Devoir du Jeudi 23 novembre 2017 de 9h00 à 12h00

- Les résultats seront **encadrés**, et toute réponse devra être justifiée (sauf exception).
- Les exercices sont indépendants les uns des autres.
- Le barème est donné à titre indicatif ; il pourra être modifié.
- Le sujet comporte 3 pages.
- Le devoir dure 3h00.
- Les téléphones sont rangés éteints dans les sacs ; en guise d'aide mémoire, vous avez droit au recto d'une feuille manuscrite (par vos soins) sur la table.

Exercice 1. [6 points]

Discerner parmi les énoncés suivants lesquels sont vrais et lesquels sont faux ; justifier de façon très succinte (si le résultat figure tel quel dans le cours, aucune justification n'est attendue ; si l'énoncé est faux, on construira si possible un contre-exemple). Une étoile marque une question qui demande plus de réflexion. Ω est un ensemble fini, P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ sur Ω, et μ et ν sont deux mesures de probabilité sur Ω.

1. S'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $n \geq m$, pour tout $x, y \in \Omega$, $P^n(x,y) > \varepsilon$, alors P est apériodique et irréductible.
2. Si π est une mesure de probabilité stationnaire de P irréductible, il est possible que $\pi(x) = 0$ pour un certain $x \in \Omega$.
3. Si P et Q sont deux matrices de transition irréductibles, il est possible que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ soit harmonique sur Ω pour P mais pas pour Q.
4. On a $\sum_x (\mu(x) - \nu(x)) 1_{\mu(x)>\nu(x)} = \sum_x (\nu(x) - \mu(x)) 1_{\nu(x)>\mu(x)}$.
5. Si $\sum_{x\in\Omega} \mu(x) \wedge \nu(x) = 1$, alors $\|\mu - \nu\|_{TV} = 0$. (On rappelle la notation $a \wedge b = \min\{a, b\}$).
6. Si $\sum_{x\in\Omega} \mu(x) \wedge \nu(x) = 0$, alors $\|\mu - \nu\|_{TV} = 1$.
7. * S'il existe un couplage (X, Y) de μ et ν tel que $\mathbf{P}(X = Y) = 0$, alors on ne peut pas avoir $\|\mu - \nu\|_{TV} = 0$.
8. Soit π une mesure de probabilité stationnaire de P, $d(t) = \max_x \|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV}$ et $\bar{d}(t) = \max_{x,y} \|P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\|_{TV}$. On a pour tout $t \in \mathbb{N}$ l'inégalité $d(t) \leq \bar{d}(t)$.
9. Si $\bar{d}(t) = \max_{x,y} \|P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\|_{TV} \to 0$ quand $t \to \infty$, alors $P^t(x,\cdot)$ converge vers une mesure de probabilité indépendante de x quand $t \to \infty$.
10. * Si P n'est pas irréductible, alors la fonction $\bar{d} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, t \mapsto \bar{d}(t) = \max_{x,y\in\Omega} \|P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\|_{TV}$ est la fonction constante égale à 1.
11. Soient a, z deux sommets distincts d'un réseau. Si on multiplie toutes les conductances par 2, alors la résistance équivalente $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)$ est multipliée par 2.
12. Soient a, z deux sommets distincts d'un réseau. On a $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) = \mathcal{R}(z \leftrightarrow a)$.

Exercice 2. Calculs de distance pour une chaîne de Markov [5 points]

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < 1$, et soit une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ sur l'espace d'état $\Omega = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ de matrice de transition P telle que pour tout $j \in \Omega$,

$$\begin{aligned} P(i,j) &= a\, 1_{\{j=i+1\}} + (1-a)\, \frac{1}{n} && \text{si } \; i < n-1, \\ P(n-1,j) &= a\, 1_{\{j=0\}} + (1-a)\, \frac{1}{n} && \text{si } \; i = n-1 \end{aligned}$$

ce qu'on peut encore écrire de manière plus compacte en utilisant la notation "mod n", pour modulo n (on note $j = i \bmod n$ si n divise $j - i$),

$$P(i,j) = a\, 1_{\{j=i+1 \bmod n\}} + (1-a)\, \frac{1}{n} \qquad \text{pour tout } \; i, j \in \Omega.$$

1. Montrer que la chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ possède une unique loi stationnaire π et la calculer. La chaîne est-elle réversible ?
2. Montrer par une récurrence que, pour tout $(i,j) \in \Omega^2$, pour tout $t \in \mathbb{N}$
$$P^t(i,j) = a^t 1_{\{j=i+t \bmod n\}} + (1-a^t)\frac{1}{n}.$$
Reconnaître la mesure de probabilité limite $\lim_{t\to\infty} P^t(i,\cdot)$, et retrouver le résultat de la question 1.
3. Montrer que, pour tout $i \in \Omega$, pour tout $t \in \mathbb{N}$, la distance en variation totale satisfait :
$$\|P^t(i,\cdot) - \pi\|_{TV} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\, a^t$$
4. Montrer que, pour tout $i, j \in \Omega$ tel que $i \neq j$, pour tout $t \in \mathbb{N}$
$$\|P^t(i,\cdot) - P^t(j,\cdot)\|_{TV} = a^t$$
5. Montrer que, pour tout $i \in \Omega$, pour tout $t \in \mathbb{N}$
$$\sum_{j\in\Omega} \frac{(P^t(i,j) - \pi(j))^2}{\pi(j)} = (n-1)\, a^{2t}$$

Exercice 3. Lemme de la cible aléatoire [4 points]

Soit une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ de matrice de transition P irréductible sur Ω ensemble fini, qui admet une mesure de probabilité stationnaire π. On veut montrer le lemme de la cible aléatoire, qui énonce que l'espérance du temps d'atteinte d'un sommet aléatoire choisi selon la loi π (et indépendamment de $(X_t)_{t\geq 0}$) ne dépend pas du point de départ de la chaîne.

Précisément, on note $\tau_z = \min\{t \geq 0, X_t = z\}$ le temps d'atteinte de z et $\tau_z^+ = \min\{t \geq 1, X_t = z\}$ le premier temps de retour en z. On pose aussi

$$f : \Omega \to \mathbb{R},\; x \mapsto \sum_{z\in\Omega} \mathbb{E}_x(\tau_z)\pi(z),$$

de sorte que $f(x)$ est l'espérance du temps d'atteinte d'un sommet aléatoire choisi selon la loi π lorsque la chaîne est issue de x.

1. Rappeler la relation vue en cours entre $\mathbb{E}_x(\tau_x^+)$ et $\pi(x)$.
2. Montrer soigneusement que pour tout $x, z \in \Omega$,
$$\mathbb{E}_x(\tau_z^+) = 1 + \sum_{y\in\Omega} P(x,y)\mathbb{E}_y(\tau_z).$$
3. Montrer que la fonction f est harmonique pour P sur Ω.
4. Conclure à l'aide d'un résultat du cours que l'on rappellera.

Exercice 4. La ruine du joueur en présence d'un biais [5 points]

Soit $p, q > 0$ avec $p+q = 1$ avec $p \neq q$. Soit une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ de matrice de transition P irréductible sur $\Omega = \{0, \ldots, n\}$ donnée par :

$$P(i,j) = p\ 1_{\{j=i-1\}} + q\ 1_{\{j=i+1\}} \qquad\qquad \text{si}\ \ i \in \{1,\ldots,n-1\}$$

(On n'aura pas besoin dans cet exercice de préciser pas les transitions depuis les points 0 et n). On pose pour tout $k \in \Omega$, $\tau_k = \min\{t \geq 0, X_t = k\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le temps d'atteinte de k et $\tau = \min\{\tau_0, \tau_n\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On introduit finalement les deux fonctions :

$$g : \Omega \to \mathbb{R}, k \mapsto g(k) = \mathbf{P}_k(\tau = \tau_0 \cap \tau_0 < \infty),\ \text{et} \qquad h : \Omega \to \mathbb{R}, k \mapsto h(k) = \mathbb{E}_k(\tau).$$

1. Quel résultat du cours assure que $h(k) < \infty$ pour tout k ? En déduire que $g(k) = \mathbf{P}_k(X_\tau = 0)$.
2. Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, exprimer $g(k)$ en fonction de $g(k-1)$ et $g(k+1)$ (en justifiant soigneusement). Préciser aussi les valeurs de $g(0)$ et de $g(n)$. Résoudre ce système d'équations par la méthode de votre choix. [1]
3. Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, exprimer $h(k)$ en fonction de $h(k-1)$ et $h(k+1)$ (en justifiant soigneusement). Préciser aussi les valeurs de $h(0)$ et de $h(n)$. A nouveau, résoudre ce sytème d'équations.
4. Donner des équivalents de $g(k)$ et $h(k)$ lorsque $n, k \to \infty$ avec $n - k \to \infty$ (on distinguera les cas $p < q$ et $p > q$).

Exercice 5. ** Critère de Kolmogorov [Bonus, à ne faire que si tout le reste a été traité].

Soit P matrice de transition irréductible. On note R la propriété : "Pour tout $n \geq 3$, pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Omega$ tels que $x_1 = x_n$,

$$\prod_{1\leq i\leq n-1} P(x_i, x_{i+1}) = \prod_{1\leq i\leq n-1} P(x_{i+1}, x_i)."$$

Montrer que si P est réversible par rapport à une mesure de probabilité π, R est satisfaite. Réciproquement, si R est satisfaite, montrer que P est réversible par rapport à une mesure de probabilité π (on pourra commencer par supposer P apériodique).

---

1. Une équation de récurrence linéaire d'ordre 2 est du type $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} + f(n)$. L'équation homogène associée est $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$, son ensemble solution est un espace vectoriel de dimension 2 ; si $P(X) = X^2 - aX - b$ admet deux racines x et y réelles distinctes, cet espace est $\{n \mapsto \alpha x^n + \beta y^n, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Si $f(n) = z^n P(n)$ pour P polynôme et $z \in \mathbb{R}$, on cherche une solution particulière sous la forme : $z^n Q(n)$ si z n'est pas racine de P, $z^{n+1}Q(n)$ si z est racine simple de P, et $z^{n+2}Q(n)$ et si z est racine double de P, avec, dans tous les cas, Q polynôme de même degré que P