Devoir du Jeudi 23 novembre 2017 de 9h00 à 12h00

- Les résultats seront **encadrés**, et toute réponse devra être justifiée (sauf exception).
- Les exercices sont indépendants les uns des autres.
- Le barème est donné à titre indicatif ; il pourra être modifié.
- Le sujet comporte 3 pages.
- Le devoir dure 3h00.
- Les téléphones sont rangés éteints dans les sacs ; en guise d'aide mémoire, vous avez droit au recto d'une feuille manuscrite (par vos soins) sur la table.

Exercice 1. [6 points]

Discerner parmi les énoncés suivants lesquels sont vrais et lesquels sont faux ; justifier de façon très succinte (si le résultat figure tel quel dans le cours, aucune justification n'est attendue ; si l'énoncé est faux, on construira si possible un contre-exemple). Une étoile marque une question qui demande plus de réflexion. Ω est un ensemble fini, P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ sur Ω, et μ et ν sont deux mesures de probabilité sur Ω.

1. S'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $n \geq m$, pour tout $x, y \in \Omega$, $P^n(x,y) > \varepsilon$, alors P est apériodique et irréductible.
   Correction. *VRAI, si x et y sont donnés, $P^m(x,y) \geq \varepsilon > 0$, d'où l'irréductibilité. Par ailleurs, puisque $P^m(x,x) \geq \varepsilon > 0$ et $P^{m+1}(x,x) \geq \varepsilon > 0$, m et m+1 appartiennent à l'ensemble $\mathcal{T}(x)$, donc son pgcd vaut 1.*
2. Si π est une mesure de probabilité stationnaire de P irréductible, il est possible que $\pi(x) = 0$ pour un certain $x \in \Omega$.
   Correction. *FAUX, on a vu en exercice que si P est irréductible, toutes les entrées de π sont strictement positives.*
3. Si P et Q sont deux matrices de transition irréductibles, il est possible que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ soit harmonique sur Ω pour P mais pas pour Q.
   Correction. *FAUX, le cours assure que f harmonique sur Ω pour P est une fonction constante, et il s'ensuit que $Qf = f$, c'est-à-dire que f harmonique sur Ω pour Q.*
4. On a $\sum_x (\mu(x) - \nu(x)) 1_{\mu(x)>\nu(x)} = \sum_x (\nu(x) - \mu(x)) 1_{\nu(x)>\mu(x)}$.
   Correction. *VRAI, c'est du cours ; ce sont deux définitions possibles de $\|\mu - \nu\|_{TV}$.*
5. Si $\sum_{x\in\Omega} \mu(x) \wedge \nu(x) = 1$, alors $\|\mu - \nu\|_{TV} = 0$. (On rappelle la notation $a \wedge b = \min\{a, b\}$).
   Correction. *VRAI, on utilise la formule vue en cours $\sum_{x\in\Omega} \mu(x) \wedge \nu(x) + \|\mu - \nu\|_{TV} = 1$. Alternativement, on peut raisonner comme suit : $1 = \sum_{x\in\Omega} \mu(x) \wedge \nu(x) \leq \sum_{x\in\Omega} \mu(x) = 1$ implique que pour tout x, $\mu(x) \wedge \nu(x) = \mu(x)$ c'est á dire $\nu(x) \leq \mu(x)$ pour tout x. En intervertissant les rôles de $\mu(x)$ et $\nu(x)$ on obtient $\mu(x) \leq \nu(x)$ pour tout x, c'ad $\mu = \nu$, et $\|\mu - \nu\|_{TV} = 0$.*
6. Si $\sum_{x\in\Omega} \mu(x) \wedge \nu(x) = 0$, alors $\|\mu - \nu\|_{TV} = 1$.
   Correction. *VRAI, à nouveau on utilise la formule vue en cours $\sum_{x\in\Omega} \mu(x) \wedge \nu(x) + \|\mu - \nu\|_{TV} = 1$.*

7. * S'il existe un couplage (X,Y) de μ et ν tel que $\mathbf{P}(X=Y)=0$, alors on ne peut pas avoir $\|\mu-\nu\|_{TV}=0$.
   Correction. *FAUX, si l'espace d'état Ω comprend au moins deux éléments $\{x,y\}$. Car alors la mesure η définie sur Ω^2 par $\eta\{x,y\}=\eta\{y,x\}=1/2$ a ses deux marginales μ et ν égales (à $1/2(\delta_x+\delta_y)$), et pourtant $\eta(\{x,x\}\cup\{y,y\})=0$.*
8. Soit π une mesure de probabilité stationnaire de P, $d(t)=\max_x \|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\|_{TV}$ et $\bar{d}(t)=\max_{x,y}\|P^t(x,\cdot)-P^t(y,\cdot)\|_{TV}$. On a pour tout $t\in\mathbb{N}$ l'inégalité $d(t)\leq\bar{d}(t)$.
   Correction. *VRAI, c'est du cours.*
9. Si $\bar{d}(t)=\max_{x,y}\|P^t(x,\cdot)-P^t(y,\cdot)\|_{TV}\to 0$ quand $t\to\infty$, alors $P^t(x,\cdot)$ converge vers une mesure de probabilité indépendante de x quand $t\to\infty$.
   Correction. *VRAI, il existe toujours une mesure stationnaire π (vu en exercice). De l'inégalité $d(t)\leq\bar{d}(t)$ (avec $d(t)$ définie grâce à l'une quelconque des ces mesures stationnaires), on tire que alors que $d(t)\to 0$, ce qui montre en fait l'unicité de la mesure stationnaire, et la convergence de $P^t(x,\cdot)$ vers celle-ci quand $t\to\infty$.*
10. * Si P n'est pas irréductible, alors la fonction $\bar{d}:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, t\mapsto\bar{d}(t)=\max_{x,y\in\Omega}\|P^t(x,\cdot)-P^t(y,\cdot)\|_{TV}$ est la fonction constante égale à 1.
   Correction. *FAUX, prenons le 3-cycle $\{0,1,2\}$, et adjoignons-y un sommet noté -1 avec $P(-1,0)=1$ (tandis que les autres transitions sont celles de la marche aléatoire sur le 3 cycle). On $\bar{d}(t)\to 0$ (en effet, dès l'instant 1, on se trouve sur le 3-cycle, irréductible et apériodique, et on sait que pour la chaine $\tilde{P}$ restreinte à ce sous ensemble $\max_{\mu,\nu}\|\mu\cdot\tilde{P}^t-\nu\cdot\tilde{P}^t\|_{TV}\to 0$), mais la chaîne n'est pas irréductible puisque si $y=0,1$ ou 2, $P^t(y,-1)=0$ pour tout $t\in\mathbb{N}$.*
11. Soient a,z deux sommets distincts d'un réseau. Si on multiplie toutes les conductances par 2, alors la résistance équivalente $\mathcal{R}(a\leftrightarrow z)$ est multipliée par 2.
   Correction. *FAUX, la résistance est alors divisée par 2.*
12. Soient a,z deux sommets distincts d'un réseau. On a $\mathcal{R}(a\leftrightarrow z)=\mathcal{R}(z\leftrightarrow a)$.
   Correction. *VRAI, à l'aide du théorème de Thomson. Précisément, il y une correspondance bijective entre θ flot : $a\to z, \|\theta\|=1$ et θ flot : $z\to a, \|\theta\|=1$ via l'application qui à un flot associe son opposé. Puisqu'on prend le carré du flot dans le théorème, on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(a\leftrightarrow z) &= \min_{\theta\ \mathit{flot}:a\to z,\|\theta\|=1}\sum_{e\in E}|\theta(e)|^2 r(e)\\ &= \min_{\theta\ \mathit{flot}:a\to z,\|\theta\|=1}\sum_{e\in E}|-\theta(e)|^2 r(e)\\ &= \min_{\theta\ \mathit{flot}:z\to a,\|\theta\|=1}\sum_{e\in E}|\theta(e)|^2 r(e)\\ &= \mathcal{R}(z\leftrightarrow a)\end{aligned}$$

   d'où la réponse positive.

Exercice 2. Calculs de distance pour une chaîne de Markov [5 points]

Soit $a\in\mathbb{R}$ avec $0<a<1$, et soit une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ sur l'espace d'état $\Omega=\{0,1,\ldots,n-1\}$ de matrice de transition P telle que pour tout $j\in\Omega$,

$$P(i,j)=a\,1_{\{j=i+1\}}+(1-a)\,\frac{1}{n} \qquad \text{si } \ i<n-1,$$

$$P(n-1,j)=a\,1_{\{j=0\}}+(1-a)\,\frac{1}{n} \qquad \text{si } \ i=n-1$$

ce qu'on peut encore écrire de manière plus compacte en utilisant la notation "mod n", pour modulo n (on note $j = i \bmod n$ si n divise $j - i$),

$$P(i,j) = a\,1_{\{j=i+1 \bmod n\}} + (1-a)\,\frac{1}{n} \qquad\qquad \text{pour tout} \quad i,j \in \Omega.$$

1. Montrer que la chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ possède une unique loi stationnaire π et la calculer. La chaîne est-elle réversible ?
2. Montrer par une récurrence que, pour tout $(i,j) \in \Omega^2$, pour tout $t \in \mathbb{N}$

   $$P^t(i,j) = a^t 1_{\{j=i+t \bmod n\}} + (1-a^t)\frac{1}{n}.$$

   Reconnaître la mesure de probabilité limite $\lim_{t\to\infty} P^t(i,\cdot)$, et retrouver le résultat de la question 1.
3. Montrer que, pour tout $i \in \Omega$, pour tout $t \in \mathbb{N}$, la distance en variation totale satisfait :

   $$\|P^t(i,\cdot) - \pi\|_{TV} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a^t$$

4. Montrer que, pour tout $i,j \in \Omega$ tel que $i \neq j$, pour tout $t \in \mathbb{N}$

   $$\|P^t(i,\cdot) - P^t(j,\cdot)\|_{TV} = a^t$$

5. Montrer que, pour tout $i \in \Omega$, pour tout $t \in \mathbb{N}$

   $$\sum_{j\in\Omega} \frac{(P^t(i,j) - \pi(j))^2}{\pi(j)} = (n-1)\,a^{2t}$$

Correction. *La mesure stationnaire dans la première question est la mesure uniforme (on pouvait regarder un peu plus loin dans l'énoncé pour le deviner sans faire de calcul). Puisque la chaine est irréductible, la mesure stationnaire est unique et il suffit donc de vérifier que la mesure uniforme fonctionne, ce qui est évident. La chaîne en revanche n'est pas réversible, puisque pour tout i,* $\pi(i)P(i,i+1) \neq \pi(i+1)P(i+1,i)$ *(avec l'addition modulo n). La formule sur* P^t *se montre rigoureusement par récurrence : elle vaut pour* $t = 0$ *et* $t = 1$ *et si on la suppose vraie en t, on voit que*

$$\begin{aligned}
P^{t+1}(i,j) = \sum_k P^t(i,k)P(k,j) &= \sum_k \left(a^t 1_{\{k=i+t \ mod\ n\}} + (1-a^t)\frac{1}{n}\right)\left(a 1_{\{j=k+1 \ mod\ n\}} + (1-a)\frac{1}{n}\right) \\
&= a^{t+1}1_{\{j=i+t+1 \ mod\ n\}} + \frac{1}{n}\left((1-a^t)(1-a) + a(1-a^t) + (1-a)a^t\right) \\
&= a^{t+1}1_{\{j=i+t+1 \ mod\ n\}} + \frac{1}{n}(1-a^{t+1})
\end{aligned}$$

La mesure de probabilité limite est la mesure uniforme, qui est l'unique mesure stationnaire. Cette convergence était garantie par le théorème fondamental puisque la chaîne est apériodique. Alternativement, sans convoquer le théorème fondamental, une mesure limite est nécessairement une *mesure stationnaire (les deux arguments sont recevables). Pour calculer les distances en variation totale, on peut par exemple utiliser la formule*

$$\|\pi - \nu\|_{TV} = \sum_{x\in\Omega:\pi(x)>\nu(x)} \pi(x) - \nu(x).$$

On obtient :

$$\|P^t(i,\cdot) - \pi\|_{TV} = \sum_{j,P^t(i,j)>\pi(j)} P^t(i,j) - \pi(j) = a^t + (1-a^t)\frac{1}{n} - \frac{1}{n} = a^t(1-1/n)$$

car seul l'entier $j = i + t$ vérifie la condition. De même,

$$\|P^t(i,\cdot) - \pi\|_{TV} = \sum_{k,P^t(i,k)>P^t(j,k)} P^t(i,j) - P^t(j,k) = a^t + (1-a^t)\frac{1}{n} - (1-a^t)\frac{1}{n} = a^t$$

en retenant à nouveau le seul entier $k = i + t$. Enfin, pour le dernier calcul,

$$\begin{aligned}\sum_j \frac{(P^t(i,j) - \pi(j))^2}{\pi(j)} = (n-1)\,a^{2t} &= \sum_j \frac{(a^t\,1_{\{j=i+t \ mod\ n\}} + (1-a^t)\,1/n - 1/n)^2}{1/n}\\ &= \sum_j \frac{a^{2t}(1_{\{j=i+t \ mod\ n\}} - 1/n)^2}{1/n}\\ &= na^{2t}\sum_j (1_{\{j=i+t \ mod\ n\}} - 1/n)^2\\ &= na^{2t}[(n-1)1/n^2 + (1-1/n)^2] = na^{2t}(1-1/n) = (n-1)a^{2t}\end{aligned}$$

Exercice 3. Lemme de la cible aléatoire [4 points]

Soit une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ de matrice de transition P irréductible sur Ω ensemble fini, qui admet une mesure de probabilité stationnaire π. On veut montrer le lemme de la cible aléatoire, qui énonce que l'espérance du temps d'atteinte d'un sommet aléatoire choisi selon la loi π (et indépendamment de $(X_t)_{t\geq 0}$) ne dépend pas du point de départ de la chaîne.

Précisément, on note $\tau_z = \min\{t \geq 0, X_t = z\}$ le temps d'atteinte de z et $\tau_z^+ = \min\{t \geq 1, X_t = z\}$ le premier temps de retour en z. On pose aussi

$$f : \Omega \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{z\in\Omega} \mathbb{E}_x(\tau_z)\pi(z),$$

de sorte que $f(x)$ est l'espérance du temps d'atteinte d'un sommet aléatoire choisi selon la loi π lorsque la chaîne est issue de x.

1. Rappeler la relation vue en cours entre $\mathbb{E}_x(\tau_x^+)$ et $\pi(x)$.
2. Montrer soigneusement que pour tout $x, z \in \Omega$,

$$\mathbb{E}_x(\tau_z^+) = 1 + \sum_{y\in\Omega} P(x,y)\mathbb{E}_y(\tau_z).$$

3. Montrer que la fonction f est harmonique pour P sur Ω.
4. Conclure à l'aide d'un résultat du cours que l'on rappellera.

Correction. *$\mathbb{E}_x(\tau_x^+)\pi(x) = 1$, puis, si l'on pose $A = \{z\}$ (pour répéter la notation choisie en TD), on obtient en utilisant la propriété de Markov (sous la forme de la propriété de stationnarité énoncée dans le cours) :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(\tau_z^+) &= \sum_{t\geq 0} t\mathbf{P}_x(\tau_z^+ = t) \\
&= \sum_{t\geq 1} t\mathbf{P}_x(\bigcap_{1\leq s<t}\{X_s \notin A\} \cap \{X_t \in A\}) \\
&= \sum_{t\geq 1} t\mathbf{P}_x(\bigcap_{1\leq s<t}\{X_s \notin A\} \cap \{X_t \in A\}|X_1 = y)P_x(X_1 = y) \\
&= \sum_{t\geq 1, y\in\Omega} t\mathbf{P}(\bigcap_{0\leq s<t-1}\{X_{s+1} \notin A\} \cap \{X_{(t-1)+1} \in A\}|X_1 = y)P(x,y) \\
&= \sum_{t\geq 1, y\in\Omega} t\mathbf{P}_y(\bigcap_{0\leq s<t-1}\{X_s \notin A\} \cap \{X_{(t-1)} \in A\})P(x,y) \\
&= \sum_{t\geq 1, y\in\Omega} t\mathbf{P}_y(\tau_z = t-1)\mathbf{P}(x,y) \\
&= \sum_{t\geq 0, y\in\Omega} (t+1)\mathbf{P}_y(\tau_z = t)\mathbf{P}(x,y) \\
&= \sum_{y} \mathbf{P}(x,y)\sum_{t\geq 0} t\mathbf{P}_y(\tau_z = t) + \sum_{y\in\Omega}(\sum_{t}\mathbf{P}_y(\tau_z = t))\mathbf{P}(x,y) \\
&= \sum_{y} \mathbf{P}(x,y)\mathbb{E}_y(\tau_z) + \sum_{y\in\Omega}\mathbf{P}_y(\tau_z < \infty)\mathbf{P}(x,y) \\
&= \sum_{y} \mathbf{P}(x,y)\mathbb{E}_y(\tau_z) + 1
\end{aligned}$$

ou l'on utilise à la dernière ligne que $\mathbf{P}_y(\tau_z < \infty) = 1$ qui vaut car la chaîne est supposée irréductible. Maintenant pour montrer que f est harmonique, fixons $x \in \Omega$, et observons que

$$\begin{aligned}
f(x) + 1 &= \sum_{z} \mathbb{E}_x(\tau_z)\pi(z) + 1 \\
&= \sum_{z} \mathbb{E}_x(\tau_z)\pi(z) + \mathbb{E}_x(\tau_x^+)\pi(x) \\
&= \sum_{z} \mathbb{E}_x(\tau_z^+)\pi(z) \\
&= \sum_{z}(\sum_{y}\mathbb{E}_y(\tau_z)P(x,y) + 1)\pi(z) = Pf(x) + 1
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que f est harmonique en x. Ce calcul vaut pour tout x donc f est harmonique sur Ω. Un résultat du cours nous assure alors qu'une fonction harmonique sur Ω entier (Ω fini) pour une matrice de transition P irréductible est constante.

Exercice 4. La ruine du joueur en présence d'un biais [5 points]

Soit $p, q > 0$ avec $p+q = 1$ avec $p \neq q$. Soit une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ de matrice de transition P irréductible sur $\Omega = \{0, \dots, n\}$ donnée par :

$$P(i,j) = p\, 1_{\{j=i-1\}} + q\, 1_{\{j=i+1\}} \qquad\qquad \text{si } \ i \in \{1, \dots, n-1\}$$

(On n'aura pas besoin dans cet exercice de préciser pas les transitions depuis les points 0 et n). On pose pour tout $k \in \Omega$, $\tau_k = \min\{t \geq 0, X_t = k\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le temps d'atteinte de k et $\tau = \min\{\tau_0, \tau_n\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On introduit finalement les deux fonctions :

$$g : \Omega \to \mathbb{R}, k \mapsto g(k) = \mathbf{P}_k(\tau = \tau_0 \cap \tau_0 < \infty), \text{ et } \quad h : \Omega \to \mathbb{R}, k \mapsto h(k) = \mathbb{E}_k(\tau).$$

1. Quel résultat du cours assure que $h(k) < \infty$ pour tout k ? En déduire que $g(k) = \mathbf{P}_k(X_\tau = 0)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, exprimer $g(k)$ en fonction de $g(k-1)$ et $g(k+1)$ (en justifiant soigneusement). Préciser aussi les valeurs de $g(0)$ et de $g(n)$. Résoudre ce système d'équations par la méthode de votre choix. [1]
3. Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, exprimer $h(k)$ en fonction de $h(k-1)$ et $h(k+1)$ (en justifiant soigneusement). Préciser aussi les valeurs de $h(0)$ et de $h(n)$. A nouveau, résoudre ce sytème d'équations.
4. Donner des équivalents de $g(k)$ et $h(k)$ lorsque $n, k \to \infty$ avec $n - k \to \infty$ (on distinguera les cas $p < q$ et $p > q$).

Correction. *$h(k) = \mathbb{E}_k(\tau) \leq \mathbb{E}_k(\tau_0 \wedge \tau_n) < \infty$ car la chaine est irréductible (...). Partant, $g(k) = \mathbf{P}_k(\tau = \tau_0) = \mathbf{P}_k(X_\tau = 0)$. On refait les mêmes calculs que dans l'exercice précédent avec l'évènement $A = \{\tau_0 < \tau_n\}$ pour obtenir que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ $g(k) = pg(k-1) + qg(k+1)$ et avec l'évènement $A = \{0, n\}$ pour obtenir $h(k) = 1 + ph(k-1) + qh(k+1)$. Par ailleurs, on a les valeurs suivantes au bord : $g(0) = 1$, $g(n) = 0$, $h(0) = 0$ et $h(n) = 0$. Pour trouver la fonction g, on constate que l'équation est homogène, de polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - (1/q)X + (p/q) = (X - p/q)(X - 1)$, dont les deux racines sont bien distinctes ; les solutions de l'équation homogène sont donc $\{k \mapsto \alpha(p/q)^k + \beta 1\}$. Pour avoir les bonnes valeurs au bord, il nous suffit de choisir :*

$$g(k) = \frac{(p/q)^k - (p/q)^n}{1 - (p/q)^n}$$

On constate que, si $p < q$

$$|g(k) - (p/q)^k| = \left| \frac{(p/q)^{n+k} - (p/q)^n}{1 - (p/q)^n} \right| \leq \frac{q}{q-p}(p/q)^n$$

tandis que si $p > q$,

$$|g(k) - 1| = \left| \frac{(p/q)^k - 1}{(p/q)^n - 1} \right| \sim (q/p)^{n-k}$$

1. Une équation de récurrence linéaire d'ordre 2 est du type $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} + f(n)$. L'équation homogène associée est $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$, son ensemble solution est un espace vectoriel de dimension 2 ; si $P(X) = X^2 - aX - b$ admet deux racines x et y réelles distinctes, cet espace est $\{n \mapsto \alpha x^n + \beta y^n, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Si $f(n) = z^n P(n)$ pour P polynôme et $z \in \mathbb{R}$, on cherche une solution particulière sous la forme : $z^n Q(n)$ si z n'est pas racine de P, $z^{n+1}Q(n)$ si z est racine simple de P, et $z^{n+2}Q(n)$ et si z est racine double de P, avec, dans tous les cas, Q polynôme de même degré que P

Pour trouver la fonction h, la solution particulière est à chercher sous la forme $k \mapsto \gamma k$, ce qui donne la condition $(1+(q-p)\gamma) = 0$. Il reste à determiner les deux coefficients α et β des solutions de léquation homogène, c'est-à-dire qu'on insère $k \mapsto \alpha(p/q)^k + \beta + \gamma)$ dans l'équation. On obtient en $k=0$: $\alpha+\beta=0$, c'est-à-dire $\alpha+\beta=0$, et en $k=n$: $\alpha[(p/q)^n-1]+\gamma n=0$ d'où $\alpha = \frac{1}{q-p}\frac{n}{[(p/q)^n-1]} = 0$ donc

$$h(k) = \frac{1}{q-p}\left[\frac{1-(p/q)^k}{1-(p/q)^n}n - k\right]$$

En particulier, si $p<q$ on voit que

$$\left|h(k) - \frac{1}{q-p}\cdot(n-k)\right| = \frac{1}{q-p}\left|\frac{(p/q)^n-(p/q)^k}{1-(p/q)^n}\right| \leq \frac{q}{(q-p)^2}(p/q)^k$$

et donc $\frac{1}{q-p}(n-k)$ approche la quantité $h(k)$, soit le temps en lequel $\mathbb{E}(X_t) = k+(q-p)t$ vaut n. Si maintenant $p>q$,

$$\left|h(k) - \frac{1}{p-q}k\right| = \left|\frac{1}{q-p}\left[\frac{1-(p/q)^k}{1-(p/q)^n}n\right]\right| \sim \frac{1}{q-p}n(q/p)^{n-k}$$

et la même conclusion vaut $\frac{1}{p-q}k$ approche la quantité $h(k)$, soit le temps en lequel $\mathbb{E}(X_t) = k+(q-p)t$ vaut 0 cette fois.

Exercice 5. ** Critère de Kolmogorov [Bonus, à ne faire que si tout le reste a été traité].

Soit P matrice de transition irréductible. On note R la propriété : "Pour tout $n \geq 3$, pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Omega$ tels que $x_1 = x_n$,

$$\prod_{1\leq i\leq n-1} P(x_i, x_{i+1}) = \prod_{1\leq i\leq n-1} P(x_{i+1}, x_i)."$$

Montrer que si P est réversible par rapport à une mesure de probabilité π, R est satisfaite. Réciproquement, si R est satisfaite, montrer que P est réversible par rapport à une mesure de probabilité π (on pourra commencer par supposer P apériodique).

Correction. *On vérifie par récurrence que*

$$\pi(x_1)\prod_{1\leq i\leq n-1} P(x_i, x_{i+1}) = \pi(x_n)\prod_{1\leq i\leq n-1} P(x_{i+1}, x_i).$$

cette récurrence facile ne pose pas de difficulté. Pour obtenir la propriété R il suffit ensuite de choisir $x_1 = x_n$ puis d'observer que $\pi(x_1) \neq 0$ puisque la chaine est irréductible. Pour la récoproque, on procède comme suit : en sommant sur $x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}$ on obtient par définition du produit matriciel que $P(x_1,x_2)P^n(x_2,x_1) = P^n(x_1,x_2)P(x_2,x_1)$. Si P est de plus apériodique (et puisqu'elle est par hypothèse irréductible), $P^n(x,y) \to \pi(y)$ et donc en passant a la limite en n dans la relation précédente, on obtient que $P(x_1,x_2)\pi(x_1) = \pi(x_2)P(x_2,x_1)$, soit la définition de la réversibilité. Dans le cas général où la chaîne n'est pas nécessairement apériodique, un exercice vu en TD assure que la somme de Cásaro $\sum_{1\leq m\leq n} P^m(x,y)/n$ converge vers (l'unique, P reste irréductible) mesure stationnaire $\pi(y)$. Il suffit alors de passer à la limite dans la relation

$$P(x_1,x_2)\frac{\sum_{1\leq m\leq n} P^m(x_2,x_1)}{n} = \frac{\sum_{1\leq m\leq n} P^m(x_1,x_2)}{n}P(x_2,x_1).$$

Cette formulation (appelée critère de Kolmogorov) présente l'avantage (tout théorique) de pouvoir vérifier la réversibilité sans connaître la mesure stationnaire π *; en revanche, cette condition implique toutes les tailles de cycles* n *(alors que la formulation usuelle avec les chemins peut être vérifiée pour les seuls chemins de longueur* 2*).*