Feuille d'exercices n°2 : Chaînes de Markov : exemples et propriétés.

Exercice 13. [Mesure stationnaire] On rappelle que la matrice de transition de la marche aléatoire sur un graphe $G = (V, E)$ sans sommet isolé est définie par

$$P(x, y) = \frac{\mathbf{1}_{x \sim y}}{\deg x},$$

où $\deg x$ est le nombre de voisins de x, et $\mathbf{1}_{x \sim y}$ est l'indicatrice des voisins de x. Pour $n \geq 3$, on pose $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, et on définit les ensembles d'arêtes

$$E = \{\{x, y\},\ |x - y| = 1\} \qquad ; \qquad E' = E \cup \{\{1, n\}\}$$

Soit P la matrice de transition de la marche aléatoire sur le segment (V, E), et Q celle de la marche aléatoire sur le n-cycle (V, E').

1. Décrire les deux matrices de transition P et Q. Sont-elles irréductibles ?
2. Calculer par la méthode de votre choix la mesure de probabilité stationnaire de chacune de ces deux matrices de transition.

Exercice 14. [Urne de Polya] On considère une urne composée d'une boule blanche et d'une boule noire à l'instant initial $t = 0$. À chaque instant $t \geq 0$, on choisit une boule uniformément au hasard dans l'urne, qu'on replace ensuite avec une boule de même couleur pour donner la composition de l'urne à l'instant $t + 1$. On note (N_t, B_t) le nombre de boules noires et blanches respectivement à l'instant t.

1. Quelle est pour tout entier $t \in \mathbb{N}$ la valeur du nombre total de boules dans l'urne à l'instant t, $N_t + B_t$?
2. Préciser la matrice de transition de la chaîne de Markov $(N_t, N_t + B_t)_{t \in \mathbb{N}}$ sur l'espace $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout entier $t \in \mathbb{N}$, N_t suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, t + 1\}$.

Exercice 15. [Ruine du joueur] On considère $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\Omega = \{0, \ldots, n\}$ de matrice de transition

$$P(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, \mathbf{1}_{\{|j-i|=1\}} & \text{si } i \in \{1, \ldots, n-1\} \\ \mathbf{1}_{i=j} & \text{si } i \in \{0, n\}. \end{cases}$$

Il s'agit de la marche aléatoire des gains d'un joueur qui joue à un jeu équilibré, gagne ou perd 1 à chaque tour de jeu et s'arrête lorsqu'il atteint un gain de n ou lorsqu'il atteint 0 et n'a plus d'argent à parier. On s'intéresse au temps aléatoire $\tau = \min\{t \geq 0, X_t \in \{0, n\}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et plus précisément à la loi de la variable aléatoire X_τ (qui est définie sur l'événement $\{\tau < \infty\}$).

1. Soit $k \in \Omega \setminus \{0, n\}$. Écrire l'événement $\{\tau = t\}$ en fonction de $(X_s, 0 \leq s \leq t)$. Justifier soigneusement l'égalité suivante à l'aide de la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}_k[\tau = t + 1 \mid X_1 = k + 1] = \mathbb{P}_{k+1}[\tau = t].$$

2. En déduire, pour $k \in \Omega \setminus \{0, n\}$,

$$\mathbb{P}_k[\tau < \infty \,|\, X_1 = k+1] = \mathbb{P}_{k+1}[\tau < \infty]$$

et

$$\mathbb{E}_k[\tau \,|\, X_1 = k+1] = 1 + \mathbb{E}_{k+1}[\tau].$$

Pour la seconde identité, noter qu'on ne sait pas si la variable aléatoire τ est p.s. finie, mais comme elle est positive ou nulle, son espérance est bien définie.

3. Soit $k \in \Omega$. Posons $f(k) = \mathbb{P}_k[\tau < \infty]$. Donner $f(0)$ et $f(n)$, et montrer que :

$$f(k) = \frac{1}{2} f(k-1) + \frac{1}{2} f(k+1), \quad k \in \Omega \setminus \{0, n\}.$$

Trouver l'unique solution de ce système d'équations.

4. Soit $k \in \Omega \setminus \{0, n\}$. Justifier soigneusement l'égalité suivante à l'aide de la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}_k[\tau < \infty \text{ et } X_\tau = n \,|\, X_1 = k+1] = \mathbb{P}_{k+1}[\tau < \infty \text{ et } X_\tau = n].$$

Soit $k \in \Omega$. Posons $g(k) = \mathbb{P}_k[\tau < \infty \text{ et } X_\tau = n]$. Expliciter $g(0)$ et $g(n)$, et donner l'équation de récurrence satisfaite par g. Résoudre ce système.

5. Soit $k \in \Omega$. Posons $h(k) = \mathbb{E}_k[\tau]$. Expliciter $h(0)$ et $h(n)$, et donner l'équation de récurrence satisfaite par h. Résoudre ce système (on pourra poser $\ell(k) = h(k+1) - h(k)$).

6. Pour cette dernière question, on modifie les probabilités de transition depuis l'état 0 en supposant que $P(0,1) = 1$ (autrement dit, le joueur est un addict et il se remet à jouer immédiatement après avoir perdu). On pose $\widetilde{\tau} = \min\{t \geq 0, X_t = n\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et $\widetilde{h}(k) = \mathbb{E}_k(\widetilde{\tau})$. Donner $\widetilde{h}(0) - \widetilde{h}(1)$ et $\widetilde{h}(n)$. Montrer que $\widetilde{h}$ vérifie la même équation de récurrence que h, et la résoudre.

Exercice 16. [Théorème de représentation] Soit Ω un ensemble fini, et $\mathcal{E}$ un espace mesurable.

1. On suppose donnée une fonction mesurable $f : \Omega \times \mathcal{E} \to \Omega$ et une suite de variables aléatoires i.i.d. $(\xi_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$. Si $k, l \in \Omega$, on note $P(k,l) = \mathbb{P}[f(k, \xi_0) = l]$. Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans Ω et indépendante des ξ_t. On définit par récurrence la suite $(X_t)_{t \geq 0}$ par

$$X_{t+1} = f(X_t, \xi_t).$$

Montrer que pour toute suite $(x_0, \ldots, x_t) \in \Omega^{t+1}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq s \leq t} \{X_s = x_s\} \right) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)\, P(x_0, x_1) \,\cdots\, P(x_{t-1}, x_t).$$

En déduire que X est une chaîne de Markov de matrice de transition P.

2. On se donne réciproquement une matrice stochastique P sur $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, et une suite de variables aléatoires $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ i.i.d. uniformes dans $[0,1]$. On définit une fonction

$$f : \Omega \times [0,1] \to \Omega$$
$$(k, x) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{x \geq \sum_{j=0}^{i-1} P(k,j)}.$$

Montrer que $P(k,l) = \mathbb{P}[f(k, \xi_0) = l]$. En déduire que toute chaîne de Markov sur Ω peut être représentée en loi par une chaîne $(X_t)_{t \geq 0}$ définie par la relation de récurrence $X_{t+1} = f(X_t, \xi_t)$, avec une suite de variables i.i.d. $(\xi_t)_{t \geq 0}$.

Exercice 17. [Collecteur de coupons [2]] Soit $(X_t)_{t\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire

$$Y_t = |\{X_s, 1 \leq s \leq t\}|$$

soit le cardinal de l'ensemble des valeurs distinctes prises par les X_s jusqu'à l'instant t inclus. On s'intéresse dans cet exercice au temps d'atteinte d'un niveau donné par cette chaîne.

1. Observer que $Y_t \in \{0,1,\dots,t\wedge n\}$, et que les trajectoires $t \mapsto Y_t$ sont croissantes. Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\Omega = \{0,1,\dots,n\}$ et donner sa matrice de transition.
2. On note $\tau_k = \min\{t \geq 1, Y_t = k\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le temps d'atteinte de $k \in \{1,\dots,n\}$. Reconnaître la loi de $\mathbf{1}_{\tau_k<\infty}(\tau_{k+1}-\tau_k)$, puis en déduire que

$$\mathbb{P}(\tau_k < \infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\tau_k] = n \sum_{j=n-k+1}^{n} \frac{1}{j}.$$

   Donner un équivalent de $\mathbb{E}[\tau_k]$ lorsque
   - $n \to \infty$ avec $\frac{k}{n} \to \alpha \in (0,1)$;
   - $n \to \infty$ avec $\frac{\log n-k+1}{\log n} \to 0$ (par exemple, $k = n$).

   Comparer en particulier le temps nécessaire pour atteindre $n/2$ et n.
3. Calculer la probabilité de l'événement $A_i^t = \bigcap_{1\leq s\leq t}\{X_s \neq i\}$. Exprimer l'événement $\{\tau_n > t\}$ en fonction des A_i^t puis en déduire la majoration : pour tout $c > 0$,

$$\mathbb{P}(\tau_n > \lceil n\log n + cn\rceil) \leq \exp(-c),$$

   où $\lceil x\rceil$ désigne l'entier au dessus de x (le "plafond" de x en anglais), $\lceil x\rceil - 1 < x \leq \lceil x\rceil$.

Exercice 18. [Chaîne image] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans Ω et de matrice P, et $f : \Omega \to \Omega'$ une fonction surjective. On pose $Y_t = f(X_t)$, et on suppose que, pour tout $y_1, y_2 \in \Omega'$, la probabilité de transition $P(x, f^{-1}\{y_2\})$ est la même pour tout $x \in f^{-1}\{y_1\}$. On note alors cette quantité $Q(y_1,y_2)$.

1. Vérifier que Q est une matrice stochastique sur Ω'.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{N}$ et $(y_s)_{0\leq s\leq t} \in (\Omega')^{t+1}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0\leq s\leq t}\{Y_s = y_s\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{0\leq s\leq t-1}\{Y_s = y_s\}\right) Q(y_{t-1},y_t)$$

   et en déduire que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur Ω' de matrice de transition Q.
3. On appelle mesure image de π par f la mesure de probabilité ν sur Ω' définie par $\nu(y) = \pi(f^{-1}\{y\})$, $y \in \Omega'$. Si π est une mesure stationnaire pour P, que dire de la mesure image de π par f ?

2. Interprétation : une collection d'images compte n images différentes ; leur achat chez notre marchand de journaux peut être modélisé par un tirage avec remise ; la question est de savoir en fonction de n quand est-ce que l'on a une collection complète.

Exercice 19. [Urne d'Erhenfest [3]] Soit $n \geq 1$. Le graphe $G = (V, E)$ défini par

$$V = \{0,1\}^n \text{ et } E = \{\{x, y\} \in V^2 : \sum_{1 \leq i \leq n} |x(i) - y(i)| = 1\}$$

s'appelle l'hypercube de dimension n. On considère la marche aléatoire simple $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sur ce graphe. L'application somme des coordonnées $f : x \in V \mapsto \sum_{1\leq i\leq n} x(i) \in \{0, \dots, n\}$ appliquée à $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ donne $(Y_t = f(X_t))_{t\in\mathbb{N}}$.

1. Représenter le graphe obtenu pour $n = 2$ et $n = 3$, et justifier ainsi le nom d'hypercube pour le graphe $G = (V, E)$.
2. Quel est le degré des sommets de G ?
3. Donner la matrice de transition P de la chaîne $(X_t)_{t\geq 0}$. Est-elle irréductible ? Montrer que P admet une unique mesure de probabilité stationnaire π, et la préciser.
4. Vérifier à l'aide du résultat de l'exercice 18 par exemple que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est encore une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition Q. Est-elle irréductible ?
5. On appelle mesure image de π par f la mesure ν sur $\{0, \dots, n\}$ définie par $\nu(k) = \pi(f^{-1}\{k\})$, $k \in \{0, \dots, n\}$. Déterminer ν et vérifier que Q est réversible par rapport à la mesure de probabilité ν.
6. En déduire à l'aide du cours la valeur de $g(k) = \mathbb{E}_k[\tau_k^+(Y)]$. Calculer la limite de

$$\frac{1}{n} \log(g(k))$$

lorsque $n \to \infty$ et $\frac{k}{n} \to \alpha \in (0, 1)$. Donner enfin un équivalent de $g(\frac{n}{2})$ (on pourra s'aider de la formule de Stirling $n! \sim (\frac{n}{\mathrm{e}})^n \sqrt{2\pi n}$),

Exercice 20. [Chaîne de naissance et mort] Soit $\Omega := \{0, 1, \dots, n\}$. On appelle chaîne de naissance et mort une chaîne de Markov dont la matrice de transition est tridiagonale, c'est-à-dire telle que $P(i, j) = 0$ si $|i - j| \geq 2$. On notera $p_i = P(i, i+1)$, $q_i = P(i, i)$ et $r_i = P(i, i-1)$ avec la convention que r_0 et p_n valent tous deux 0. Posons $w_0 = 1$ et pour $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$w_j = \frac{\prod_{0\leq i\leq j-1} p_i}{\prod_{1\leq i\leq j} r_i}.$$

1. Faire un dessin de Ω et indiquer sur ce même schéma les probabilités de transition entre les états de Ω. Donner une CNS pour que la chaîne soit irréductible. On supposera cette condition satisfaite dans la suite de l'exercice.
2. Montrer que P est réversible et exprimer son unique loi stationnaire π à l'aide des quantités $(w_j)_{0\leq j\leq n}$.

L'objectif de la suite de l'exercice est d'estimer les quantités $\mathbb{E}_k[\tau_\ell]$. Pour $\ell \in \{1, \dots n\}$, on pose $\Omega_\ell := \{0, 1, \dots, \ell\}$ et

$$P_\ell(x, y) = P(x, y) \text{ si } x, y \in \Omega_\ell \setminus \{(\ell, \ell)\} \text{ et } P_\ell(\ell, \ell) = p_\ell + q_\ell$$

3. Interprétation de ce modèle, introduit en 1907 par les époux Ehrenfest pour illustrer certains des paradoxes apparus dans les fondements de la mécanique statistique : on dipose de 2 urnes qui comprennent au total n boules, et, à chaque instant, une boule choisie au hasard parmi les n boules est changée d'urne ; on veut alors comprendre la répartion des boules dans les 2 urnes.

P_ℓ définit encore une matrice de transition, et on note $(\widetilde{X}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov associée à P_ℓ, et X la chaîne de Markov associée à P. On pose pour $0 \le \ell \le n$, $\tau_k^+ = \inf\{t \ge 1 \,:\, X_t = k\}$ et $\tau_k = \inf\{t \ge 0 \,:\, X_t = k\}$ les temps de retour et d'atteinte pour X, et, pour $0 \le k \le \ell$, $\widetilde{\tau}_k^+ = \inf\{t \ge 1 \,:\, \widetilde{X}_t = k\}$ et $\widetilde{\tau}_k = \inf\{t \ge 0 \,:\, \widetilde{X}_t = k\}$ ceux pour $\widetilde{X}$.

3. Montrer que P_ℓ est réversible et exprimer son unique loi stationnaire π_ℓ à l'aide des $(w_j)_{0\le j\le \ell}$. Que peut-on dire de π_ℓ et de $\pi_{|\{0,\dots,\ell\}}$?
4. Exprimer $\mathbb{E}_\ell[\widetilde{\tau}_\ell^+]$ en fonction de $\mathbb{E}_{\ell-1}[\tau_\ell]$, et en déduire la valeur de cette dernière quantité en fonction des paramètres $(w_j)_{0\le j\le n-1}$ et $(r_j)_{0\le j\le n-1}$.
5. En déduire la valeur de $\mathbb{E}_k[\tau_\ell]$ pour tous $0 \le k < \ell \le n$.

Exercice 21. [Lemme de la cible aléatoire] Soit $(X_t)_{t\ge 0}$ chaîne de Markov de matrice de transition P irréductible sur Ω, qui admet une mesure de probabilité stationnaire π. On pose

$$\begin{aligned} f : \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbb{E}_x[\tau_{V_\pi}] := \sum_{z\in\Omega} \pi(z)\, \mathbb{E}_x[\tau_z]. \end{aligned}$$

1. Montrer proprement que pour tout $x, z \in \Omega$,
$$\mathbb{E}_x[\tau_z^+] = 1 + \sum_{y\in\Omega} P(x,y)\, \mathbb{E}_y[\tau_z].$$
2. En déduire que la fonction f est harmonique pour P sur Ω. On pourra utiliser la relation vue en cours entre $\mathbb{E}_x(\tau_x^+)$ et $\pi(x)$.
3. Que peut-on en déduire sur la fonction f ? Interpréter ce résultat.

Exercice 22. [Dernier site occupé] On considère la marche aléatoire $(X_t)_{t\ge 0}$ sur le $(n \ge 3)$-cycle :

$$G = (V, E) \qquad ; \qquad V = \{1, 2, \dots, n\} \qquad ; \qquad E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \dots, \{n-1,n\}, \{n,1\}\}.$$

On convient dans ce qui suit que $n + 1 = 1$ (autrement dit, $V = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). On note $\tau_x = \min\{t \ge 0 \,|\, X_t = x\}$ le temps d'atteinte de x, et Y le dernier site visité par la marche aléatoire, formellement défini par
$$\{Y = y\} = \{\tau_y = \max_{1\le x\le n} \tau_x\}.$$

1. Expliquer pourquoi
$$\{Y = y\} = \{\tau_{y-1} < \tau_{y+1} < \tau_y\} \cup \{\tau_{y+1} < \tau_{y-1} < \tau_y\}.$$
2. Montrer que, pour tout $y \in \{1, \dots, n\}$,
$$\mathbb{P}_{y-1}(\tau_{y+1} < \tau_y) = \frac{1}{n-1}.$$
On pourra trouver un système d'équations pour la fonction $f(k) = \mathbb{P}_k[\tau_{y+1} < \tau_y]$, et résoudre ce système.
3. En déduire la valeur de $\mathbb{P}_x[Y = y]$, et reconnaître la distribution de la variable aléatoire Y. Commenter ce résultat.