + \eta \int_Y w_i^\eta(y)\,\phi(y)\,dy = -\int_Y (A(y)\,e_i, \nabla_y \phi(y))\,dy$$

Question 2. Montrer que ce problème est bien posé pour tout $\eta > 0$. Comment varie la constante de coercivité avec η ? Quelles sont les conséquences sur la matrice EF associée ?

Question 3. Montrer que pour tout $i \in \{1,2\}$,

$$\exists\, C > 0, \quad ||w_i^\eta - w_i||_{H^1} \leq C\eta$$

Dans la suite, on discrétisera les problèmes (3) avec une constante η choisie assez petite.

2.2 Discrétisation des problèmes de cellule

Question 4. En utilisant les routines écrites dans le précédent TP, assembler la matrice EF associée aux problémes (3). On remarquera que c'est la même matrice EF qui intervient pour résoudre les deux problèmes de cellule.

Question 5. En utilisant le fait que $\nabla y_i = e_i$, calculer les seconds membres exactement.

Question 6. Utiliser la méthode de pseudo-élimination pour prendre en compte les conditions périodiques.

2.3 Première validation

Question 7. On veut vérifier que le code calcule une solution approchée $w_{i,h}^{\eta}$ correcte. Pour cela, on résout le problème (2) en considérant $A =$Id. Calculer les solutions exactes et comparer qualitativement avec la solution calculée.

Question 8. Faites de même pour le cas (i).

2.4 Calcul du tenseur homogénéisé et deuxième validation

On rappelle que le tenseur homogénéisé est donné par

$$A_{jk}^{\text{eff}} = \int_Y (A(y)(e_k + \nabla_y w_k(y)), e_j + \nabla_y w_j(y))\, dy$$

Question 9. En utilisant les matrices EF déjà assemblée et la remarque de question 5., coder le calcul des coefficients du tenseur homogénéisé.

Question 10. On validera le calcul en considérant les tenseurs des 4 cas donnés précédemment pour lesquels les tenseurs homogénéisés correspondants sont donnés par

$$\text{(i)} \quad A^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad A^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)} \quad A^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(iv)} \quad A^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 4 * \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 * \sqrt{15} \end{pmatrix}$$

2.5 Calcul de la solution du probléme homogénéisé

Le problème homogénéisé est le suivant

Trouver $u_0 \in H^1(\Omega)$ telle que

$$(4) \qquad \begin{cases} -\nabla \cdot \left(A^{\text{eff}} \nabla u_0\right) = f & \text{dans } \Omega \\ u_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} .$$

Question 11. En utilisant les routines codées au TP précédent, calculer la solution approchée $u_{0,h}$ du probléme homogénéisé en utilisant des élements finis $\mathbb{P}^1$.

3 Comparaison de la solution exacte et la solution du problème homogénéisé

On veut vérifier que la solution du problème homogénéisé est proche de la solution exacte quand ε est assez petit.

Question 1. En utilisant le même maillage (assez fin), calculer la solution exacte pour un ε fixé et la solution du problème homogénéisé et les comparer qualitativement. Faire varier le paramètre ε. Qu'observez vous ?

Question 2. Tracer l'erreur $\|u_{\varepsilon,h} - u_{0,h}\|_{L^2(\Omega)}$ en fonction de ε en utilisant un maillage assez fin. On pourra tracer $\log(1/\varepsilon) \mapsto \log\left(\|u_{\varepsilon,h} - u_{0,h}\|_{L^2(\Omega)}/\|u_{0,h}\|_{L^2(\Omega)}\right)$ pour différentes valeurs de ε.

Question 3. Faire de même pour la norme H^1. Commenter.

Question 4. Proposer et implémenter une meilleure approximation de $u_{\varepsilon,h}$ pour la norme H^1. Commenter.