Devoir du Jeudi 8 novembre 2018 de 9h00 à 12h00

- Les résultats seront **encadrés**, et toute réponse devra être justifiée (sauf exception).
- Les exercices sont indépendants les uns des autres.
- Le barème est donné à titre indicatif ; il pourra être modifié.
- Le sujet comporte 3 pages.
- Le devoir dure 3h00.
- Les téléphones sont rangés éteints dans les sacs ; en guise d'aide mémoire, vous avez droit au recto d'une feuille manuscrite (par vos soins, pas de photocopie) sur la table.

Exercice 1. [Quizz d'application du cours, **7,5 points**, 1 point par question, sauf la 4 a 0,5 point]

Discerner parmi les énoncés suivants lesquels sont vrais et lesquels sont faux ; la réponse devra donc impérativement commencer par VRAI ou FAUX ; cependant, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point ; la justification doit être brève, et si l'énoncé est faux, on pourra ou bien corriger l'énoncé, ou bien construire un contre-exemple (ce qui semblera le plus simple). Dans la suite, Ω est un ensemble fini, P est une matrice stochastique sur Ω, et $(X_t)_{t\geq 0}$ sera sous $\mathbb{P}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P sur Ω. Enfin, on considèrera aussi un graphe G, dont l'ensemble de sommets sera noté V, et V se substituera alors à Ω.

1. Si P est apériodique et irréductible (et Ω a plus de deux éléments), il existe $t_0 \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$, pour tout $x, y \in \Omega$, $P^t(x, y) < 1 - \varepsilon$.
   Correction. *VRAI. Le même énoncé vaut avec la conclusion $P^t(x, y) > \varepsilon$, c'est du cours. Ensuite, $P^t(x, y) = 1 - P^t(x, \{y\}^c) = 1 - \sum_{z:z\neq x} P^t(x, z) < 1 - (k-1)\varepsilon$ avec $k = |\Omega|$. Puisque Ω a au moins deux éléments, $k - 1 \geq 1$, donc l'enoncé vaut.*
2. Si π est une mesure de probabilité stationnaire de P, et $x, y \in \Omega$ sont tels que $\pi(x) = 0$ et il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $P^t(x, y) > 0$, alors $\pi(y) = 0$.
   Correction. *FAUX. Un contre exemple est le suivant : prendre un n-cycle avec sa matrice de transition usuelle, et ajouter un sommet x tel que $P(x, 0) = 1$. Cela définit encore une matrice stochastique sur la réunion du n-cycle et de de $\{x\}$; sa mesure stationnaire reste concentrée sur le n-cycle, elle est égale à la mesure uniforme sur le n-cycle. Si l'on prend pour y n'importe quel sommet du n-cycle, on obtient un contre-exemple.*
3. Si π est une mesure de probabilité stationnaire de P^2 irréductible, alors π est une mesure stationnaire de P.
   Correction. *VRAI : si μ est une mesure stationnaire de P, c'est encore une mesure stationnaire de P^2, et partant, puisque P^2 est irréductible elle admet une unique mesure stationnaire π, d'où $\mu = \pi$. Ainsi il existe une unique mesure stationnaire pour P.*
4. S'il existe une mesure de probabilité π telle que pour tout $x, y \in \Omega$, $\mathbb{P}_\pi(X_0 = x, X_1 = y) = \mathbb{P}_\pi(X_0 = y, X_1 = x)$, alors P est réversible par rapport à π
   Correction. *VRAI. Puisque $\mathbb{P}_\pi(X_0 = x, X_1 = y) = \pi(x)P(x, y)$, c'est exactement la définition qui est ici écrite.*

5. Si P est réversible par rapport à une mesure de probabilité π, alors pour tout $x \in \Omega$, $\mathbb{P}_\pi(X_0 = x, X_1 \neq x) = \mathbb{P}_\pi(X_0 \neq x, X_1 = x)$.
   Correction. *VRAI.* $\mathbb{P}_x(X_0 = x, X_1 \neq x) = \sum_{y:y\neq x} \pi(x)P(x,y) = \sum_{y:y\neq x} \pi(y)P(y,x) = \mathbb{P}_\pi(X_0 \neq x, X_1 = x)$ *en utilisant la définition de la réversibilité.*
6. Soit un réseau $(G, \{c(e)\}_e)$ connexe, a et z deux sommets distincts de ce réseau, et W harmonique sur $V \setminus \{a, z\}$ avec $W(a) > W(z)$. Alors :
   $$\forall x \in V,\ W(z) \leq W(x) \leq W(a).$$
   Correction. *VRAI. Par le principe du maximum appliqué à W et $-W$ (c'est le point crucial à noter), on a que : $\forall x \in V,\ \min\{W(a), W(z)\} \leq W(x) \leq \max\{W(a), W(z)\}$ et l'hypothèse sur W(a) et W(z) permet alors de conclure.*
7. Soit un réseau $(G, \{c(e)\}_e)$ connexe, et a et z deux sommets distincts de ce réseau. On suppose que W est harmonique sur $V \setminus \{a, z\}$ et que $W(z) = 0$. Alors :
   $$\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) \times \sum_{x:\{a,x\}\in E} c(a,x)\,(1 - W(x)) = 1.$$
   Correction. *FAUX, à moins que $W(a) = 1$: dans ce cas en effet, $\sum_{x:\{a,x\}\in E} c(a,x)[1 - W(x)] = \sum_{x:\{a,x\}\in E} c(a,x)[W(a) - W(x)] = \sum_{x:\{a,x\}\in E} I(\vec{ax}) = \|I\|$ et $1 = W(a) - W(z)$ donne $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) = \frac{W(a)-W(z)}{\|I\|}$ soit la définition.*
8. Soit un réseau $(G, \{c(e)\}_e)$ connexe, et $a, z \in V$ deux sommets distincts de ce réseau. On a l'identité
   $$c(a)\mathbb{P}_a(\tau_a^+ < \tau_z) = \mathcal{C}(a \leftrightarrow z) - c(a).$$
   Correction. *FAUX (en général). On a $c(a)\mathbb{P}_a(\tau_z < \tau_a^+) = c(a)(1 - \mathbb{P}_a(\tau_z < \tau_a^+)) = c(a) - \mathcal{C}(a \leftrightarrow z)$. Donc cette équation ne vaut que si $c(a) = \mathcal{C}(a \leftrightarrow z)$, ce qui revient à dire que $\mathbb{P}_a(\tau_z < \tau_a^+) = 1$: cette dernière relation n'est possible que si z est le seul voisin de a et qu'il n'y a pas de boucle de a à a.*

Exercice 2. [La ruine du joueur paresseux, **6,5 points**]

Soit $p \in]0, 1/2]$, et $(X_t)_{t\geq 0}$ la chaîne de Markov de matrice de transition P sur $\Omega = \{0, \ldots, n\}$ donnée par :

$$P(i,j) = p\ 1_{\{j=i-1\}} + p\ 1_{\{j=i+1\}} + (1-2p)1_{\{j=i\}} \qquad \text{si } \ i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

(On n'aura pas besoin dans cet exercice de préciser les transitions depuis les points 0 et n). Cette chaîne modélise la suite des gains (algébriques) d'un joueur paresseux qui s'autorise à passer son tour et ne pas jouer avec probabilité $1 - 2p \in [0, 1[$. On pose pour tout $k \in \Omega$, $\tau_k = \min\{t \geq 0, X_t = k\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le temps d'atteinte de k et $\tau = \min\{\tau_0, \tau_n\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On introduit finalement la fonction :

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, k \mapsto f(k) = \mathbb{E}_k[\tau] \in [0, \infty]$$

On suppose dans les trois premières questions que $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

1. (1) Rappeler soigneusement le lien entre $\mathbb{E}_k[\tau \mid X_1 = k+1]$ et $\mathbb{E}_{k+1}[\tau]$ (on justifiera toutes les étapes).

2. (**1,5pt**) En déduire une équation de récurrence entre $f(k)$, $f(k-1)$ et $f(k+1)$.
3. (1,5pt) Calculer $f(k)$ pour tout $k \in \Omega$. (On pourra s'intéresser à la fonction auxilliaire $\delta(k) = f(k) - f(k-1)$, qui satisfait une relation de récurrence simple).
4. (**2,5pt** si tout y est, 0 pt pour répéter les seules probas de transition du graphe original...) Construire un réseau associé à cette chaîne de Markov (on pourra identifier les sommets 0 et n du graphe précédent, puis déterminer les résistances/conductances appropriées), et retrouver le calcul de $f(k)$ à l'aide de ce réseau (on pourra utiliser l'identité du temps de transport).

Correction. *On renvoit au poly pour la première question (c'est* verbatim *la même chose). Noter que seule l'écriture :* $\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(\tau \geq k) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(\tau > k)$ *vaut pour une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$*. En revanche, une écriture du type* $\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(\tau = k)$ *devra être précédée d'un laïus qui assure que l'événement* $\{\tau < \infty\}$ *a probabilité 1. En l'absence d'un tel renseignement, on ne pourra pas mettre tous les points.*

Ensuite, on étudie l'application $f(k) = \mathbb{E}_k(\tau) \in [0, \infty]$*. Pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$*, on a :*

$$f(k) = p(1 + f(k-1)) + p(1 + f(k+1)) + (1-2p)(1 + f(k))$$

ce qui donne :

$$f(k) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}[f(k-1) + f(k+1)] \tag{1}$$

qui peut encore se réécrire à l'aide de la fonction auxilliaire $\delta(k) = f(k) - f(k-1)$ *: pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$*,*

$$\delta(k+1) - \delta(k) = \frac{-1}{p}$$

avec les valeurs au bord $f(0) = f(n) = 0$*. Maintenant,* $\delta(k) - \delta(1) = \frac{-(k-1)}{p}$*. Maintenant on se propose de calculer de deux façons la somme :*

$$\sum_{k=1}^{n} \delta(k)$$

D'une part il s'agit d'une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \delta(k) = f(n) - f(0) = 0$$

vu les valeurs au bord données précédemment, d'autre part

$$\sum_{k=1}^{n} \delta(k) = \sum_{k=1}^{n} \left[\delta(1) - \frac{-(k-1)}{p}\right] = n\delta(1) - \frac{1}{p}\frac{n(n-1)}{2}$$

d'où :

$$\delta(1) = \frac{1}{p}\frac{n-1}{2},$$

puis :

$$\delta(k) = \frac{n-1}{2p} - \frac{k-1}{p},$$

et finalement,

$$f(k) = \sum_{1 \le j \le k} \delta(j) = \frac{n-1}{2p}k - \frac{k(k-1)}{2p} = \frac{k[(n-1)-(k-1)]}{2p} = \frac{k(n-k)}{2p}$$

Alternativement *on peut reconnaître que le problème de la ruine du joueur classique, où $p = 1/2$, donne lieu à une fonction $g(k)$ qui satisfait :*

$$g(k) = 1 + \frac{1}{2}[g(k-1) + g(k+1)]$$

et la même méthode de résolution avait conduit à $g(k) = k(n-k)$. Maintenant, $g(k)/2p$ satisfait l'équation 1, donc par unicité de la solution,

$$f(k) = \frac{g(k)}{2p} = \frac{k(n-k)}{2p}$$

On mettra les points pour ce raisonnement simple si on le rencontre.

La denrière question est difficile, car on ne donnait pas le réseau. C'est sans doute la question la plus difficile du devoir en fait, puisqu'il faut faire preuve d'autonomie. Le réseau associé à cette chaîne est le n-cycle (où le sommet d'étiquette 0 représente à la fois 0 et n dans le graphe original : ce point est crucial : si on construit un autre réseau qui n'est pas transitif, typiquement en oubliant d'identifier 0 et n, alors on pourra toujours écrire l'identité du temps de transport et faire apparaiître $\mathbb{E}_0[\tau_k] + \mathbb{E}_k[\tau_0]$, mais ces temps ne seront pas pas forcément égaux et surtout pas égaux à l'espérance du temps d'atteinte attendu). On rappelle que les sommets du n-cycle sont $\{0, \dots, n-1\}$ et que deux sommets x et y sont reliés par une arête ssi $x - y = \pm 1$ modulo n. La fonction conductance est alors définie par $c(i, i+1) = c(i, i-1) = 1$ et $c(i, i) = \frac{1-2p}{p}$. Alors $c(x) = 1 + 1 + \frac{1-2p}{p}$ puis $c_G = \sum c(x) = n(2 + \frac{1-2p}{p}) = \frac{n}{p}$ et

$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow k) = \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}} = \frac{k(n-k)}{n}$$

enfin :

$$\mathbb{E}_0[\tau_k] + \mathbb{E}_k[\tau_0] = c_G \mathcal{R}(0 \leftrightarrow k) = \frac{1}{p}k(n-k)$$

Pour conclure il suffit de noter que par symétrie du graphe (le mot savant est transitivité), on a $\mathbb{E}_0[\tau_k] + \mathbb{E}_k[\tau_0] = 2\mathbb{E}_0[\tau_k]$ d'oú

$$\mathbb{E}_0[\tau_k] = \frac{k(n-k)}{2p}.$$

En comparant les deux graphes, on voit que $f(k) = \mathbb{E}_0[\tau_k]$.

Exercice 3. [Identité des temps d'atteinte stationnaires, **6,5 points**] Soit $(X_t)_{t \ge 0}$ une chaîne de Markov irréductible apériodique sur Ω fini de mesure stationnaire π. On note τ une variable aléatoire entière qui est un *temps d'arrêt* pour la chaîne de Markov $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$: cela signifie que pour tout $t \in \mathbb{N}$, il existe $A \in \Omega^{t+1}$ tel que $\{\tau \le t\} = \{(X_s)_{0 \le s \le t} \in A\}$. On fixe μ une mesure de probabilité sur Ω, et on suppose que $\mathbb{P}_\mu(1 \le \tau < \infty) = 1$. On note alors pour tout $x \in \Omega$:

$$\nu(x) = \mathbb{P}_\mu(X_\tau = x),$$

la loi de X_τ sous $\mathbb{P}_\mu$, et :

$$\rho(x) = \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{t\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_t = x, t<\tau\}} \right].$$

Comme d'habitude dans ce cours, on identifiera mesure de probabilité sur Ω et fonction positive sur Ω ; par exemple, on note simplement $\mu(x)$ pour $\mu(\{x\})$.

1. (**2pts**) Montrer l'identité : pour tout $x \in \Omega$,

$$(\rho P)(x) = \rho(x) + \nu(x) - \mu(x).$$

2. (**1pt**, dt 0,5 unicité, 0,5 normalisation) En déduire que, si $\mu = \nu$, alors :

$$\rho(x) = \pi(x)\mathbb{E}_\mu[\tau]$$

3. (0,5) On pose $\tau_x^{(m)} = \tau_x \circ \theta_m = \min\{t \geq m, X_t = x\}$. Vérifier rapidement que $\tau_x^{(m)}$ est un temps d'arrêt pour la chaine de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$, et en déduire :

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{t\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_t = x, t<\tau_x^{(m)}\}} \right] = \pi(x)\mathbb{E}_x \left[\tau_x^{(m)}\right]$$

4. (0,75pt) Exprimer $\mathbb{E}_x \left[\sum \mathbf{1}_{\{X_t = x, t<\tau_x^{(m)}\}}\right]$ en fonction des nombres $(P^t(x,x), t \in \mathbb{N})$.
5. (0,75pt) On pose $\pi_m = P^m(x,\cdot)$. Exprimer $\mathbb{E}_x[\tau_x^{(m)}]$ en fonction de $\mathbb{E}_{\pi_m}[\tau_x]$
6. (0,5pt) Quelle est la limite de $\pi_m(x)$ lorsque $m \to \infty$?
7. (1pt) En déduire l'identité :

$$\pi(x)\mathbb{E}_\pi[\tau_x] = \sum_{t\geq 0}[P^t(x,x) - \pi(x)]$$

Correction. *Cette question reprenait en fait exactement la preuve du lemme d'Aldous-Fill, théorème 2.13 dont la preuve se trouve page 26 du poly :*

$$\begin{aligned}
(\rho P)(y) &= \sum_x \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{t\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_t = x, t<\tau\}} \right] P(x,y) \\
&= \sum_x \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{t\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_t = x, X_{t+1}=y, t<\tau\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{t\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_{t+1}=y, t<\tau\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{t\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_{t+1}=y, t+1\leq\tau\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{t\geq 1} \mathbf{1}_{\{X_t=y, t<\tau\}} \right] + \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{t\geq 1} \mathbf{1}_{\{X_t=y, t=\tau\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{t\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_t=y, t<\tau\}} \right] - \mu(y) + \nu(y) \\
&= \rho(y) - \mu(y) + \nu(y)
\end{aligned}$$

Si $\mu = \nu$, alors $\rho P = \rho$, ce qui signifie que ρ est une mesure stationnaire qu'il suffit alors de normaliser pour obtenir une mesure de probabilité stationnaire. Par irréductibilité (autre argument important), cette mesure de probabilité stationnaire est unique, notée π, d'où

$$\frac{\rho(x)}{\mathbb{E}_\mu[\tau]} = \pi(x),$$

Maintenant, $\{\tau_x^{(m)} \le t\} = \emptyset$ si $t < m$ et $\{\tau_x^{(m)} \le t\} = \cup_{m \le s \le t}\{X_s = x\}$ si $t \ge m$ (il faut en toute rigueur traiter les deux cas) prouvent que $\tau_x^{(m)}$ est un temps d'arrêt, et en appliquant le résultat précédent à ce temps d'arrêt, on obtient directement :

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{t\ge 0}\mathbf{1}_{\{X_t = x, t < \tau_x^{(m)}\}}\right] = \pi(x)\mathbb{E}_x\left[\tau_x^{(m)}\right]$$

Mais

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{t\ge 0}\mathbf{1}_{\{X_t = x, t < \tau_x^{(m)}\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{t\ge 0}\mathbf{1}_{\{X_t = x, t \le m\}}\right] = \sum_{0 \le t \le m} P^t(x,x)$$

Puis une application de la propriété de Markov (simple, pas besoin de la propriété de Markov forte) au temps m fournit :

$$\mathbb{E}_x[\tau_x^{(m)}] = \mathbb{E}_x[\tau_x \circ \theta_m + m] = \mathbb{E}_x[\tau_x \circ \theta_m] + m = \mathbb{E}_{\pi_m}[\tau_x] + m$$

Ainsi, l'équation précédente se réécrit :

$$\sum_{0\le t\le m} P^t(x,x) - \pi(x) = \pi(x)\mathbb{E}_{\pi_m}[\tau_x]$$

mais $\pi_m(x) = \mathbb{P}(X_t = m) \to \pi(x)$ quand $m \to \infty$ puisque la chaine est irréductible et apériodique. On en tire (sans même besoin de convergence dominée puisque l'espace d'état est fini) :

$$\sum_{0\le t\le \infty} P^t(x,x) - \pi(x) = \pi(x)\mathbb{E}_{\pi}[\tau_x]$$

Exercice 4. [3 points + 1 points bonus] Soit P une matrice stochastique sur Ω irréductible et réversible par rapport à une mesure de probabilité π. Soit $t \in \mathbb{N}$ et $x \in \Omega$.

1. (0,5pt) Observer que $\pi(x)P^{2t+2}(x,x) = \sum_{y,z} P^t(y,x)\,\pi(y)P^2(y,z)P^t(z,x)$.
2. (0,5pt) Observer que pour tout $y, z \in \Omega$, $\pi(y)P^2(y,z) = \pi(z)P^2(z,y)$.
3. (1pt) En déduire que
$$\pi(x)P^{2t+2}(x,x) = \sum_{y,z}\psi(y,z)\psi(z,y)$$
avec $\psi(y,z) := P^t(y,x)\sqrt{\pi(y)P^2(y,z)}$.
4. (1pt) Calculer $\sum_{y,z}\psi(y,z)^2$.
5. (1pt) En déduire une inégalité entre $P^{2t+2}(x,x)$ et $P^{2t}(x,x)$.

Correction.

$$
\begin{aligned}
\pi(x)P^{2t+2}(x,x) &= \pi(x)\sum_{y,z} P^t(x,y)P^2(y,z)P^t(z,x) \\
&= \sum_{y,z} P^t(y,x)\pi(y)P^2(y,z)P^t(z,x) && \textit{par réversibilité} \\
&= \sum_{y,z} P^t(y,x)\pi(z)P^2(z,y)P^t(z,x) && \textit{par réversibilité encore} \\
&= \sum_{y,z} P^t(y,x)\sqrt{\pi(y)P^2(y,z)}\sqrt{\pi(z)P^2(z,y)}P^t(z,x) \\
&= \sum_{y,z} \psi(y,z)\psi(z,y) && \textit{avec } \psi(y,z) = P^t(y,x)\sqrt{\pi(y)P^2(y,z)} \\
&\le \sum_{y,z} \psi^2(y,z) && \textit{de l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\le \sum_{y,z} (P^t(y,x))^2\pi(y)P^2(y,z) \\
&\le \sum_{y} (P^t(y,x))^2\pi(y) \\
&\le \pi(x)\sum_{y} P^t(x,y)P^t(y,x) && \textit{par réversibilité} \\
&\le \pi(x)P^{2t}(x,x)
\end{aligned}
$$

De l'irréductibilité de π, $\pi(x) > 0$ et donc on peut diviser les deux membres de l'inégalité par $\pi(x)$.