Feuille d'exercices n°3 : Quelques exemples classiques de chaînes de Markov

Exercice 20. [Mesure stationnaire sur graphe régulier] On appelle graphe régulier un graphe dont les degrés sont tous égaux. Montrer que la marche aléatoire sur un graphe régulier est réversible. (La notion de degré ainsi que celle de marche aléatoire sur un graphe est définie à l'exercice 4).

Exercice 21. [Mesure stationnaire] On rappelle que la matrice de transition de la marche aléatoire sur le graphe $G = (V, E)$ est définie à l'exercice 4. On pose $V = \{0, \dots, n-1\}$, et on définit les ensembles d'arêtes

$$E = \{\{x, y\}, |x - y| = 1\} \text{ et } E' = E \cup \{\{0, n-1\}\}$$

Soit P la matrice de transition de la marche aléatoire sur (V, E), appelée la marche aléatoire sur V réfléchie en 0 et $n-1$ et Q celle de la marche aléatoire sur le n-cycle $G = (V, E')$.

1. Décrire les deux matrices de transition P et Q. Sont-elles irréductibles ?
2. Calculer par la méthode de votre choix la mesure de probabilité stationnaire de chacune de ces deux matrices de transition.

Exercice 22. [Marche aléatoire sur réseau et chaîne réversible] On appelle réseau $(G = (V, E), \{c(e)\}_{e \in E})$ un graphe $G = (V, E)$ et une collection de nombres réels $\{c(e)\}_{e \in E}$ indicés par l'ensemble des arêtes appelés conductances, et qu'on supposera strictement positifs. On définit $c(x, y) = c(e)$ si $e = \{x, y\}$. On appelle marche aléatoire sur le réseau $(G = (V, E), \{c(e)\}_{e \in E})$ la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P(x, y) = \frac{c(x, y)}{c(x)} \quad \text{avec } c(x) = \sum_{y : \{x, y\} \in E} c(x, y).$$

On suppose enfin que le graphe G est connexe. Noter que la marche aléatoire sur graphe, définie ̀l'exercice 4, est le cas particulier où la fonction c est constante.

1. Montrer que la chaîne de Markov de matrice de transition P est irréductible et réversible.
2. Réciproquement, montrer qu'à toute chaîne de Markov irréductible et réversible, on peut associer un réseau avec les deux propriétés suivantes : le graphe sous-jacent est connexe ; la chaîne de Markov associée est la marche aléatoire sur ce réseau (définie comme ci-dessus).
3. On considère $G = (V, E)$ un 3-cycle (soit encore, en tant que graphe, un triangle). Proposer un choix de conductances sur les 3 arêtes telles que la mesure stationnaire associée soit (le vecteur ligne) $(5/18; 6/18 = 1/3; 7/18)$.

Exercice 23. Donner un exemple, le plus simple possible, de chaîne de Markov non réversible.

Exercice 24. [Ruine du joueur] On considère $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\Omega = \{0, \dots, n\}$ de matrice de transition

$$P(i, j) = \frac{1_{\{|j-i|=1\}}}{2}, \quad i \in \{1, \dots, n-1\}, j \in \{0, \dots, n\}.$$

(Il est inutile pour les deux questions suivantes de préciser les transitions de la chaîne issue de 0 et de n). On s'intéresse au temps aléatoire $\tau = \min\{t \geq 0, X_t \in \{0,n\}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et plus précisément à la loi de la variable aléatoire X_τ (définie sur l'évènement $\{\tau < \infty\}$) ainsi qu'à l'espérance de τ.

1. Soit $k \in \Omega$. Quel résultat du cours assure que $\mathbb{E}_k(\tau) < \infty$? En déduire que $\mathbb{P}_k(\tau < \infty) = 1$ et que X_τ est bien définie sous $\mathbb{P}_k$.
2. Soit $k \in \Omega \setminus \{0,n\}$. Justifier soigneusement l'égalité suivante à l'aide de la propriété de Markov : $\mathbb{P}_k(X_\tau = n \,|\, X_1 = k+1) = \mathbb{P}_{k+1}(X_\tau = n)$.
3. Soit $k \in \Omega$. Posons $f(k) = \mathbb{P}_k(X_\tau = n)$. Donner $f(0)$ et $f(n)$, et montrer que
$$f(k) = \frac{1}{2} f(k-1) + \frac{1}{2} f(k+1), \quad k \in \Omega \setminus \{0,n\}.$$
Résoudre ce système.
4. Soit $k \in \Omega \setminus \{0,n\}$. Justifier soigneusement l'égalité $\mathbb{E}_k(\tau \,|\, X_1 = k+1) = 1 + \mathbb{E}_{k+1}(\tau)$.
5. Soit $k \in \Omega$. Posons $g(k) = \mathbb{E}_k(\tau)$. Donner $g(0)$ et $g(n)$. A l'aide de la propriété de Markov, établir que
$$g(k) = 1 + \frac{1}{2} g(k-1) + \frac{1}{2} g(k+1), \quad k \in \Omega \setminus \{0,n\}$$
Résoudre ce système (on pourra par exemple poser $h(k) = g(k+1) - g(k)$).
6. On suppose pour cette question que $P(0,1) = 1$. On pose $\tau' = \min\{t \geq 0, X_t = n\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et $m(k) = \mathbb{E}_k(\tau')$. Donner $m(0)$ et $m(n) - m(n-1)$. Trouver l'équation de récurrence satisfaite par m et la résoudre.

Exercice 25. [Collecteur de coupons [1]] Soit $(X_t)_{t \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire $Y_t = |\{X_s, 1 \leq s \leq t\}|$ le cardinal de l'ensemble des valeurs distinctes prises par les X_s jusqu'à l'instant t (inclus). On s'intéresse dans cet exercice au temps d'atteinte d'un niveau donné par cette chaîne.

1. Observer que $Y_t \in \{1, \ldots, t\}$, et que les trajectoires $t \to Y_t$ sont croissantes. Montrer que $(Y_t)_{t \geq 1}$ est une chaîne de Markov sur $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ et donner sa matrice de transition.
2. On note $\tau_k = \min\{t \geq 1, Y_t = k\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le temps d'atteinte de k. Reconnaître la loi de $\tau_{k+1} - \tau_k$, puis en déduire que
$$\mathbb{P}(\tau_k < \infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\tau_k) = n \sum_{j=n-k+1}^{n} \frac{1}{j},$$
et donner un équivalent de $\mathbb{E}(\tau_k)$ quand :
   - $n \to \infty$ avec $k/n \to \alpha \in (0,1)$
   - $n \to \infty$ avec $\ln(n-k+1)/\ln n \to 0$ (par exemple, $k = n$)

   Comparer en particulier le temps nécessaire pour atteindre $n/2$ et n.
3. Montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbb{P}\{\tau_n > \lceil n \log n + cn \rceil\} \leq \exp(-c)$.

1. Interprétation : Une collection d'images panini compte n images différentes, on les reçoit aléatoirement chez notre marchand de journaux, quand a-t-on, en fonction de n, une collection complète ?

Exercice 26. [Urne d'Erhenfest [2]] Soit $V = \{0,1\}^n$ et $E = \{\{x,y\} \in V^2 : \sum_{1\le i\le n} |x(i) - y(i)| = 1\}$. On considère la marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ (définie à l'exercice 4) sur l'hypercube $G = (V,E)$. On considère l'application somme des coordonnées $f : x \in V \mapsto \sum x(i) \in \{0,\dots,n\}$ et on pose, pour tout $t \in \mathbb{N}$, $Y_t = f(X_t)$.

1. Représenter le graphe obtenu pour $n = 1$ et $n = 2$, et justifier ainsi le nom d'hypercube pour le graphe $G = (V,E)$.
2. Quel est le degré des sommets de G ?
3. Donner la matrice de transition P de la chaîne (X_t), est-elle irréductible ? réversible ? Dans ce cas, donner sa mesure de probabilité stationnaire π.
4. On admet que $(Y_t)_{t\ge 0}$ est encore une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition Q. Est-elle irréductible ?
5. On appelle mesure image de π par f la mesure ν sur $\{0,\dots,n\}$ définie par $\nu(k) = \pi(f^{-1}\{k\})$, $k \in \{0,\dots,n\}$. Déterminer ν et vérifier que Q est réversible par rapport à la mesure de probabilité ν.
6. En déduire à l'aide du cours la valeur de $f(k) = \mathbb{E}(\tau_k^+ | Y_0 = k)$. Calculer
$$\lim \frac{1}{n} \log(f(k))$$
lorsque $n \to \infty$ avec $k/n \to \alpha$. Donner enfin un équivalent de $f(n/2)$. (On pourra s'aider de la formula de Stirling $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$.)

Exercice 27. [Chaînes de naissance et mort] Soit $\Omega := \{0,1,\dots,n\}$. On appelle chaîne de naissance et mort une chaîne de Markov dont la matrice de transition est tridiagonale, c'est-à-dire que $P(i,j) = 0$ si $|i-j| \ge 2$. On notera $p_i = P(i,i+1)$, $q_i = P(i,i)$ et $r_i = P(i,i-1)$ avec la convention que q_0 et p_n valent 0. Posons $w_0 = 1$ et pour $j \in \{1,\dots,n\}$,
$$w_j = \frac{\prod_{0\le i\le j-1} p_i}{\prod_{1\le i\le j} r_i}.$$

1. Faire un dessin de Ω et les probabilités de transition entre les états de Ω. Donner une CNS pour que la chaîne soit irréductible. On supposera cette condition satisfaite dans la suite de l'exercice.
2. Montrer que P est réversible et exprimer son unique loi stationnaire π à l'aide des quantités $(w_j)_{0\le j\le n}$.

Soit $\Omega_\ell := \{0,1,\dots,\ell\}$, pour $1 \le \ell \le n$. On pose $P_\ell(x,y) = P(x,y)$ si $x,y \in \Omega' \setminus \{(\ell,\ell)\}$, et $P_\ell(\ell,\ell) = p_\ell + q_\ell$. P_ℓ définit encore une matrice de transition, et on note $\tilde{X}$ la chaine de Markov associée à P_ℓ, et X la chaine de Markov associée à P. On pose $\tau_k^+ = \inf\{t \ge 1 : X_t = k\}$ et $\tau_k = \inf\{t \ge 0 : X_t = k\}$ pour $0 \le \ell \le n$, et $\widetilde{\tau}_k^+ = \inf\{t \ge 1 : \widetilde{X}_t = k\}$ et $\widetilde{\tau}_k = \inf\{t \ge 0 : \widetilde{X}_t = k\}$ pour $0 \le k \le \ell$.

3. Montrer que P_ℓ est réversible et exprimer son unique loi stationnaire π_ℓ à l'aide des $(w_j)_{0\le j\le \ell}$.

2. Interprétation de ce modèle, introduit en 1907 par les époux Ehrenfest pour illustrer certains des "paradoxes" apparus dans les fondements de la mécanique statistique naissante : on dipose de 2 urnes qui comprennent au total n boules, et on choisit à chaque instant au hasard une boule parmi les n présentes pour la changer d'urne ; on étudie la répartion des boules dans les 2 urnes.

4. Exprimer $\mathbb{E}_\ell(\widetilde{\tau}_\ell^+)$ en fonction de $\mathbb{E}_{\ell-1}(\tau_\ell)$, et en déduire la valeur de cette dernière quantité en fonction de (w_j) et (r_j).
5. En déduire $\mathbb{E}_k(\tau_\ell)$ pour tous $0 \leq k < \ell \leq n$ en fonction de (w_j) et (r_j).

Exercice 28. [Dernier site occupé] On considère la marche aléatoire simple sur le n-cycle (défini à l'exercice 4), et $\tau_x = \min\{t \geq 0, X_t = x\}$ le temps d'atteinte de x. On note Y le dernier site visité par la marche aléatoire, défini par $\{Y = y\} = \{\tau_y = \max_x \tau_x\}$.

1. Montrer que
$$\{Y = y\} = \{\tau_{y-1} < \tau_{y+1} < \tau_y\} \cup \{\tau_{y+1} < \tau_{y-1} < \tau_y\}.$$
2. Montrer que, pour tout $y \in \{0, \dots, n-1\}$,
$$\mathbb{P}_{y-1}(\tau_{y+1} < \tau_y) = 1/(n-1).$$
(On pourra trouver un système d'équations satisfaites par $f(k) = \mathbb{P}_k(\tau_{y+1} < \tau_y)$ et le résoudre).
3. En déduire la valeur de $\mathbb{P}_x(Y = y)$. Reconnaître cette distribution. Le résultat vous surprend-il ?