AO102

TD1 et TD2 - Calcul différentiel

Les corrigés des exercices se trouvent dans le livre du cours, section 1.6.

Exercice 1.

1. Soient $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^T Ax$. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$, calculer sa différentielle et montrer que f est de classe C^1.
2. Soient f et g les applications de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \|x\|^2$ et $g(x) = \|x\|$ ($\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne). Déterminer en quels points ces applications sont différentiables et calculer leur différentielle.

Exercice 2.

1. Soit $F : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ l'application $A \mapsto A^2$. Montrer que F est de classe C^1 en tout $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle $DF(A)$.
2. Soit $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $f : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \mathrm{tr}(BA^{-1})$ est différentiable et calculer sa différentielle. *[Rappelons que l'application $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $\phi(A) = A^{-1}$, est différentiable sur $GL_n(\mathbb{R})$ avec $D\phi(A) \cdot H = -A^{-1}HA^{-1}$, voir livre, Section 1.1).]*
3. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $g : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(A) = \langle A^{-1}v, v\rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que g est différentiable et calculer $Dg(A) \cdot H$ pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq 0, \qquad f(0) = 0.$$

1. Montrer que f est continue (utiliser $a^2 + b^2 \geq 2ab$).
2. Calculer les dérivées partielles de f en 0.
3. En quels points f est-elle différentiable ?

Exercice 4.

Soit det l'application déterminant de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer *a priori* que cette application est de classe C^1 (C^∞ en fait).
2. Calculer la différentielle de det en l'identité.
3. Calculer la différentielle de det en une matrice inversible.
4. Calculer la différentielle de det en une matrice quelconque.

Exercice 5.

1. Soit exp l'application exponentielle de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, définie par

$$\exp A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

Montrer que cette application est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en ce point.

2. Considérons des matrices $A_1, \dots, A_n$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose que les vecteurs $A_1 x_0, \dots, A_n x_0$ sont linéairement indépendants. Montrer qu'il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 et un voisinage $V \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tels que tout point $x \in U$ peut s'écrire de façon unique
$$x = \exp(u_1 A_1 + \dots + u_n A_n) x_0,$$
avec $u = (u_1, \dots, u_n) \in V$. Comment varie u en fonction de x ? (on admettra que exp est une application de classe C^∞).

Exercice 6.

On considère le système d'équations
$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1, \quad y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}, \tag{1}$$
aux inconnues x et y. On veut montrer qu'il existe une unique solution $X(t) = (x(t), y(t))$, de classe C^∞, et en donner un développement limité autour de $X = 0$.

Notons $X = (x, y)$ et, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé,
$$F_t(X) = \left(\frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1, \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}\right).$$

1. Montrer que, dans la norme d'opérateur induite par la norme euclidienne, on a $\|DF_t(X)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. En déduire que F_t est contractante et que, pour t fixé, le système d'équations (1) a une unique solution dans $\mathbb{R}^2$ que l'on notera $X^*(t) = (x^*(t), y^*(t))$.
3. Montrer, en utilisant la question 1, que l'application $I - DF_t(X)$ est inversible quel que soit $X \in \mathbb{R}^2$ (I est l'identité de $\mathbb{R}^2$).
4. Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites que la fonction $t \mapsto X^*(t)$ est de classe C^∞.
5. Donner un développement de Taylor à l'ordre 1 de $X^*(t)$ en $t = 1$.

Exercice 7.

On considère le système d'équations suivant, d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + t = 2, \\ x + y + z + t = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Vérifier que le point $(0, -1, 1, 0)$ est une solution.
2. Montrer que l'on peut résoudre ce système par rapport à (x, y, z) au voisinage de ce point.
3. Calculer la dérivée en 0 de la fonction $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$.

Exercice 8.

Soit $E = C([0,1])$ l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ muni de la norme de la convergence uniforme : pour $f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

Montrer que les applications suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle :

1. $\varphi_1 : E \to \mathbb{R}$, $\qquad \varphi_1(f) = \sin(f(0))$;
2. $\varphi_2 : E \to E$, $\qquad \varphi_2(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f^2(t)dt$;
3. $\varphi_3 : E \times E \to \mathbb{R}$, $\qquad \varphi_3(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Rappelons qu'en dimension infinie la différentielle doit être une application linéaire **continue** et qu'une application linéaire f de E dans F est continue si et seulement si il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $v \in E$,
$$\|f(v)\|_F \leq C\|v\|_E.$$