Feuille d'exercices n°1 : Irréductibilité, apériodicité, réversibilité.

On suppose dans toute cette feuille que Ω ou V, selon les notations retenues dans chaque exercice, est un ensemble fini.

Exercice 1. [Matrice de transition symétrique]

1. Caractériser l'ensemble des matrices stochastiques P dont la mesure uniforme est une mesure stationnaire.

Une matrice stochastique P sur Ω est dite symétrique si pour tout $x, y \in \Omega$,

$$P(x,y) = P(y,x).$$

2. Donner une mesure stationnaire pour P.

Exercice 2. [Mesure stationnaire de la marche aléatoire simple sur un graphe] On appelle graphe une paire (V, E), où V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommmets, et E est un sous-ensemble de paires non ordonnées d'éléments de E, appelées arêtes. Noter que les paires de type $\{x, x\}$, appelées boucles, sont autorisées. On suppose G sans sommet isolé [1]. On définit une matrice stochastique sur V par

$$P(x,y) = \frac{\mathbf{1}_{x\sim y}}{\deg x},$$

appelée matrice de transition de la marche aléatoire sur G, où $\mathbf{1}_{x\sim y} = \mathbf{1}_{\{x,y\}\in E}$ est l'indicatrice des voisins de x, et $\deg x = \sum_{y\in V} \mathbf{1}_{x\sim y}$ est le nombre de voisins de x.

1. Vérifier que P est stochastique, sous quelle condition sur le graphe la matrice stochastique P est elle irréductible ?
2. Exprimer sous cette condition l'unique mesure (de probabilité) stationnaire π.
3. On dit que le graphe est régulier lorsque tous ses sommets ont même degré. Que dire dans ce cas ? Faire le lien avec l'exercice 1.

Exercice 3. [Matrice de transition réversible et opérateur auto-adjoint] Montrer que P est réversible par rapport à π ssi P est autoadjoint dans $(\mathbb{R}^\Omega, \langle ., . \rangle_\pi)$ avec le produit scalaire défini par défini par $\langle f, g\rangle_\pi = \sum_{x\in V} f(x)g(x)\pi(x)$ c'est-à-dire ssi pour tout $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$, $\langle Pf, g\rangle_\pi = \langle f, Pg\rangle_\pi$.

Exercice 4. [Matrice de transition réversible] Soit P une matrice stochastique sur Ω réversible par rapport à une mesure de probabilité π. Montrer que P^2 est encore réversible par rapport à π.

Exercice 5. On appelle n-cycle le graphe (V, E) avec $V = \{0, \dots, n-1\}$ et $\{x, y\} \in E$ ssi $x = y \pm 1 \mod n$, où on rappelle que deux entiers sont égaux modulo n si leur différence est un multiple de n. Ainsi, $E = \{\{x, y\}, |x-y| = 1\} \cup \{\{0, n-1\}\}$.

1. c'est-à-dire que $\deg(x) > 0$ pour tout sommet x

1. Justifier par un dessin du graphe l'appellation n-cycle.

Soit maintenant deux réels $p, q \in]0,1[$ de somme 1. On considère la matrice stochastique sur V

$$P(x,y) = \mathbf{1}_{\{y=x+1 \mod n\}} p + \mathbf{1}_{\{y=x-1 \mod n\}} q$$

2. Pour quelles valeurs de p la matrice stochastique P est-elle réversible ?

Exercice 6. [Lazy chain, ou chaîne paresseuse] Soit P une matrice stochastique, on pose $Q = (P+I)/2$.

1. Montrer que Q définit une matrice stochastique, et une matrice apériodique.
2. Observer qu'une mesure de probabilité π sur Ω est une mesure stationnaire pour P ssi elle est une mesure stationnaire pour Q.

Exercice 7. [Périodicité du n-cycle] On appelle n-cycle le graphe (V,E) avec $V = \{0,\dots,n-1\}$ et $E = \{\{x,y\}, |x-y| = 1\} \cup \{\{0,n-1\}\}$, et on note P la matrice de transition de la marche aléatoire sur ce graphe. On pose $\mathcal{T}(x,y) = \{t \geq 0, P^t(x,y) > 0\}$. On définit un chemin de longueur t de x à y comme une collection de sommets $(x_s)_{0 \leq s \leq t} \in V^{t+1}$ tel que pour tout $s \in \{0,\dots,t-1\}, \{x_s, x_{s+1}\} \in E$.

2. Observer que $t \in \mathcal{T}(x,y)$ ssi il existe un chemin de longueur t de x à y
3. Dans le cas $n = 4$, expliciter $\mathcal{T}(0,0), \mathcal{T}(0,1), \mathcal{T}(0,2), \mathcal{T}(0,3)$ et dans le cas $n = 5$, expliciter $\mathcal{T}(0,0), \mathcal{T}(0,1), \mathcal{T}(0,2), \mathcal{T}(0,3), \mathcal{T}(0,4)$.
4. Décrire $\mathcal{T}(x,y)$ dans le cas général en fonction des quantités k et $n-k$, où $k = |x-y|$.
5. En déduire la période de P si n est pair et si n est impair.
6. On suppose n impair. Trouver le plus petit entier t tel que pour tout $x, y \in V$, $P^t(x,y) > 0$.

Exercice 8. [Unicité de la mesure stationnaire] Soit P une matrice stochastique irréductible sur Ω. On cherche à montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité stationnaire pour P par une méthode distincte de celle vue en cours. On note π_1 et π_2 deux mesures de probabilité stationnaires de P.

1. Soit $y \in \Omega$ qui minimise $x \mapsto \pi_1(x)/\pi_2(x)$. Partant de l'égalité

$$\sum_{x \in \Omega} \frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)} \frac{\pi_2(x)}{\pi_2(y)} P(x,y) = \frac{\pi_1(y)}{\pi_2(y)}$$

   montrer que tout x tel que $P(x,y) > 0$ vérifie $\pi_1(y)/\pi_2(y) = \pi_1(x)/\pi_2(x)$.

2. Obtenir la même conclusion pour tout $x \in \Omega$, puis conclure.

Exercice 9. [Somme de Césaro et existence d'une mesure stationnaire] Soit μ une mesure de probabilité sur Ω. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$Q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k \quad \text{et} \quad \mu_n = \mu Q_n$$

la moyenne de Césaro des itérées de P, et son application à μ.

1. Vérifier que la mesure de probabilité μ_n satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$|\mu_n P(x) - \mu_n(x)| \leq 1/n.$$

2. Justifier l'existence d'une suite extraite $(n_k)_k$ telle que pour tout x, la suite $(\mu_{n_k})_k$ converge vers une limite notée ν. Montrer que la mesure limite ν est une mesure de probabilité stationnaire pour P.

Exercice 10. [Somme de Césaro : convergence sans extraction] Soit μ une mesure de probabilité sur Ω. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$Q_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k \qquad \text{et} \qquad \mu_n = \mu Q_n$$

la moyenne de Césaro des itérées de P, et son application à μ. On note I la matrice identité, et on considère l'opérateur $I-P$ qui agit par multiplication par la droite selon $\mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}^\Omega, \nu \mapsto \nu(I-P)$ (noter que l'on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^\Omega$ plutôt que le sous-ensemble des mesures de probabilité.)

1. Calculer νQ_n dans le cas où $\nu \in \mathrm{Im}(I-P)$ puis dans le cas où $\nu \in \mathrm{Ker}(I-P)$. En déduire que $\mathrm{Ker}(I-P) \cap \mathrm{Im}(I-P) = \{0\}$, et conclure à l'aide du théorème du rang que $\mathrm{Ker}(I-P) \oplus \mathrm{Im}(I-P) = \mathbb{R}^\Omega$.
2. Soit $\mu \in \mathbb{R}^\Omega$. En déduire qu'il existe $\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{R}^\Omega$ telles que $\mu = \nu_0(I-P) + \nu_1$ avec $\nu_1(I-P) = 0$. Calculer μ_n en fonction de ν_0 et ν_1 et en déduire que $\mu_n \to \nu_1$ quand $n \to \infty$.
3. Déduire des questions précédentes que $\nu_1 = \nu$.

Exercice 11. [Propriétés spectrales, I] On étudie les propriétés de P vu comme opérateur agissant par multiplication à gauche $P : \mathbb{C}^\Omega \to \mathbb{C}^\Omega, f \mapsto Pf$.

1. Montrer que P est un opérateur contractant pour la norme $\|.\|_\infty$, $\|f\|_\infty = \max_z |f(z)|$:

$$\|Pf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

2. Soit π une mesure de probabilité stationnaire de P. Montrer que P est un opérateur contractant pour la norme $\|.\|_\pi$ induite par le produit scalaire $\langle f, g\rangle_\pi = \sum_z f(z)\bar{g}(z)\pi(z)$:

$$\|Pf\|_\pi \leq \|f\|_\pi$$

3. Soit f un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda \neq 1$. Montrer que $\sum_x f(x)\pi(x) = 0$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de P, alors son module satisfait $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 12. [Propriétés spectrales, II] Soit P stochastique irréductible réversible par rapport à une mesure de probabilité π. On munit l'ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle_\pi = \sum_x f(x)g(x)\pi(x)$. Posons $n = |\Omega|$.

1. Construire une base de vecteurs propres $(f_k)_{1\leq k\leq n}$, orthonormée pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pi$. Indication : on pourra considérer la matrice auxilliaire Q définie par

$$Q(x, y) = \sqrt{\pi(x)/\pi(y)}\, P(x, y),$$

qui, en tant que matrice symétrique, admet une base de vecteurs propres orthonormée pour le produit scalaire usuel euclidien.

2. On notera les valeurs propres associées $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$. En déduire que

$$P^t(x,y) = \sum_{k \geq 1} f_k(x) f_k(y) \pi(y) \lambda_k^t.$$

3. On suppose désormais les valeurs propres classés par valeur absolue décroissante. Étudier l'espace propre associé au vecteur propre 1, et en déduire

$$\left| \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} - 1 \right| \leq |\lambda_2|^t \sum_{k \geq 2} f_k(x) f_k(y)$$

4. Observer que : $\langle \delta_x, \delta_x \rangle_\pi = \pi(x)$, puis développer f dans la base des f_k pour conclure que $\sum_k f_k^2(x) = \frac{1}{\pi(x)}$.
5. En déduire finalement

$$\left| \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} - 1 \right| \leq \frac{|\lambda_2|^t}{\min_x \pi(x)}$$

   Si P apériodique, $|\lambda_2| < 1$ (voir polycopié), et on obtient donc une nouvelle preuve du théorème de convergence, avec une vitesse de convergence un peu plus explicite.