Feuille d'exercices n°5 : Réseaux électriques

Exercice 37. Étant donné un réseau $(G = (V,E),(c(e))_{e\in E})$, on se propose de démontrer que $(x,z) \mapsto \mathcal{R}(x \leftrightarrow z)$ définit une distance sur V. On se donne $x, y, z \in V$.

1. Montrer que $\mathcal{R}(x \leftrightarrow z) = \mathcal{R}(z \leftrightarrow x)$.
2. Montrer que $\mathcal{R}(x \leftrightarrow z) \geq 0$, et $\mathcal{R}(x \leftrightarrow z) > 0$ si $x \neq z$.
3. Montrer que $\mathcal{R}(x \leftrightarrow z) \leq \mathcal{R}(x \leftrightarrow y) + \mathcal{R}(y \leftrightarrow z)$. On pourra remarquer que la somme des courants unitaires de x à y et de y à z donne le courant unitaire de x à z, puis étudier les tensions associées.

Exercice 38. Étant donné un réseau $(G = (V,E),(c(e))_{e\in E})$, et $a, z \in V$, montrer que la résistance équivalente $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)$ est une fonction concave des résistances $\{r(e)\}_{e\in E}$ dont on munit le graphe. (On rappelle que les résistances sont les inverses des conductances : pour tout $e \in E$, $r(e)c(e) = 1$.) On pourra se donner $\{r(e)\}_{e\in V}$ et $\{r'(e)\}_{e\in V}$ deux collections de résistances, puis montrer que la résistance équivalente $\mathcal{R}_\delta$ associée à la combinaison convexe $r_\delta = \delta r' + (1-\delta)r$ vérifie $\mathcal{R}_\delta(a \leftrightarrow z) \geq \delta\mathcal{R}_1(a \leftrightarrow z) + (1-\delta)\mathcal{R}_0(a \leftrightarrow z)$ si $\delta \in [0,1]$. On pourra penser à appliquer le théorème de Thomson.

Exercice 39. Dans cet exercice on se propose de montrer une version duale du théorème de Thomson. Étant donné un réseau $(G = (V,E),(c(e))_{e\in E})$, on définit l'énergie de Dirichlet d'une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{E}_{\mathtt{Dir}}(f) = \frac{1}{2}\sum_{v,w\in V^2}(f(v)-f(w))^2 c(v,w) = \sum_{\{v,w\}\in E}(f(v)-f(w))^2 c(v,w)$$

Posons $\mathcal{D} = \{f : V \to \mathbb{R}, f(a) = 1, f(z) = 0\}$.

1. Montrer par un argument de compacité que l'application $\mathcal{D} \to \mathbb{R}, f \mapsto \mathcal{E}_{\mathtt{Dir}}(f)$ admet un mimimum.
2. Soit f est une fonction qui réalise le mimimum. On pose $f^\varepsilon(w) = f(w) + \varepsilon\mathbb{1}_{\{w=v\}}$ pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (petit). Faire un DL à l'ordre 2 de $\varepsilon \mapsto \mathcal{E}_{\mathtt{Dir}}(f^\varepsilon) - \mathcal{E}_{\mathtt{Dir}}(f)$ et en déduire que f est harmonique sur $V \setminus \{a,z\}$. Conclure que le minimum est atteint en une unique fonction $f \in \mathcal{D}$.
3. Prouver finalement que la valeur du minimum est la conductance équivalente (définie comme l'inverse de la résistance équivalente) :

$$\min_{f\in\mathcal{D}} \mathcal{E}_{\mathtt{Dir}}(f) = \mathcal{C}(a \leftrightarrow z).$$

4. En déduire que $\mathcal{C}(a \leftrightarrow z)$ est une fonction concave des conductances $\{c(e)\}_{e\in E}$.