Feuille d'exercices n°3 : Réseaux électriques, résistance équivalente, et identité du temps de transport.

Exercice 23. [Temps d'atteinte et de retour d'espérance finie] Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible sur Ω fini. On fixe $y \in \Omega$ dans ce qui suit.

1. Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{N}$, et $\delta \in]0,1]$ tel que pour tout $x \in \Omega$, $\mathbb{P}_x[\tau_y \leq t_0] \geq \delta$.
2. Soit $x \in \Omega$. En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_x[\tau_y > kt_0] \leq (1-\delta)^k$.
3. Conclure que $\mathbb{E}_x[\tau_y] \leq t_0/\delta$.
4. En déduire que $\mathbb{E}_x[\tau_y^+] \leq \mathbf{1}_{\{x=y\}} + t_0/\delta$.

Exercice 24. [Marche aléatoire sur réseau et chaîne réversible] On appelle réseau $(G = (V,E), \{c(e)\}_{e\in E})$ la donnée d'un graphe $G = (V,E)$ et d'une collection de nombres réels $\{c(e)\}_{e\in E}$ appelés conductances, supposées strictement positives. On définit $c(x,y) = c(e)$ si $e = \{x,y\}$. La marche aléatoire sur ce réseau, qui généralise la marche aléatoire simple (=où les conductances sont identiquement égales à 1), est alors la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P(x,y) = \frac{c(x,y)}{c(x)} \quad \text{avec } c(x) = \sum_{y:\{x,y\}\in E} c(x,y).$$

On suppose enfin que le graphe G est connexe. On autorisera dans cet exercice la possibilité de boucles, c'est-à-dire l'existence d'éléments x tels que $\{x,x\} \in E$.

1. Justifier rapidement pourquoi la marche aléatoire sur le réseau est irréductible et réversible.
2. Réciproquement, associer à toute chaîne de Markov irréductible et réversible un réseau avec les deux propriétés suivantes : le graphe sous-jacent est connexe ; la chaîne de Markov associée est la marche aléatoire sur ce réseau.
3. On considère $G = (V,E)$ un 3-cycle (l'autre doux nom d'un triangle). Proposer un choix de conductances sur les 3 arêtes telles que la mesure stationnaire associée soit (le vecteur ligne) $(5/18; 6/18 = 1/3; 7/18)$.

Exercice 25. [Un professeur mouillé ?] Chaque jour, un professeur londonien se rend a son bureau le matin, et revient à sa maison le soir (home sweet home). Le professeur dispose d'un stock important de n parapluies, dont certains sont à sa maison et les autres à son bureau. Lorsqu'il pleut, le professeur prend un parapluie et le transporte avec lui. S'il ne pleut pas en revanche, il ne prend pas de parapluie, si bien que le nombre de parapluies à la maison et au bureau varie avec le temps. On notera X_t le nombre de parapluies stockés à sa maison au matin du jour $t \in \mathbb{N}$. On supposera que les épisodes de pluie sont indépendants entre le matin et le soir, et d'un jour à l'autre également, et qu'ils adviennent avec probabilité $p \in (0,1)$.

1. Préciser l'espace d'état de la chaîne $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et dessiner sur cet espace détat les transitions de la chaîne de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$.
2. Construire un réseau associé dont la marche aléatoire associée est cette chaîne de Markov, et déterminer son unique mesure de probabilité stationnaire.

Exercice 26. Soit deux réels $p, q \in]0,1[$ tels que $p+q=1$. On considère la marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ biaisée[4] sur le graphe induit par $\mathbb{Z}$ sur $\{0,1,\dots,n\}$, de matrice de transition :

$$P(x,y) = p\mathbf{1}_{\{y=x+1\}} + q\mathbf{1}_{\{y=x-1\}} \text{ si } x \in \{1,\dots,n-1\}, y \in \{0,\dots,n\}$$

On rappelle que $\tau_x = \min\{t \geq 0 : X_t = x\}$ désigne le temps d'atteinte de x. On cherche à calculer la quantité $\mathbb{P}_x(\tau_n < \tau_0)$ à l'aide de la notion de résistance équivalente[5].

1. Construire un réseau dont la marche aléatoire associée est la chaîne de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$
2. Soit $x \in \{1,\dots,n-1\}$. Calculer les résistances équivalentes $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow x)$ et $\mathcal{R}(x \leftrightarrow n)$ dans ce réseau.
3. Interpréter $\mathbb{P}_x(\tau_n < \tau_0)$ comme la tension au sommet x dans ce réseau électrique pour des valeurs des tensions aux bornes que l'on précisera, et en déduire la valeur de cette quantité.

Exercice 27. On considère un carré de côté 2 dans le réseau $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire (par exemple) le graphe induit par l'ensemble de sommets $V = \{0,1,2\}^2$ sur $\mathbb{Z}^2$. Les arêtes sont munies d'une résistance unité.

1. Calculer en exploitant les symétries du graphe et au moyen de réductions successives du réseau l'extension harmonique de la fonction $f : V \to \mathbb{R}$ avec $f((0,0)) = 0$ et $f((2,2)) = 1$.
2. Calculer aussi la résistance équivalente $\mathcal{R}((0,0),(2,2))$ dans ce réseau.

Exercice 28. Reprendre l'exercice 27 avec le carré de côté 3 cette fois.

Exercice 29. [Temps de transport dans le n-cycle] On considère le n-cycle, c'est-à-dire le graphe de sommets $\{0,1\dots,n-1\}$ où deux sommets forment une arête si $y-x \equiv 1$ modulo n ou $y-x\equiv -1$ modulo n, et on pose $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur le n-cycle.

1. Calculer $\mathbb{E}_k[\tau_0]$ à l'aide de l'identité du temps de transport.
2. Faire le lien avec la question 5 de l'exercice sur la ruine du joueur, exercice 15 ; on rappelle qu'on avait obtenu que $\mathbb{E}_k[\tau_{\{0,n\}}] = k(n-k)$, avec $\tau_{\{0,n\}} = \min\{t \in \mathbb{N}, X_t \in \{0,n\}\}$.

Exercice 30. [Temps de transport dans les chaînes de naissance et mort] Soit $\{G,c\}$ le réseau associé au graphe $V = \{0,\dots,n\}$ et

$$E = \{\{i,i+1\}, i \in \{0,\dots,n-1\}\} \cup \{\{i,i\}, i \in \{0,\dots,n\}\}$$

et on pose $c_{i,i+1} = \alpha_i$ et $c_{i,i} = \beta_i$.

1. Exprimer le temps de transport $t_{0\leftrightarrow k}$ pour la marche aléatoire sur ce réseau en fonction de la collection $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$ et $(\beta_i)_{0\leq i\leq n}$.

Soit la chaîne de Markov considérée dans l'exercice 20 sur les chaînes de naissance et mort de matrice de transition P définie sur $V\times V$ par $P(i,j) = 0$ si $|i-j| \geq 2$ par : $p_i = P(i,i+1)$, $q_i = P(i,i)$ et $r_i = P(i,i-1)$

4. on dit que la marche est biaisée lorsque p et q sont distincts de 1/2, heuristiquement cela signifie qu'il existe une direction privilégiée pour la marche aléatoire

5. on rappelle en effet que cette quantité a déjà été calculée dans un contexte plus général dans l'exercice sur les chaînes des naissance et de mort

2. Exprimer le temps de transport $t_{0\leftrightarrow k}$ pour cette chaîne de Markov.
3. Soit $\delta \in]0,1[$. On pose $p_i = \delta$ et $r_i = 1-\delta$. Proposer des équivalents de $t_{0\leftrightarrow k}$ lorsque $n \to \infty$ a k fixé (on distinguera les cas $\delta < 1/2$, $\delta = 1/2$ et $\delta > 1/2$).

Exercice 31. Soit $x, a, z \in V^3$ trois sommets d'un réseau $\{G, c\}$. On veut montrer que

$$\mathbb{P}_x(\tau_z < \tau_a) = \frac{\mathcal{R}(a \leftrightarrow x) - \mathcal{R}(x \leftrightarrow x) + \mathcal{R}(a \leftrightarrow z)}{2\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)}$$

1. On rappelle la notation $\tau_{a,z} = \tau_a + \tau_z \circ \theta_a$. Montrer qu'on a l'identité trajectorielle suivante :
$$\tau_{a,z} = \tau_z + \mathbf{1}_{\tau_z<\tau_a}\tau_{a,z} \circ \theta_{\tau_z}.$$
2. En déduire :
$$\mathbb{E}_x[\tau_{a,z,x}] = t_{x\leftrightarrow z} + \mathbb{P}_z(\tau_z < \tau_a)\, t_{a\leftrightarrow z}.$$
3. En déduire :
$$t_{x\leftrightarrow a} + t_{a\leftrightarrow z} - t_{x\leftrightarrow z} = 2\mathbb{P}_z(\tau_z < \tau_a)\, t_{a\leftrightarrow z}.$$
4. Conclure.

Exercice 32. On considère le graphe induit par les sommets de coordonnées

$$V_n = \{(0,j) : 0 \le j \le n\} \cup \{(1,j) : 0 \le j \le n\}$$

sur $\mathbb{Z}^2$, que l'on note G_n.

1. Supposons $n \ge 1$. Montrer que la résistance équivalente $\mathcal{R}_n$ dans le graphe G_n satisfait à
$$1/2 \le \mathcal{R}_n((0,0) \leftrightarrow (0,1)) \le 3/4.$$
2. Justifier l'existence de la limite de la suite $(\mathcal{R}_n((0,0) \leftrightarrow (0,1)))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer cette limite lorsque $n \to \infty$.

Exercice 33. [Urne de Polya II] On reprend les notations de l'exercice 14.

1. Rappeler les transitions de la chaîne de Markov $(N_t, B_t)_{t\in\mathbb{N}}$.
2. On note Γ le chemin aléatoire formé des arêtes $(N_t, B_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. En s'aidant de l'exercice 14, montrer que, si $\vec{e}$ désigne l'arête e de $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ orientée dans le sens des coordonnées croissantes, alors
$$\theta(\vec{e}) = \mathbb{P}(e \in \Gamma)$$
définit un flot sur $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$, et préciser sa valeur lorsque $\vec{e}$ relie (k_1, k_2) et (k_1+1, k_2) puis lorsque $\vec{e}$ relie (k_1, k_2) et (k_1, k_2+1).
3. Montrer que l'énergie de ce flot sur le sous-graphe induit par $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ sur $\{(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star, k_1 + k_2 \le n\}$ satisfait
$$\sum_e \theta^2(e)\mathbf{1}_{\{e-=(k_1,k_2)\le n-1\}} = \sum_{(k_1,k_2),k_1+k_2\le n-1} \left(\frac{1}{k_1+k_2-1}\right)^2 \frac{k_1^2+k_2^2}{(k_1+k_2)^2}$$
4. En déduire, si H_n désigne la série harmonique :
$$\sum_e \theta^2(e)\mathbf{1}_{\{e-=(k_1,k_2)\le n-1\}} \le H_{n-2},$$

5. Montrer également l'équivalent (par exemple à l'aide des sommes de Riemann) :

$$\sum_e \theta^2(e)\mathbf{1}_{\{e-=(k_1,k_2)\leq n-1\}} = (\frac{2}{3}+o(1))\ \log(n),$$

Exercice 34. [Bornes sur la résistance équivalente d'un sous-réseau $\mathbb{Z}^2$] Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note B_n l'ensemble des sommets (x,y) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $|x|+|y| \leq n$, et G_n le graphe induit par $\mathbb{Z}^2$ sur V. On note aussi ∂B_n l'ensemble des sommets (x,y) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $|x|+|y| = n$.

On s'intéresse à la résistance équivalente $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n)$, dont on cherche un minorant et un majorant qui ne diffèrent que d'une constante multiplicative lorsque $n \to \infty$.

1. Prouver que :

$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4(2k+1)}$$

   et en déduire :

$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n) \geq \frac{1}{8}\log(n).$$

2. À l'aide de l'exercice [Urne de Polya II], définir un flot θ sur les arêtes orientées de G, et en déduire la majoration :

$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n) \leq \left(\frac{1}{6} - o(1)\right)\log(n)$$

Exercice 35. Reprendre l'exercice 27 avec le carré de côté 4 cette fois (plus délicat, nécessite la transformation Δ-Y de l'exercice 36, ainsi qu'une calculatrice).

Exercice 36. [Transformation Δ-Y] On considère sur l'ensemble de sommets {1,2,3} deux structures de graphes :
— le triangle tout d'abord, et on note alors c_{ij} la conductance de l'arête $\{i,j\}$
— le graphe en forme de Y si l'on ajoute un sommet annexe au milieu (le point d'intersection des trois branches du Y), et on note alors c_i la conductance de l'arête qui relie le sommet annexe à i

On cherche à déterminer les relations liant $\{c_1, c_2, c_3\}$ d'une part et $\{c_{12}, c_{13}, c_{23}\}$ d'autre part, pour que les deux graphes soient "équivalents".

1. En choisissant pour $\{a, z\}$ les trois couples possibles, et en exprimant que les fonctions hamoniques associées ont même valeur en l'unique point libre, prouver que

$$c_1c_{23} = c_2c_{13} = c_3c_{12}$$

2. Pour déterminer la valeur commune λ de ces 3 produits, exprimer la conductance entre les sommets $\mathcal{C}(1 \leftrightarrow \{2,3\}), \mathcal{C}(2 \leftrightarrow \{1,3\}), \mathcal{C}(3 \leftrightarrow \{1,2\})$ et en déduire les relations :

$$\lambda = \frac{c_1c_2c_3}{c_1+c_2+c_3} = c_{12}c_{13} + c_{12}c_{23} + c_{13}c_{23}$$