Feuille d'exercices n°4 : Distance sur les mesures de probabilité.

Exercice 29. Soit μ une mesure de probabilité sur Ω, on pose P la matrice de transition définie par $P(x,y) = \mu(y)$ pour tout x, y ; calculer l'unique mesure stationnaire π de P puis la distance en variation totale

$$d(t) = \max_x \|P^t(x,\cdot) - \pi\|_{TV}$$

pour $t = 0$ puis $t \geq 1$.

Exercice 30. [Action d'une matrice de transition à gauche et distance en variation totale] Soit une chaîne de Markov de matrice de transition P, et μ et ν deux mesures de probabilité. Montrer que

$$\|\mu \cdot P - \nu \cdot P\|_{TV} \leq \|\mu - \nu\|_{TV}.$$

et en déduire que, pour tout $t \in \mathbb{N}$, si $d(t) = \max_x \|P^t(x,\cdot) - \pi\|_{TV}$ avec π une mesure de probabilité stationnaire de P, alors on a :

$$d(t+1) \leq d(t).$$

Exercice 31. [Mesure produit et distance en variation totale] Pour $i = 1 \dots n$, on se donne Ω_i un ensemble fini et μ_i et ν_i deux mesures de probabilité sur Ω_i. Sur l'espace produit $\Omega = \prod_i \Omega_i$, on définit alors les mesures produit [3] $\mu = \prod_i \mu_i$ et $\nu = \prod_i \nu_i$.

Pour obtenir une borne sur $\|\mu - \nu\|_{TV}$, on propose d'utiliser la caractérisation de la distance en variation totale à l'aide des couplages. Soit donc (X_i, Y_i) des couplages optimaux de μ_i et ν_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, au sens où $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) = \|\mu_i - \nu_i\|_{TV}$. On suppose les *vecteurs* $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendants (en i) et on pose alors $X = (X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = (Y_i)_{1 \leq i \leq n}$.

1. Montrer que (X, Y) est un couplage de μ et ν.
2. Montrer que $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq \sum_i \|\mu_i - \nu_i\|_{TV}$.
3. En déduire que

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \leq \sum_i \|\mu_i - \nu_i\|_{TV}.$$

Exercice 32. [Définitions alternative de d et de $\bar{d}$.] Montrer que, si π est une mesure stationnaire pour P,

$$\max_{x,y} \|P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\|_{TV} = \max_{\mu,\nu} \|\mu P^t - \nu P^t\|_{TV}$$

où le max porte sur μ et ν des mesures de probabilité sur Ω, et que

$$\max_x \|P^t(x,\cdot) - \pi\|_{TV} = \max_\mu \|\mu P^t - \pi\|_{TV}.$$

Exercice 33. [Distance en séparation] On pose

$$s_x(t) = \max_y \left[1 - \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)}\right]$$

la distance en séparation de $P^t(x,\cdot)$ à π. Montrer que

$$\|P^t(x,\cdot) - \pi\|_{TV} \leq s_x(t).$$

3. la mesure produit, $\mu(\prod A_i) = \prod_i \mu_i(A_i)$, correspond à la loi de variables aléatoires indépendantes.

Exercice 34. [Sous-multiplicativité de la distance en séparation] On définit la distance en séparation entre $P^t(x,\cdot)$ et π par

$$s_x(t) = \max_y \left[1 - \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)}\right],\ \text{puis } s(t) = \max_x s_x(t).$$

Dans la suite de cet énoncé, π sera une mesure stationnaire pour P dont toutes les entrées sont non nulles.

1. Montrer que pour tout $t \geq 1$, il existe une matrice stochastique Q_t telle que $P^t(x,y) = (1-s(t))\pi(y) + s(t)Q_t(x,y)$ et $\pi = \pi Q_t$.
2. Montrer que $P^{t+u}(x,y) = (1-s(t)s(u))\pi(y) + s(t)s(u)\sum_z Q_t(x,z)Q_u(z,y)$
3. En déduire que $s(t+u) \leq s(t)s(u)$.

Exercice 35. [Renversement du temps et mélange] Si P est une matrice de transition sur Ω et si π est une mesure stationnaire pour P telle que $\pi(x) \neq 0$ pour tout x, on définit la matrice de transition $\hat{P}$ de la chaîne renversée en temps par

$$\forall x, y \in \{0,\dots,n\},\ \hat{P}(x,y) = \frac{\pi(y)P(y,x)}{\pi(x)}.$$

1. Justifier pourquoi cette expression définit bien une matrice de transition, et donner une mesure stationnaire pour $\hat{P}$

Sur $\Omega = \{0,\dots,n\}$, on considère la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P(x,y) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{\{y=(x+1)\wedge n\}} + \mathbb{1}_{\{y=0\}}\right),$$

et on rappelle la notation $x \wedge y = \min\{x,y\}$.

2. Vérifier que P a une unique mesure stationnaire π, et la calculer.
3. Calculer la matrice de transition $\hat{P}$ de la chaîne renversée en temps.
4. Vérifier que $\hat{P}$ a une unique mesure stationnaire, la donner (sans calcul), et la comparer à $\hat{P}(0,\cdot)$.
5. Calculer $\hat{P}^t(x,\cdot)$ pour tout $0 \leq t \leq x \leq n-1$.
6. Déduire des deux questions précédentes $\hat{P}^t(x,\cdot)$ pour $t > x$, $0 \leq x \leq n-1$.
7. Quelle est la loi du temps d'atteinte τ_{n-1} de $n-1$ sous $\hat{P}(n,\cdot)$? Pour tout $t \leq n$, en déduire $\hat{P}^t(n,n-1)$ puis plus généralement $\hat{P}^t(n,\cdot)$. Reconnaître en particulier la mesure de probabilité $\hat{P}^n(n,\cdot)$.
8. Sans calcul à nouveau, donner $\hat{P}^t(n,\cdot)$ pour tout $t > n$.
9. Calculer $\hat{d}_n(t) = \|\hat{P}^t(n,\cdot) - \pi\|_{TV}$ pour tout $t \in \mathbb{N}$.
10. Montrer en utilisant un résultat du cours (Théorème 5.4 du livre) que

$$d(t) := \max_x \|P^t(x,\cdot) - \pi\|_{TV} \leq (1/2)^t$$

(on pourra considérer un couplage indépendant de deux chaînes de Markov de matrice de transition P issues de x et de y, et étudier le premier instant ou ces deux chaînes coincident). Comparer à $\hat{d}_n(t)$ calculé précédemment et commenter l'effet du renversement en temps.

Pour donner une interprétation probabiliste de cette chaîne, on pose $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre 1/2. On pose alors

$$X_t = \mathbb{1}_{U_t=1} \max\{s \in \{1,\dots,n\}, U_t = \dots = U_{t-s+1} = 1\}.$$

(L'indicatrice est là pour renvoyer 0 quand l'ensemble des s considérés dans le max est vide)

11. Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P.
12. Construire à l'aide des $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $\hat{P}$ (on se rappellera que $\hat{P}$ correspond au renversement en temps de P).

Exercice 36. [Distance en séparation et norme infinie] On compare dans cet exercice

$$d^s(t) = \max_{x,y}\left(1 - \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)}\right) \text{ et } d^{(\infty)}(t) = \max_{x,y}\left|1 - \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)}\right|,$$

càd les distances en séparation et la distance associée à la norme infinie. On note $t_{mix}^{(\infty)} := \inf\{t \geq 0, d^{(\infty)}(t) \leq 1/4\}$ *le temps de mélange* pour la distance associée à la norme infinie. Montrer que pour la marche aléatoire simple lazy sur le graphe complet à n sommets, pour laquelle

$$\Omega = \{1,\dots,n\} \text{ et } P(x,y) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{y=x} + \frac{1}{n-1}\mathbb{1}_{y\neq x}\right),$$

on a les estimées suivantes :

$$t_{mix}^{(\infty)} \geq \frac{\log(n) - \log(5/4)}{\log(2)}, \text{ tandis que } d^s(2) \leq 1/4.$$