① Rappel des développements multi-échelle.

On cherche la solution $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ de.

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega. \\ u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où $A_\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ avec A 1 periodique.

$$c|\xi|^2 \leq (A\xi, \xi) \leq C|\xi|^2.$$

La semaine dernière, on a postulé

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 \dots$$

et on a trouvé $u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \nabla u_0(x) \cdot \underline{W}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_i \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)\, w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

où w_i sont appelés des correcteurs volumiques, ils sont solution de problèmes de cellule.

$$w_i \in H^1_\#(Y) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}_y A(y)(\nabla_y w_i + e_i) = 0 \text{ ds } Y. \\ \int_Y w_i = 0. \\ w_i \text{ périodique}. \end{cases}$$

on définit. $A^*_{ij} = \int_Y A(y)(\partial_{y_i} w_j + \delta_{ij})\,dy$. si A scalaire.

$$A^*_{ij} = \int_Y \left[A_{ij}(y) + \sum_{k=1}^{d} A_{ik}(y)\frac{\partial w_j}{\partial y_k}\right] dy.$$

$$= \int_Y \left(A(y)(e_j + \nabla_y w_j),\ e_i + \nabla_y w_i\right) dy.$$

(A^* est symétrique si A est symétrique).

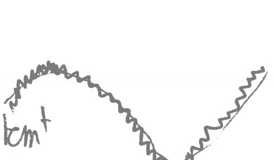
* u_0 est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A^* \nabla u_0 = f & \text{dans } \Omega. \\ u_0|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

c'est l'eq homogénéisée.

<u>Remarque</u> : * A^* ne dépend plus de x.

* $u_\varepsilon(x) \approx \underbrace{u_0}_{\text{comportem}^t\text{ macro.}} + \underbrace{\varepsilon \nabla u_0(x) \cdot \underline{W}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}_{\text{comportem}^t\text{ micro.}}$



. Cela oscille moins au niveau des max et min

* Les problèmes de cellule : leur F.V.

Trouver $w_i \in V = \{v \in H^1_\#(Y), \int_Y w = 0\}$, $\forall \varphi \in V$.

$$\int_Y A(y) \nabla_y w_i \nabla \varphi \, dy = -\int_Y (A(y) e_i, \nabla \varphi) \, dy.$$

<u>Proposition</u> : la matrice A^* est définie positive :

$$\exists c > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad (A^* \xi, \xi) \geq c \|\xi\|^2.$$

<u>Preuve</u> : $(A^* \xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^{d} A^*_{ij} \xi_i \xi_j$.

$$= \sum_{i,j=1}^{d} \int_Y \left(A(y)(e_j + \nabla_y w_j), e_i + \nabla_y w_i\right) dy \cdot \xi_i \xi_j$$

$$= \int_Y \left(A(y)\left(\xi + \nabla_y(\underline{w} \cdot \xi)\right), \left(\xi + \nabla_y \underline{w} \cdot \xi\right)\right) dy.$$

$$\geq c \|\tilde{\xi}\|^2 \geq 0. \text{ où } \tilde{\xi} = \xi + \nabla_y (\underline{w} \cdot \xi).$$

si $(A^* \xi, \xi) = 0 \Rightarrow \tilde{\xi} = 0$. $\quad \nabla_y \left(\xi \cdot (\underline{y} + \underline{w})\right) = 0$.

$\xi \cdot (\underline{y} + \underline{w}) = \text{constante}$.

$\Rightarrow \sum_j \xi_j y_j$ periodique $\Rightarrow \xi_j = 0$. ■

<u>Corollaire</u> : D'après le th de Lax Milgram, le problème effectif / homogénéisé est bien posé.

voir 2bis

<u>Algorithme</u> * Résolution des pbs de cellule.

Difficultés → conditions périodiques
→ contrainte de la moyenne nulle.

* Calcul de la matrice homogénéisée.

$$A^{eff}_{ij} = \int_Y \left(A(y) \nabla(y_j + w_j), \nabla(y_i + w_i)\right) dy.$$

* Calcul de la solution du pb homogénéisé.
* Calcul du ∇u_0 puis $u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) = \nabla u_0(x) \cdot \underline{W}(\frac{x}{\varepsilon})$.

<u>Question</u>. Est ce que $u_\varepsilon \longrightarrow u_0$? Dans quel sens ?

Réponses → méthode de la fc° test oscillante (Tartar).
→ CV double échelle (− général + simple).
→ estimation d'erreur (vitesse de CV).
→ gamma CV.

Proposition: $\left(\langle A^{-1}\rangle^{-1}\xi,\xi\right) \le \left(A^*\xi,\xi\right) \le \Big(\underbrace{\int_Y A(y)dy}_{\langle A\rangle}\ \xi,\xi\Big)$ 2 bis

$$\left(A^*\xi,\xi\right) = \sum_{i,j=1}^{d} A^*_{ij}\xi_i\xi_j$$
$$= \int_Y \Big(A(y)\left(\xi + \nabla_y w\cdot\xi\right),\ \xi + \nabla_y\left(w\cdot\xi\right)\Big)dy.$$

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y A(y)\left(\nabla_y w_i + e_i\right) = 0 \text{ ds } Y. \\ \int_Y w_i = 0 \\ w_i \text{ périodique} \end{cases}$$

Par linéarité: $w\cdot\xi$ est solution de
$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y A(y)\nabla_y\left(w_\xi + \xi\right) = 0 \text{ ds } Y \\ \int_Y w_\xi = 0 \\ w_\xi \text{ périodique} \end{cases}$$

Le problème est bien posé, on note $w_\xi = w\cdot\xi$.
w_ξ minimise dans $H^1_\#(Y)$ l'énergie $\int A(y)\left(\xi+\nabla_y\chi\right)\left(\xi+\nabla_y\chi\right)$.

$$\left(A^*\xi,\xi\right) = \min_{\chi\in H^1_\#(Y)} \int_Y A(y)\left(\xi+\nabla_y\chi\right)\left(\xi+\nabla_y\chi\right).$$

① $\left(A^*\xi,\xi\right) \le \left(\int_Y A(y)\,\xi,\xi\right)$ (on prend $\chi=1$).

② On remarque que si $\chi\in H^1_\#(Y)$, $\int_Y \nabla_y\chi = 0$.
$$\left(A^*\xi,\xi\right) \ge \min_{\substack{\eta\in L^2(Y)^d \\ \int_Y\eta=0}} \int_Y \Big(A(y)\left(\xi+\eta\right),\left(\xi+\eta\right)\Big).$$

On cherche maintenant ce minimum. Il est solution de
$$\int_Y a(y)\left(\xi+\eta(y)\right)\cdot\theta(y) = 0 \qquad \forall\theta\in L^2(Y),\ \int_Y\theta = 0.$$
$$\Rightarrow a(y)\left(\xi+\eta(y)\right) = c$$

comme la $\int_Y\eta = 0$ $\quad \xi = \int_Y A^{-1}(y)\,dy$
$$c = \left(\int_Y A^{-1}(y)dy\right)^{-1}\xi.$$
$$\Rightarrow \xi+\eta = A^{-1}(y)\left(\int_Y A^{-1}(y)dy\right)^{-1}\xi.$$
$$\left(A^*\xi,\xi\right) \ge \int_Y \Big(\underbrace{A(y)\,A^{-1}(y)}_{I}\left(\int_Y A^{-1}(y)dy\right)^{-1}\xi,\ A^{-1}(y)\left(\int_Y A^{-1}(y)dy\right)^{-1}\xi\Big)$$
$$\left(\left(\int_Y A^{-1}(y)dy\right)^{-1}\xi,\ \int_Y A^{-1}(y)dy\left(\int_Y A^{-1}(y)dy\right)^{-1}\xi\right) = \left(\langle A^{-1}\rangle^{-1}\xi,\xi\right)$$

2 La cv double échelle (Nguetseng & Allaire).

La cv-Double échelle permet * de retrouver les eq lim en partant du pb original.
* de justifier la cv.

Il y a 2 échelles ds le pb → une lente, la variable x. échelle 1.
→ une rapide, la variable $\frac{x}{\varepsilon}$. échelle ε.

La cv double échelle capte les phénomènes aux échelles 1 et ε mais pas aux autres. La cv L^2 ne suffit pas car on a vu que pour f périodique.

$$f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[L^2]{} \int_0^1 f = \langle f \rangle.$$ [Même preuve qu'en 1D].

On a perdu l'échelle ε.

$(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de f° bornées ds $L^2(\Omega)$, $u_0 \in L^2(\Omega\times Y)$.

Definition : u_ε converge double échelle vers u_0 si

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y)). \quad \int_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)dx \longrightarrow \int_{\Omega\times Y} u_0(x,y)\varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

⚠ u_ε dépend d'une variable alors que u_0 dépend de 2 variables.

ex : $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y))$. $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \twoheadrightarrow \varphi(x,y)$.] voir preuve du corollaire p4+p8

$\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}2\pi\right) \twoheadrightarrow \sin(2\pi y)$

Théorème 1

* Résultat de compacité : Soit (v_ε) une suite bornée ds $L^2(\Omega)$ alors il existe une ss suite et une f° $u_0 \in L^2(\Omega\times Y)$ tq v_ε cv à 2 échelles vers u_0.

* si (u_ε) cv double échelle alors $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ bornée ds L^2.

* si $u_\varepsilon \twoheadrightarrow u_0$ alors $u_\varepsilon \rightharpoonup \int_Y u_0(x,y)\,dy = \bar{u}(x)$.

$$\|\bar{u}\|_{L^2} \leqslant \|u_0(x,y)\|_{L^2(\Omega\times Y)}$$

demo du dernier * : on sait que $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y))$

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\Omega\times Y} u_0(x,y)\varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

Si on prend $\varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \psi(x)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\Omega\times Y} u_0(x,y)\psi(x)\,dx = \int_\Omega \bar{u}(x)\psi(x)\,dx.$$

On conclut par densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

et $\|\bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left|\int_Y u_0(x,y)\,dy\right|^2 dx \underset{CS}{\leq} \int_\Omega\int_Y |u_0(x,y)|^2\,dx\,dy = \|u_0\|^2_{L^2}$.

Dans la suite, on aura besoin d'autres fonctions test pour la cv-double échelle qui sont moins régulières que $C_0^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y))$.

<u>Théorème</u> 2: Soit (ψ_ε) une suite de fonctions de $L^2(\Omega)$ qui cv à 2 échelles vers $\psi_0 \in L^2(\Omega\times Y)$. Si en plus $\int_\Omega |\psi_\varepsilon(x)|^2 dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\Omega\times Y} |\psi_0(x,y)|^2 dx\,dy$

alors pour toute suite u_ε qui cv double échelle vers $u_0 \in L^2(\Omega\times Y)$

on a $\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi_\varepsilon(x)dx \longrightarrow \int_{\Omega\times Y} u_0(x,y)\,\psi_0(x,y)\,dx\,dy$.

<u>Preuve</u>: en annexe.

<u>Corollaire</u>: Soit $\psi : \Omega\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ tq.

1. $\psi \in C_0^0(\Omega, C_\#^0(Y))$.
2. $\psi(x,y) = \psi_1(x)\,\psi_2(y) \in L^2$.
3. Alors $\psi_\varepsilon(x) = \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ cv à 2 échelles vers ψ et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\psi_\varepsilon(x)|^2 dx = \int_\Omega \int_Y |\psi(x,y)|^2 dx\,dy$$

On dira que ψ est admissible.

Si f et g sont admissibles alors fg est admissible.

~~Preuve~~

On passe maintenant à la cv 2s de suites de fonctions bornées dans $H^1(\Omega)$.

<u>Théorème</u>: Soit u_ε une suite de fonctions de $H^1(\Omega)$ telle que

$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $H^1(\Omega)$.

alors $u_\varepsilon \twoheadrightarrow u_0$ et il existe une fonction $u_1 \in L^2(\Omega, H_\#^1(Y))$

tq $\nabla u_\varepsilon \twoheadrightarrow \nabla u_0$ et $\nabla_y u_1$. (à une extraction près).

<u>Preuve</u>: si $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ dans H^1 alors u_ε est bornée.

$u_\varepsilon \twoheadrightarrow \tilde{u}_0 \in L^2(\Omega\times Y)$ $\quad u_0(x) = \int_Y \tilde{u}_0(x,y)dy$ d'après <u>lemme</u>.

$\nabla u_\varepsilon \twoheadrightarrow U_0 \in L^2(\Omega\times Y)^d$.

1. Par def de la dérivation au sens des distributions.

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y))^d \quad \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx = -\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\mathrm{div}(\varphi(x,\frac{x}{\varepsilon}))dx$

$$= -\int_\Omega u_\varepsilon(x)\left[(\mathrm{div}_x\varphi)(x,\tfrac{x}{\varepsilon}) + \tfrac{1}{\varepsilon}(\mathrm{div}_y\varphi)(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\right]dx$$

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)(\mathrm{div}_y\varphi)(x,\tfrac{x}{\varepsilon})dx = \underbrace{-\varepsilon\int_\Omega \nabla u_\varepsilon\cdot\varphi(x,\tfrac{x}{\varepsilon})dx}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\varepsilon\int_\Omega u_\varepsilon(x)(\mathrm{div}_x\varphi)(x,\tfrac{x}{\varepsilon})}_{\downarrow\, 0}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)(\mathrm{div}_y\,\Psi)(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\,dx = 0 \Rightarrow \int_{\Omega\times Y}\tilde{u}_0(x,y)\,\mathrm{div}_y\,\Psi(x,y)\,dx\,dy = 0$$ $\boxed{5}$

$$\Rightarrow \int_\Omega\int_Y \nabla_y \tilde{u}_0(x,y)\,\Psi_2(y)\,dy\,\Psi_1(x)\,dx = 0$$

En prenant $\Psi(x,y) = \Psi_1(x)\Psi_2(y)$

$\int_Y \nabla_y \tilde{u}_0(x,y)\Psi_2(y)\,dy = 0$ p.p x $\Rightarrow \nabla_y \tilde{u}_0 = 0$ p.p $y,x \Rightarrow \tilde{u}_0$ independant de y.

CCL : $u_0 = \tilde{u}_0$ independant de y !

② Soit $\Psi \in C_0^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y))$ tq $\mathrm{div}_y\,\Psi(x,y) = 0$.

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \Psi(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\,dx + \int_\Omega u_\varepsilon(x)(\mathrm{div}_x\,\Psi)(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\,dx = 0.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \nabla u_\varepsilon\cdot\Psi(x,\tfrac{x}{\varepsilon}) = -\int_{\Omega\times Y} u_0(x)\,\mathrm{div}_x\,\Psi(x,y)\,dx\,dy.$$

$$\int_{\Omega\times Y} \underline{U}_0(x,y)\,\Psi(x,y)\,dx\,dy = -\int_{\Omega\times Y} u_0(x)\,\mathrm{div}_x\,\Psi(x,y)\,dx\,dy.$$

donc $\int_{\Omega\times Y}\left(\underline{U}_0(x,y) - \nabla u_0(x)\right)\Psi(x,y)\,dx\,dy = 0$. $\forall \Psi,\ \underline{\mathrm{div}_y\,\Psi = 0}$

<u>Lemme</u> : $E = \{\Psi \in L^2(\Omega\times Y),\ \mathrm{div}_y\,\Psi = 0 \text{ ds } \mathcal{D}'\}$ chp à div nulle.

$F = \{\Psi \in L^2(\Omega\times Y),\ \exists p \in L^2(\Omega, H_\#^1(Y)),\ \Psi = \nabla_y p\}$. chp de gradient

alors $L^2(\Omega\times Y) = E \overset{\perp}{\oplus} F$ $\quad \forall f \in L^2(\Omega\times Y)$. $f = f_E + f_F$.

avec $f_E \in E$ $\int_{\Omega\times Y} f_E\,\Psi = \int_{\Omega\times Y} f\,\Psi \quad \forall \Psi \in E$.

$f_F \in F$ $\int_{\Omega\times Y} f_F\,\vec{\nabla}p = \int_{\Omega\times Y} f\,\vec{\nabla}p \quad \forall p \in L^2(\Omega, H_\#^1(Y))$

Ici on a donc $U_0(x,y) - \nabla u_0(x) \in F$ donc c'est un chp de gradient.

$$\exists u_1 \in L^2(\Omega, H_\#^1(Y)).\ U_0(x,y) - \nabla u_0(x) = \nabla_y u_1(x,y).$$

3. Homogénéisation par CV double échelle.

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

u_ε est borné dans $H_0^1(\Omega)$ donc à extraction près

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$
$$u_\varepsilon \to u_0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

On applique le théorème précédent $\exists u_1 \in L^2(\Omega\times Y)$. tq

$$u_\varepsilon \twoheadrightarrow u_0.$$
$$\nabla u_\varepsilon \twoheadrightarrow \nabla u_0 + \nabla_y u_1.$$

Montrons que u_0 vérifie l'eq. homogénéisée. Pour cela, on teste $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ $\boxed{6}$.
avec $v_0(x)+\varepsilon v_1(x,\frac{x}{\varepsilon})$. où $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$.
$v_1 \in C_0^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y))$.

$$\int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon(x)\left[\nabla v_0 + \varepsilon \nabla_x v_1(x,\tfrac{x}{\varepsilon}) + \nabla_y v_1(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\right] dx = \langle f, v_0+\varepsilon v_1\rangle.$$

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \underbrace{{}^tA_\varepsilon\left[\nabla v_0+\varepsilon \nabla_x v_1(x,\tfrac{x}{\varepsilon})+\nabla_y v_1(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\right]}\, dx = \langle f, v_0+\varepsilon v_1\rangle.$$

On remarque que $(x,y) \mapsto {}^tA(y)[\nabla v_0(x)+\nabla_y v_1]$ est une fonction admissible.

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x) \cdot {}^tA_\varepsilon\left[\nabla v_0 + \nabla_y v_1(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\right] dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\Omega\times Y} [\nabla u_0+\nabla_y u_1]\,{}^tA(y)\left[\nabla v_0 + \nabla_y v_1(x,y)\right] dx\,dy$$

$$\langle f, v_0+\varepsilon v_1\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (f, v_0)$$

On a donc $\forall v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\forall v_1 \in C_0^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y))$.

$$\int_{\Omega\times Y} A(y)[\nabla u_0+\nabla_y u_1]\cdot[\nabla v_0+\nabla_y v_1] = \int_\Omega f v_0.$$

On peut faire la m̂ chose avec des fonctions admissibles.

① $v_0=0$. $\quad v_1 = \varphi(x).\psi(y)$. $\quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$\int_\Omega \varphi(x)\int_Y A(y)[\nabla u_0+\nabla_y u_1]\nabla_y \psi = 0.$$

Pour presque $\forall x$ $\quad \int_Y A(y)[\nabla u_0+\nabla_y u_1]\nabla_y\psi = 0.$

② On choisit ensuite $v_1=0$.

$$\int_\Omega \int_Y A(y)(\nabla u_0(x)+\nabla_y u_1(x,y)) \cdot \nabla v_0 = \langle f, v_0\rangle.$$

Preuve du théorème 2

① Par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(Y))$ il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(Y))$ telle $\varphi_n \longrightarrow \psi_0$ fortement dans $L^2(\Omega \times Y)$.

On a :

$$\int_\Omega \left(\psi_\varepsilon(x) - \varphi_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^2 dx = \int_\Omega (\psi_\varepsilon(x))^2 - 2\int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\varphi_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx + \int_\Omega \varphi_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx$$

par hyp $\|\psi_\varepsilon\|_{L^2} \to \|\psi_0\|_{L^2}$: $\int_\Omega (\psi_\varepsilon(x))^2 \to \int_{\Omega\times Y} (\psi_0(x,y))^2 dx\,dy$

car $\psi_\varepsilon \rightharpoonup\rightharpoonup \psi_0$: $-2\int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\varphi_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx \to -2\int_\Omega\int_Y \psi_0(x,y)\varphi_n(x,y)\,dx\,dy$

$\int_\Omega \varphi_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx \to \, ?$

② Montrons que $\displaystyle\int_\Omega \varphi_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_\Omega\int_Y \varphi_n(x,y)^2 dx\,dy$

Comme φ_n est continue en x uniformément en y :

$\exists C>0$, $\forall \rho>0, \exists x_i$, $|\varphi_n(x,y) - \varphi_n(x_i,y)| \le C\rho \quad \forall x, |x-x_i|\le\rho \quad \forall y$.

On découpe Ω en sous domaines de taille ρ $\quad \Omega = \cup \Omega_i^\rho$:

$$\int_\Omega \varphi_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx = \sum_i \int_{\Omega_i^\rho} \varphi_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx = \sum_i \int_{\Omega_i^\rho} \varphi_n\left(x_i,\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx + O(\rho)$$

$$= \sum_i \int_{\Omega_i^\rho}\int_Y \varphi_n(x_i,y)^2 dy\,dx + O(\varepsilon) + O(\rho)$$

car $f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \int_Y f(y)dy$

$$= \sum_i \int_{\Omega_i^\rho}\int_Y \varphi_n(x,y)^2 dy\,dx + O(\varepsilon) + O(\rho).$$

$$= \int_\Omega\int_Y \varphi_n(x,y)^2 dy\,dx + O(\varepsilon) + O(\rho)$$

CCL : $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \left(\psi_\varepsilon(x) - \varphi_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^2 dx = 0.$

③ $$\underline{\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi_\varepsilon(x)\,dx} = \underbrace{\int_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx} + \underbrace{\int_\Omega u_\varepsilon(x)\left(\psi_\varepsilon(x) - \varphi_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx}$$

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_\Omega\int_Y u_0(x,y)\varphi_n(x,y)\,dx\,dy \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega\int_Y u_0(x,y)\psi_0(x,y)\,dx\,dy$$

$$|\ | \le \underbrace{\left\|\psi_\varepsilon(x) - \varphi_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^2}}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0 \text{ et } n\to\infty]{} 0} \underbrace{\|u_\varepsilon\|_{L^2}}_{\text{borné}}$$

Preuve du corollaire qui suit le théorème 2.

① Si $\psi \in C_0^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y))$ alors $\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightleftharpoons} \psi(x,y)$.

et $\int_\Omega |\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})|^2 dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\Omega\times Y} |\psi_0(x,y)|^2 dx\, dy$.

Preuve : il suffit d'utiliser la continuité uniforme de ψ uniformément en y.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y))$ ∴ φ est également continue p.r. à x uniformément en y.

$\forall \rho > 0 \cdot \exists x_i \quad \forall x, |x - x_i| \leq \rho \Rightarrow \left|\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}) - \psi(x_i, \frac{x}{\varepsilon})\varphi(x_i, \frac{x}{\varepsilon})\right| \leq C\rho$

où C est indépendant de ε. On découpe Ω en sous domaines Ω_i^ρ de taille au plus ρ.

De plus. $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_i^\rho} \psi(x_i, \frac{x}{\varepsilon})\varphi(x_i, \frac{x}{\varepsilon})dx = \int_{\Omega_i^\rho}\int_Y \psi(x_i,y)\varphi(x_i,y)\,dx\,dy$

On en déduit que $= \int_{\Omega_i^\rho}\int_Y \psi(x,y)\varphi(x,y)\,dx\,dy + O(\rho)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \psi(\cancel{x_i}, \tfrac{x}{\varepsilon})\varphi(x, \tfrac{x}{\varepsilon})dx = \int_\Omega\int_Y \psi(x,y)\varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

On peut utiliser le m̂ argument (uniforme continuité) pour $\varphi = \psi$.

donc $\int_\Omega |\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})|^2 dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_Y |\psi(x,y)|^2 dx\, dy$.

② Si $\psi(x,y) = \psi_1(x)\psi_2(y) \in L^2(\Omega\times Y)$ alors $\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup\!\!\rightharpoonup} \psi_1(x)\psi_2(y)$

et $\int_\Omega |\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})|^2 dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_\Omega (\psi_1(x))^2 dx \int_Y (\psi_2(y))^2 dy$.