Feuille d'exercices n°2 : Valeurs propres et décomposition spectrale.

Exercice 13. [Vecteurs propres] Soit P une matrice de transition, de mesure stationnaire π, et f un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda \neq 1$. Montrer que $\sum_x f(x)\pi(x) = 0$.

Exercice 14. [Valeurs propres des matrices de transition] On étudie les propriétés de P matrice de transition vue comme opérateur agissant par multiplication à gauche $P : \mathbb{C}^\Omega \to \mathbb{C}^\Omega, f \mapsto Pf$.

1. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de P, alors son module satisfait $|\lambda| \leq 1$. (On pourra si besoin utiliser une des inégalités prouvées à l'exercice 5 puis choisir f un vecteur propre).
2. Montrer que, si P est irréductible, l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.
3. Soit P réversible. Montrer que si λ est une valeur propre de la matrice $P_L = (P+I)/2$, alors $\lambda \geq 0$. On appelle P_L la version lazy (ou paresseuse) de P.
4. Si P est irréductible, et la matrice A à coefficients réels satisfait pour tout x, y, $0 \leq A(x,y) \leq P(x,y)$ avec $A \neq P$, et si λ est valeur propre de A, alors $|\lambda| < 1$.

Exercice 15. [Estimées sur la variance par diagonalisation] Soit P une matrice de transition réversible par rapport à la mesure stationnaire π. Posons $\mathrm{Var}_\pi(f) = \sum_x f^2(x)\pi(x) - (\sum_x f(x)\pi(x))^2$ pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathrm{Var}_\pi(P^t f) \leq (\lambda^\star)^{2t} \mathrm{Var}_\pi(f)$$

ou $\lambda^\star = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } P, \lambda \neq 1\}$.

Exercice 16. [Coefficients diagonaux et diagonalisation] Soit P une matrice de transition réversible par rapport à une mesure de probabilité π, soit $t \in \mathbb{N}$ et $x \in \Omega$.

1. Montrer que $P^{2t+2}(x,x) \leq P^{2t}(x,x)$.
2. Si de plus toutes les valeurs propres sont positives ou nulles, montrer que $P^{t+1}(x,x) \leq P^t(x,x)$.

Exercice 17. [Cauchy-Schwarz et diagonalisation] Soit P une matrice de transition réversible par rapport à une mesure de probabilité π, de valeurs propres positives ou nulles. Montrer que, pour tout $x, y \in \Omega$, et tout $t \geq 0$,

$$\left| \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} - 1 \right| \leq \sqrt{\frac{P^t(x,x)}{\pi(x)} - 1} \sqrt{\frac{P^t(y,y)}{\pi(y)} - 1}$$

Exercice 18. [Forme de Dirichlet] Soit P matrice de transition réversible par rapport à π. On note $\langle f, g \rangle_\pi = \sum_x f(x)g(x)\pi(x)$ le produit scalaire associé a π, et

$$\mathcal{E}(f,g) = \langle (I-P)f, g \rangle_\pi.$$

1. Montrer que

$$\mathcal{E}(f,f) = \frac{1}{2} \sum_{x,y} [f(x) - f(y)]^2 \pi(x) P(x,y)$$

2. Montrer que

$$1 - \lambda_2 = \min \frac{\mathcal{E}(f,f)}{\langle f, f\rangle_\pi}$$

où le min porte sur les fonctions $f \neq 0$ telles que $\langle f, 1\rangle_\pi = 0$. La quantité $1 - \lambda_2$ est appelée trou spectral dans la littérature.

Exercice 19. [Valeurs propres et périodicité] Soit P une matrice de transition irréductible. On rappelle la notation $\mathcal{T}(x) = \{t \in \mathbb{N}, P^t(x,x) > 0\}$. On veut montrer que

$$(\forall x \in \Omega,\ \mathcal{T}(x) \subseteq 2\mathbb{N}) \text{ si et seulement si } -1 \text{ valeur propre de } P.$$

1. Supposons -1 valeur propre et notons f un vecteur propre associé. Il existe y tel que $|f(y)| = \|f\|_\infty$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{2n+1}(y,y) = 0$. En déduire que $\mathcal{T}(x) \subseteq 2\mathbb{N}$ pour tout $x \in \Omega$.
2. Montrer la réciproque, en construisant explicitement un vecteur propre de valeur propre -1 (on commencera par exprimer, pour un tel vecteur propre, $f(y)$ en fonction de $f(x)$ pour y tel que $P(x,y) > 0$).