QCM récapitulatif (avec M=2)

Exercice 1. Discerner parmi les énoncés suivants lesquels sont vrais et lesquels sont faux ; justifier de façon très succinte (donner un contre exemple lorsque l'énoncé est faux). Certaines questions sont des questions de cours ou des applications directes du cours ; d'autres, marquées par une étoile, demandent plus de réflexion.

P est une matrice stochastique sur Ω fini (sans conditions supplémentaires, sauf mention explicite).

Les questions suivantes traitent de l'irréductibilité et de l'apériodicité.

1. Si P est irréductible, pour tout $x, y \in \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$, $P^n(x, y) > 0$.
   Correction. *FAUX.*
   Considérer $\Omega = \{x, y\}$, *et* $P(x, y) = \mathbb{1}_{y \neq x}$ *(évolution déterministe, on change de site à chaque pas), alors* P *est irréductible, mais* $P^n(x, y) = \mathbb{1}_{n\ pair, x=y} + \mathbb{1}_{n\ impair, x \neq y}$.
2. Si P est apériodique et irréductible, pour tout $x, y \in \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$, $P^n(x, y) > 0$.
   Correction. *VRAI. (Cours)*
3. Si P est apériodique et irréductible, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$, pour tout $x, y \in \Omega$, $P^n(x, y) > 0$.
   Correction. *VRAI. (En fait, cet énoncé est équivalent à l'énoncé précédent, puisque* Ω *est fini).*
4. ** S'il existe $\epsilon > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x, y \in \Omega$, $P^m(x, y) > \varepsilon$, alors pour tout x, $(P^n(x, \cdot))_{n \geq 0}$ converge vers son unique mesure de probabilité stationnaire.
   Correction. *VRAI. Il suffit de reprendre à partir de la moitié environ la preuve du théorème fondamental de convergence, vue lors du premier chapitre ;* P *admet une mesure de probabilité stationnaire* π *[voir Exercice 10 du TD]. On note* $\Pi(x, y) = \pi(y)$ *la matrice dont toutes les lignes sont égales à* π. *Grâce à l'hypothèse, on peut écrire* $P^m(x, y) = \varepsilon \Pi(y) + (1 - \varepsilon) Q(x, y)$ *pour une matrice stochastique* Q *qui vérifie* $\Pi = \Pi Q = Q \Pi$ *; on procède alors comme dans le cours : par récurrence, on a pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $P^{mk}(x, y) = [1 - (1 - \varepsilon)^k] \pi(y) + (1 - \varepsilon)^k Q(x, y)$, *puis pour* $0 \leq r < m$, $P^{mk+r}(x, y) = [1 - (1 - \varepsilon)^k] \pi(y) + (1 - \varepsilon)^k (Q.P^r)(x, y)$ *permet de conclure.*

Les questions suivantes traitent des mesures invariantes de P.

1. P admet au plus une mesure de probabilité stationnaire.
   Correction. *FAUX. Considérer* $\Omega = \{x, y\}$, *et* $P(x, y) = \mathbb{1}_{x=y}$ *(évolution déterministe triviale, on reste indéfiniment sur le même site), alors* δ_x *et* δ_y *sont deux mesures invariantes.*
2. P admet au moins une mesure de probabilité stationnaire. [voir Exercice 10 du TD1].
   Correction. *VRAI*
3. Si la suite de mesure de probabilités $(P^n(x, .))_n$ converge, alors la mesure de probabilité limite est nécessairement une mesure de probabilité stationnaire.

Correction. *VRAI. Si* $P^n(x,.) \to \mu$ *alors* $P^{n+1}(x,.) = P^n(x,.) \cdot P \to \mu \cdot P$ *(par continuité de la multiplication par* P *à droite). Par unicité de la limite,* $\mu = \mu \cdot P$ *est donc une mesure stationnaire.*

4. * Si la suite de mesure de probabilités $(P^n(x,.))_n$ converge le long d'une sous-suite, alors la mesure de probabilité limite est nécessairement une mesure de probabilité stationnaire.
   Correction. *FAUX. Reprendre l'exemple* $\Omega = \{x, y\}$*, et* $P(x,y) = \mathbb{1}_{y \neq x}$ *(évolution déterministe, on change de site à chaque pas), alors* δ_x *est la limite de* $P^{2n}(x,.)$*, pourtant* $\delta_x P = \delta_y$*.*
5. Si la suite de mesure de probabilités $(P^n(x,.))_n$ converge, alors la mesure de probabilité limite est indépendante de x.
   Correction. *FAUX. Reprendre le contre-exemple* $\Omega = \{x, y\}$*, et* $P(x,y) = \mathbb{1}_{x=y}$ *(qui n'est pas irréductible).*

Les questions suivantes traitent des matrices de transition réversibles.

1. Si P est irréductible et réversible (par rapport à une mesure de probabilité π), alors P est apériodique.
   Correction. *FAUX. considérer la marche aléatoire sur* $G = (\Omega, E)$ *ou* $G' = (\Omega, E')$*, avec* $\Omega = \{0, \ldots, n-1\}$ *avec dans les deux cas n pair, et* $E' = \{\{x,y\} \in \Omega^2; y = x+1\}$ *(marche aléatoire usuelle) et* $E' = \{\{x,y\} \in \Omega^2; y - x + 1 \text{ mod } n\}$ *(marche aléatoire sur le n-cycle) ; elle est irréductible, réversible, mais pas apériodique.*
2. Si P est irréductible, P peut être réversible par rapport à deux mesures de probabilité π et π' distinctes.
   Correction. *FAUX. Notons que puisque* P *est irréductible, les mesures stationnaires sont non nulles en tout point [Exercice 2 du TD1]. Ensuite,* x, y *étant donnés, il existe* n *tel que* $P^n(x,y) \neq 0$*. Enfin, si* P *est réversible par rapport à* π_1 *et* π_2*, on a encore* P^n *réversible par rapport à* π_1 *et* π_2*. On a donc* $\pi_1(x)P^n(x,y) = \pi_1(y)P^n(y,x)$ *et* $\pi_2(x)P^n(x,y) = \pi_2(y)P^n(y,x)$ *; on en tire que* $P^n(y,x) \neq 0$ *donc on peut prendre le quotient et cela donne* $\pi_1(x)/\pi_2(x) = \pi_1(y)/\pi_2(y)$*. On a deux mesures de probabilité proportionnelles, elles sont donc égales.*
3. * Si P est irréductible et réversible par rapport à une mesure de probabilité π, alors la période de P est au plus de 2.
   Correction. *VRAI. En effet, considérons* $x \neq y$ *avec* $P(x,y) \neq 0$ *(de tels éléments existent). On sait aussi que,* P *étant irréductible, [Exercice 2 du TD1],* $\pi(x) \neq 0$ *et* $\pi(y) \neq 0$*. Finalement,* $\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x)$ *implique* $P(y,x) \neq 0$*. On a donc au final* $P^2(x,x)$ *donc* $2 \in \mathcal{T}(x)$ *donc la période de* P*, qui est bien définie puisque* P *est irréductible, divise 2, c'est-à-dire que la période vaut* 1 *ou* 2*.*

On considère une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Les questions suivantes traitent des mesures harmoniques.

1. Si f est harmonique pour P sur Ω, alors f est constante.
   Correction. *FAUX. (Manque la condition d'irréductibilité, on pourra construire un contre-exemple).*
2. Si f est harmonique pour P sur Ω et P irréductible, alors f est constante.
   Correction. *VRAI. (Cours).*
3. Si P est irréductible, une fonction harmonique sur $B \subset \Omega$ atteint son maximum sur B. [voir Exercice 9 du TD1].

Correction. *FAUX. Petit piège : Elle atteint son maximum sur $\Omega \setminus B$, mais pas forcément sur B ! On retiendra qu'une fonction harmonique atteint son maximum sur les "bords" (là où aucune condition d'harmonicité n'est imposée).*

4. Si P est irréductible, une fonction harmonique sur $B \subset \Omega$ atteint son minimum sur $\Omega \setminus B$.
   Correction. *VRAI. L'exercice 9 du TD1 parle du maximum, mais, si f est harmonique par rapport à P, $-f$ est encore harmonique, donc le même énoncé vaut pour le mimimum !*
5. * Si f est harmonique pour P sur Ω privé d'un point et P irréductible, alors f est constante.
   Correction. *VRAI. Notons x le point en lequel f n'est pas harmonique En effet, f atteint son maximum et (d'après la question prcédente) aussi son minimum en le point x ; ceci implique que f est constante.*

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ la chaîne de Markov de matrice de transition P. On note $\tau_x = \min\{t \geq 0, X_t = x\}$ et $\tau_x^+ = \min\{t \geq 1, X_t = x\}$. On pose $\nu_x(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_t = z, t < \tau_x^+)$. Les questions suivantes portent sur la représentation probabiliste des mesures invariantes. On suppose ici P irréductible.

1. Pour tout x, ν_x est une mesure stationnaire pour P (pas nécessairement une mesure de probabilité) , c'est-à-dire que $\nu_x P = \nu_x$.
   Correction. *VRAI. (Voir preuve dans le cours)*
2. Pour tout x, y, on a l'égalité (entre nombres réels) $\nu_x(\Omega) = \nu_y(\Omega)$.
   Correction. *FAUX*
3. Pour tout x, y, on a l'égalité (entre mesures) $\nu_x = \nu_y$.
   Correction. *FAUX. Puisque d'après la question précédente, elles n'ont pas même la même masse.*
4. Pour tout x, y, on a l'égalité (entre mesures de probabilité) $\frac{1}{\nu_x(\Omega)}\nu_x = \frac{1}{\nu_y(\Omega)}\nu_y$.
   Correction. *VRAI. Ce sont deux mesures de probabilité stationnaires d'après le cours, et P étant irréductible, il existe une seule mesure de probabilité stationnaire.*
5. Pour tout x, on a $\mathbb{E}_x(\tau_x) = \nu_x(\Omega)$.
   Correction. *FAUX. Petit piège : il faut prendre τ_x^+ et non τ_x (qui est toujours nul sous $\mathbb{P}_x$) pour que l'égalité soit vraie. D'ailleurs, $\mathbb{E}_x(\tau_x) = \mathbb{E}_x(0) = 0$ quelque soit $x \in \Omega$...*
6. * π est une mesure de probabilité stationnaire pour P ssi pour tout x, $\mathbb{P}_\pi(X_0 \neq x \cap X_1 = x) = \mathbb{P}_\pi(X_0 = x \cap X_1 \neq x)$.
   Correction. *VRAI*
   En effet $\sum_y \pi(y)P(y,x) = \pi(x)$ se réecrit $\sum_{y:y\neq x} \pi(y)P(y,x) + P(x,x)\pi(x) = \pi(x)$ soit encore $\sum_{y:y\neq x} \pi(y)P(y,x) = \pi(x)(1 - P(x,x)) = \pi(x)\sum_{y:y\neq x} P(x,y)$. En terme de la chaîne de Markov, cela signifie : $\mathbb{P}_\pi(X_0 \neq x \cap X_1 = x) = \mathbb{P}_\pi(X_0 = x \cap X_1 \neq x)$.

Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur Ω. Les questions suivantes traitent de la distance en variation totale et des couplages de mesure de probabilité.

1. Si $\sum_x (\mu(x) - \nu(x))\mathbb{1}_{\mu(x)>\nu(x)} = 0$, alors $\|\mu - \nu\|_{TV} = 0$.
   Correction. *VRAI. C'est une des définitions de la distance en variation totale ; on a $\mu(x) \leq \nu(x)$ pour tout x mais $\sum_x \mu(x) = \sum_x \nu(x) = 1$ puisque ce sont des mesures de probabilité, donc ces deux mesures sont égales.*
2. S'il existe un couplage (X, Y) un couplage de μ et ν tel que $\mathbb{P}(X = Y) \geq 0.8$ alors $\|\mu - \nu\|_{TV} < 0.2$.

Correction. *FAUX. On déduit de l'énoncé que $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq 0.2$, donc l'infimum sur les couplages est plus petit, mais seulement au sens large : $\|\mu - \nu\|_{TV} \leq 0.2$; on ne peut donc pas savoir si $\|\mu - \nu\|_{TV} < 0.2$.*

3. Si pour tout couplage (X, Y) de μ et ν, $\mathbb{P}(X = Y) \leq 0.9$, alors $\|\mu - \nu\|_{TV} \leq 0.1$.
   Correction. *FAUX. On déduit de l'énoncé que $\mathbb{P}(X \neq Y) \geq 0.1$, donc que $\|\mu - \nu\|_{TV} \geq 0.1$, mais certainement pas l'inégalité dans l'autre sens.*
4. * Les mesures images de μ et ν par f satisfont à $\|\mu \circ f^{-1} - \nu \circ f^{-1}\|_{TV} \leq \|\mu - \nu\|_{TV}$ [si $f : \Omega \to \Omega'$ alors $\mu \circ f^{-1}(A) := \mu(f^{-1}(A))$ pour tout $A \subset \Omega'$.]
   Correction. *VRAI. On utilise la définition rappelée de la mesure image :*
   $$\|\mu \circ f^{-1} - \nu \circ f^{-1}\|_{TV} = \max_A \mu(f^{-1}(A)) - \nu(f^{-1}(A)) \leq \max_B \mu(B) - \nu(B) = \|\mu - \nu\|_{TV}$$

Soit $(G = (V, E), \{c(e)\})$ un réseau, et $a, z \in V$ deux sommets distincts de G. On suppose que P associée à la marche aléatoire sur ce réseau est irréductible. Un flot est dit non nul s'il n'est pas la fonction identiquement nulle sur les arêtes orientées de E. Les questions suivantes traitent de flots et de résistance équivalente :

1. Il existe un flot θ non nul de a à z d'intensité nulle ($\|\theta\| := \text{div } \theta(a) = 0$).
   Correction. *VRAI. Choisir un cycle orienté $\vec{e_1} \dots \vec{e_n}$ puis poser $\gamma(\vec{e_i}) = 1$ comme dans le cours (plus la contrainte d'antisymétrie) et 0 en dehors. Ce flot est non nul mais il est bien d'intensité nulle (et ceci même si a ou z appartiennent au cycle).*
2. Il existe un flot θ non nul de a à z qui vérifie la loi des cycles et est d'intensité nulle.
   Correction. *FAUX (Cours).*
3. Il existe un unique flot de a à z qui vérifie la loi des cycles.
   Correction. *FAUX (Cours). Prendre deux flots courants d'intensité distinctes : pour avoir l'unicité, comme dans la proposition du cours, il faut en plus fixer l'intensité !*
4. La résistance équivalente est égale à la moitié de la différence de tension entre la source a et le puits z si le courant est d'intensité 2.
   Correction. *VRAI. Si on multiplie le courant par 2, alors toutes les différences de tension sont aussi multipliées par 2 (ceci est une conséquence directe de la loi d'Ohm, on parle de réponse linéaire en électricité).*
5. La fonction $x \mapsto \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_z)$ est la tension en x lorsque la tension aux bornes de a et de z est fixée à 0 et 1 respectivement.
   Correction. *FAUX.*
   On a inversé les rôles de a et de z dans cet énoncé ; c'est la tension en x lorsque la tension aux bornes de a et de z est fixée à 1 et 0 respectivement ; en effet, ces deux fonctions sont harmoniques par rapport à P (défini comme dans le cours) sur $\Omega \setminus \{a, z\}$, et on a unicité de la fonction harmonique.
6. Le flot nul est l'unique flot d'énergie minimal de a à z.
   Correction. *VRAI.*
   C'est un flot de a à z et son énergie vaut 0, qui est bien l'énergie minimale possible ; pour avoir un flot courant non trivial, comme dans le théorème de Thomson, il faut fixer en plus l'intensité du flot à une valeur non nulle.

Soit τ un temps d'arrêt pour la filtration naturelle de la chaine de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ de matrice de transition P. Quelques questions sur les temps d'arrêt pour finir :

1. $\mathbb{P}(X_{t+1} = y \cap X_t = x \cap \{\tau \leq t\}) = P(x, y)\mathbb{P}(X_t = x \cap \{\tau \leq t\})$

Correction. *VRAI.*

2. $\mathbb{P}(X_{t+1} = y \,|\, X_t = x \cap \{\tau \geq t-1\}) = P(x,y)$
   Correction. *FAUX. En effet* $\{\tau \geq t-1\}$ *n'appartient pas à* $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_0, \ldots, X_t\}$*.*
3. $\mathbb{P}(X_{t+1} = y \,|\, X_t = x \cap \{\tau \leq t+1\}) = P(x,y)$
   Correction. *FAUX. En effet* $\{\tau \leq t+1\}$ *n'appartient pas à* $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_0, \ldots, X_t\}$*.*
4. $\mathbb{P}(X_{t+2} = y \cap X_t = x \cap \{\tau \leq t+1\}) = P^2(x,y)\mathbb{P}(X_t = x \cap \{\tau \leq t+1\})$
   Correction. *FAUX. On peut seulement écrire*

$$\mathbb{P}(X_{t+2} = y \cap X_t = x \cap \{\tau \leq t+1\}) = \sum_z P(z,y)\mathbb{P}(X_t = x \cap X_{t+1} = z \cap \{\tau \leq t+1\})$$

car $\{\tau \leq t+1\} \in \mathcal{F}_{t+1}$ *mais pas à* $\mathcal{F}_t$*.*