Feuille d'exercices n°1 : Irréductibilité, apériodicité, réversibilité.

Exercice 1. [Matrice de transition symétrique] Une matrice de transition P est dite symétrique si pour tout $x, y \in \Omega$, $P(x, y) = P(y, x)$. Montrer que la mesure de probabilité uniforme sur Ω est une mesure stationnaire pour P. (On rappelle que Ω est fini).

Exercice 2. [Stricte positivité de la mesure stationnaire] Soit π la mesure stationnaire d'une matrice de transition irréductible. Montrer que $\pi(y) > 0$ pour tout $y \in \Omega$.

Exercice 3. Montrer que si P est une matrice de transition, $Q = (P + I)/2$ définit une matrice de transition apériodique. On appelle la chaîne associée la chaîne lazy.

Exercice 4. [Périodicité du n-cycle] On appelle graphe une paire (V, E), où V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommmets, et E est un sous-ensemble des paires non ordonnées d'éléments de E. La matrice de transition de la marche aléatoire (simple) sur le graphe $G = (V, E)$ est définie par

$$P(x, y) := \frac{1_{\{x,y\}\in E}}{\deg(x)} \text{ si } x, y \in V, \quad \text{avec } \deg(x) = \sum_{y\in V} 1_{\{x,y\}\in E}.$$

On considère le n-cycle, qui est le graphe (V, E) avec $V = \{0, \ldots, n-1\}$ et $E = \{\{x, y\}, |x-y| = 1\} \cup \{\{0, n-1\}\}$, et soit P la matrice de transition de la marche aléatoire sur le n-cycle.

1. Justifier par un dessin du graphe l'appellation n-cycle.

On pose $\mathcal{T}(x, y) = \{t \geq 0, P^t(x, y)\}$. On définit un chemin de longueur t de x à y comme une collection de sommets $(x_s)_{0\leq s\leq t} \in V^{t+1}$ tel que pour tout $s \in \{0, \ldots, t-1\}, \{x_s, x_{s+1}\} \in E$.

1. Montrer que $t \in \mathcal{T}(x, y)$ ssi il existe un chemin de longueur t de x a y
2. Dans le cas $n = 4$, expliciter $\mathcal{T}(0, 0), \mathcal{T}(0, 1), \mathcal{T}(0, 2), \mathcal{T}(0, 3)$ et dans le cas $n = 5$, expliciter $\mathcal{T}(0, 0), \mathcal{T}(0, 1), \mathcal{T}(0, 2), \mathcal{T}(0, 3), \mathcal{T}(0, 4)$.
3. Décrire $\mathcal{T}(x, y)$ dans le cas général en fonction des quantités $k = |x - y|$ et $n - k$ (par exemple).
4. En déduire la période de P si n est pair, si n est impair ?
5. On suppose n impair. Trouver le plus petit entier t tel que pour tout $x, y \in V$, $P^t(x, y) > 0$.

Exercice 5. [Contraction] On étudie les propriétés de P vu comme opérateur agissant par multiplication à gauche $P : \mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}^\Omega, f \mapsto Pf$.

1. Montrer que P est un opérateur contractant pour la norme $\|.\|_\infty$, $\|f\|_\infty = \max_x |f(x)|$:

$$\|Pf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

2. Soit π une mesure de probabilité stationnaire de P. Montrer que P est un opérateur contractant pour la norme $\|.\|_\pi$ (induite par le produit scalaire $\langle f, g\rangle_\pi = \sum_x f(x)g(x)\pi(x)$) :

$$\|Pf\|_\pi \leq \|f\|_\pi$$

Exercice 6. [Matrice de transition réversible et opérateur auto-adjoint] Montrer que P est réversible par rapport à π ssi P est autoadjoint dans $(\mathbb{R}^{\Omega}, \langle ., . \rangle_{\pi})$, c'est-à-dire $\langle Pf, g \rangle_{\pi} = \langle f, Pg \rangle_{\pi}$ pour tout $f, g \in \mathbb{R}^{\Omega}$.

Exercice 7. [Matrice de transition réversible] Soit P une matrice de transition sur Ω réversible par rapport à une mesure de probabilité π. Montrer que P^2 est encore réversible par rapport à π.

Exercice 8. [Unicité de la mesure stationnaire] Soit P une matrice de transition irréductible sur Ω. On cherche à montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité stationnaire pour P. On note π_1 et π_2 deux mesures de probabilité stationnaires de P.

1. Soit $y \in \Omega$ qui minimise $x \mapsto \pi_1(x)/\pi_2(x)$, montrer que pour tout x tel que $P(x, y) > 0$, on a $\pi_1(y)/\pi_2(y) = \pi_1(x)/\pi_2(x)$.
2. Obtenir la même conclusion pour tout $x \in \Omega$ puis conclure.

Exercice 9. [Principe du maximum] Soit une chaîne de Markov irréductible de matrice de transition P, et $B \subset \Omega$. On suppose que h est harmonique en tout point du complémentaire $B^c = \Omega \setminus B$. Montrer qu'il existe $x \in B$ tel que $h(x) = \max_{y \in \Omega} h(y)$.

1. On note x_0 un élément de Ω tel que $h(x_0) = \max_{y \in \Omega} h(y)$. On suppose $x_0 \notin B$. Soit $b \in B$. Justifier l'existence de $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ tel que $P(x_i, x_{i+1}) > 0$ pour tout $0 \leq i \leq r-1$ et $x_r = b$.
2. Montrer que $h(x_i) = h(x_0)$ pour tout i tel que $x_{i-1} \notin B$. On pourra utiliser une récurrence.
3. Conclure.

Exercice 10. [Somme de Césaro et existence d'une mesure stationnaire] Soit μ une mesure de probabilité sur Ω. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^{\star}$,

$$Q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k \quad \text{et} \quad \mu_n = \mu Q_n$$

la moyenne de Césaro des itérées de P, et son application à μ.

1. Vérifier que la mesure de probabilité μ_n satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$

$$|\mu_n P(x) - \mu_n(x)| \leq 1/n.$$

2. Justifier l'existence d'une suite extraite $(n_k)_k$ telle que pour tout x, la suite $(\mu_{n_k})_k$ converge. On notera ν cette limite.
3. Montrer que la mesure limite ν est une mesure de probabilité stationnaire pour P.

Exercice 11. [Somme de Césaro : convergence sans extraction] On reprend les notations de l'exercice 10. On veut maintenant montrer que $(\mu_n)_n$ converge. On note I la matrice identité, et on considère l'opérateur $I - P$ qui agit par multiplication par la droite selon $\mathbb{R}^{\Omega} \to \mathbb{R}^{\Omega}, \nu \mapsto \nu(I - P)$ (noter que l'on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\Omega}$ plutôt que le sous-ensemble des mesures de probabilité.)

1. Calculer νQ_n dans le cas où $\nu \in \mathrm{Im}(I - P)$ puis dans le cas où $\nu \in \mathrm{Ker}(I - P)$. En déduire que $\mathrm{Ker}(I - P) \cap \mathrm{Im}(I - P) = \{0\}$, et conclure à l'aide du théorème du rang que $\mathrm{Ker}(I - P) \oplus \mathrm{Im}(I - P) = \mathbb{R}^{\Omega}$.

2. Soit $\mu \in \mathbb{R}^\Omega$. En déduire qu'il existe $\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{R}^\Omega$ telles que $\mu = \nu_0(I-P) + \nu_1$ avec $\nu_1(I-P) = 0$. Calculer μ_n en fonction de ν_0 et ν_1 et en déduire que $\mu_n \to \nu_1$ quand $n \to \infty$.
3. Déduire des questions précédentes que $\nu_1 = \nu$.

Exercice 12. [Lemme de Schur, et application aux chaînes apériodiques] Soit un sous-ensemble S de $\mathbb{N}$ de pgcd g. On note $\mathbb{N}(S)$ l'ensemble des combinaisons linéaires a coefficients dans $\mathbb{N}$ de S, et $\mathbb{Z}(S)$ l'ensemble des combinaisons linéaires a coefficients dans $\mathbb{Z}$ de S.

1. Montrer que $\mathbb{Z}(S) = g\mathbb{Z}$ (on pourra considérer le plus petit élément de $\mathbb{Z}(S) \cap \mathbb{N}^\star$ et montrer qu'il est égal au pgcd g de S, en montrant que ces deux quantités se divisent).
2. Dans le cas où S a deux éléments, montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m$ implique $gn \in \mathbb{N}(S)$ (en d'autres termes, $|(\mathbb{Z}(S) \setminus \mathbb{N}(S)) \cap \mathbb{N}| < \infty$)

On admet que la même conclusion vaut encore dans le cas d'un ensemble S infini, et on se propose d'utiliser ce résultat pour montrer que si P est une matrice de transition irréductible et apériodique, alors il existe un entier m (indépendant de x et de y) tel que si $n \geq m$, $P^n(x,y) > 0$ pour tout $x, y \in \Omega$.

3. Soit $x \in \Omega$. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe $m = m(x) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m$ implique $n \in \mathcal{T}(x)$.
4. Conclure.