

Feuille d'exercices n°1 : Irréductibilité, apériodicité, réversibilité.

On suppose dans toute cette feuille que Ω ou V , selon les notations retenues dans chaque exercice, est un ensemble fini.

Exercice 1. [Matrice de transition symétrique]

1. Caractériser l'ensemble des matrices stochastiques P dont la mesure uniforme est une mesure stationnaire.

Une matrice stochastique P sur Ω est dite symétrique si pour tout $x, y \in \Omega$,

$$P(x, y) = P(y, x).$$

2. Donner une mesure stationnaire pour P .

Correction. Pour la première question, π mesure de proba stationnaire pour P signifie que

$$\forall y \in \Omega, \sum_x \pi(x)P(x, y) = \pi(y)$$

mais $\pi(x) = 1/|\Omega|$ dans le cas de la mesure uniforme donc, après multiplication des deux membres par $|\Omega|$, on a

$$\forall y \in \Omega, \sum_x P(x, y) = 1$$

L'ensemble des matrices stochastiques dont la mesure uniforme est une mesure stationnaire est donc l'ensemble des matrices bi-stochastiques, c'est-à-dire dont les lignes et colonnes, constituées de coefficients $\in [0, 1]$ somment à 1 :

$$\left\{ P = (P(x, y))_{x, y} : \forall x, y, P(x, y) \geq 0; \forall y, \sum_x P(x, y) = 1; \forall x, \sum_y P(x, y) = 1 \right\}$$

Pour la seconde question, il suffit d'observer qu'une matrice symétrique stochastique est bi-stochastique puisque, pour tout $y \in \Omega$:

$$\sum_x P(x, y) = \sum_x P(y, x) = 1$$

On peut aussi noter que les équations $\pi(x) = \pi(y)$ (si π est la mesure uniforme) et $P(x, y) = P(y, x)$ (par hypothèse) impliquent que l'équation de réversibilité $\pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x)$ est satisfaite. La valeur de l'exercice réside dans le fait que ce résultat est d'application très courante. Autant commencer directement par marteler le fait que la symétrie implique que la mesure uniforme est stationnaire.

Exercice 2. [Mesure stationnaire de la marche aléatoire simple sur un graphe] On appelle graphe une paire (V, E) , où V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets, et E est un sous-ensemble de paires non ordonnées d'éléments de V , appelées arêtes. Noter que les paires de type $\{x, x\}$, appelées boucles, sont autorisées. On suppose G sans sommet isolé¹. On définit une matrice stochastique sur V par

$$P(x, y) = \frac{\mathbf{1}_{x \sim y}}{\deg x},$$

appelée matrice de transition de la marche aléatoire sur G , où $\mathbf{1}_{x \sim y} = \mathbf{1}_{\{x, y\} \in E}$ est l'indicatrice des voisins de x , et $\deg x = \sum_{y \in V} \mathbf{1}_{x \sim y}$ est le nombre de voisins de x .

1. Vérifier que P est stochastique, sous quelle condition sur le graphe la matrice stochastique P est elle irréductible ?
2. Exprimer sous cette condition l'unique mesure (de probabilité) stationnaire π .
3. On dit que le graphe est régulier lorsque tous ses sommets ont même degré. Que dire dans ce cas ? Faire le lien avec l'exercice 1.

Correction. P stochastique est facile, P irréductible ssi le graphe est connexe (voir la correction de l'exercice 7 pour les détails); sous cette condition, la mesure de probabilité stationnaire est unique et pour l'identifier le plus simple est de regarder si par hasard P ne serait pas réversible par rapport à une mesure $\pi : \pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x)$ doit être vérifiée pour toute arête $\{x, y\}$, et alors est équivalente à : $\pi(x)/\deg(x) = \pi(y)/\deg(y)$; Il suffit donc de choisir π proportionnel à $\deg(x)$ pour tout sommet x , et de normaliser la mesure obtenue en mesure de probabilité pour conclure que

$$\pi(x) = \frac{\deg(x)}{\sum_y \deg(y)}$$

est l'unique mesure de probabilité stationnaire (sous la condition d'irréductibilité). Noter que

$$\begin{aligned} \sum_x \deg(x) &= \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} \mathbf{1}_{\{x, y\} \in E} \\ &= \sum_{x \in V} \sum_{y \in V: y \neq x} \mathbf{1}_{\{x, y\} \in E} + \sum_{x \in V} \mathbf{1}_{\{x, x\} \in E} \\ &= \sum_{\{x, y\} \in E} (2 \cdot \mathbf{1}_{x \neq y} + \mathbf{1}_{x=y}) \end{aligned}$$

est égal à deux fois le nombre d'arêtes simples plus le nombre de boucles.

La dernière question est une application directe de l'exercice 1, puisque la matrice de transition P est symétrique. On obtient donc que la mesure uniforme sur les sommets est stationnaire.

Exercice 3. [Matrice de transition réversible et opérateur auto-adjoint] Montrer que P est réversible par rapport à π ssi P est autoadjoint dans $(\mathbb{R}^V, \langle \cdot, \cdot \rangle_\pi)$ avec le produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle_\pi = \sum_{x \in V} f(x)g(x)\pi(x)$ c'est-à-dire ssi pour tout $f, g \in \mathbb{R}^V$, $\langle Pf, g \rangle_\pi = \langle f, Pg \rangle_\pi$.

1. c'est-à-dire que $\deg(x) > 0$ pour tout sommet x

Correction. Si P réversible par rapport à π alors

$$\begin{aligned} \langle f, Pg \rangle_\pi &= \sum_x f(x)Pg(x)\pi(x) \\ &= \sum_{x,y} f(x)P(x,y)g(y)\pi(x) \\ &= \sum_{x,y} P(y,x)f(x)g(y)\pi(y) \\ &= \sum_y Pf(y)g(y)\pi(y) = \langle Pf, g \rangle_\pi \end{aligned}$$

Réciproquement, si P autoadjoint dans $(\mathbb{R}^\Omega, \langle \cdot, \cdot \rangle_\pi)$, alors la relation $\langle Pf, g \rangle_\pi = \langle f, Pg \rangle_\pi$ avec $f = \delta_x$ et $g = \delta_y$ donne $Pf(y)\pi(y) = Pg(x)\pi(x)$ c'est-à-dire $\pi(y)P(y,x) = \pi(x)P(x,y)$.

Exercice 4. [Matrice de transition réversible] Soit P une matrice stochastique sur Ω réversible par rapport à une mesure de probabilité π . Montrer que P^2 est encore réversible par rapport à π .

Correction. Il s'agit de faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \pi(x)P^2(x,z) &= \pi(x) \sum_y P(x,y)P(y,z) \\ &= \sum_y P(y,x)\pi(y)P(y,z) \\ &= \sum_y \pi(z)P(y,x)P(z,y) \\ &= \pi(z)P^2(z,x), \end{aligned}$$

et on observe que ce calcul se généralise à une puissance entière quelconque de la matrice. On peut aussi utiliser l'exercice 3 et écrire

$$\langle P^2f, g \rangle_\pi = \langle Pf, Pg \rangle_\pi = \langle f, P^2g \rangle_\pi$$

Exercice 5. On appelle n -cycle le graphe (V, E) avec $V = \{0, \dots, n-1\}$ et $\{x, y\} \in E$ ssi $x = y \pm 1 \pmod n$, où on rappelle que deux entiers sont égaux modulo n si leur différence est un multiple de n . Ainsi, $E = \{\{x, y\}, |x - y| = 1\} \cup \{\{0, n-1\}\}$.

1. Justifier par un dessin du graphe l'appellation n -cycle.

Soit maintenant deux réels $p, q \in]0, 1[$ de somme 1. On considère la matrice stochastique sur V

$$P(x, y) = \mathbf{1}_{\{y=x+1 \pmod n\}}p + \mathbf{1}_{\{y=x-1 \pmod n\}}q$$

2. Pour quelles valeurs de p la matrice stochastique P est-elle réversible ?

Correction. On a, l'addition étant entendue modulo n , l'identité : $\pi(i)p = \pi(i+1)q$ c'est à dire $p/q = \pi(i+1)/\pi(i)$, puis $\prod_{0 \leq i \leq n-1} p/q = \prod_{0 \leq i \leq n-1} \pi(i+1)/\pi(i)$ puis $(p/q)^n = 1$: p/q est donc une racine n -ième de l'unité, et $p/q \in \mathbb{R}^+$. Donc $p/q = 1$, c'est-à-dire $p = q = 1/2$. Alternativement, on peut faire l'exercice à l' "envers" et remarquer a priori que la mesure

uniforme est une mesure stationnaire quelque soit la valeur de p : en effet, avec les additions modulo n , on a

$$\begin{aligned}(\pi \cdot P)(y) &= \sum \pi(x)P(x, y) \\ &= \pi(y-1)P(y-1, y) + \pi(y+1)P(y+1, y) \\ &= \frac{1}{n}(p+q) = \frac{1}{n} = \pi(y)\end{aligned}$$

Maintenant, si π est réversible par rapport à P , alors π est une mesure stationnaire. Mais celle-ci est unique puisque la matrice est irréductible. Donc π est la mesure uniforme. Maintenant, puisque P est réversible par rapport à π : $\pi(0)P(0, 1) = \pi(1)P(1, 0)$ implique $\frac{1}{n} \cdot p = \frac{1}{n} \cdot q$ donc $p = q$.

On pourra mentionner l'existence du critère de Kolmogorov pour la réversibilité. On a réversibilité ssi pour tout cycle $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = x_1$, $\prod_{i=1}^n P(x_i, x_{i+1}) = \prod_{i=1}^n P(x_{n+2-i}, x_{n+1-i})$. Cela avait fait l'objet d'un exercice dans un examen passé.

Exercice 6. [Lazy chain, ou chaîne paresseuse] Soit P une matrice stochastique, on pose $Q = (P + I)/2$.

1. Montrer que Q définit une matrice stochastique, et une matrice apériodique.
2. Observer qu'une mesure de probabilité π sur Ω est une mesure stationnaire pour P ssi elle est une mesure stationnaire pour Q .

Correction. 1. Q est bien sûr à coefficients positifs ou nul, et $Q\mathbf{1} = (P+I)/2 \cdot \mathbf{1} = (\mathbf{1}+\mathbf{1})/2 = \mathbf{1}$ assure donc que Q est stochastique. Pour l'apériodicité, on pose $\mathcal{T}(x) = \{t \geq 0, P^t(x, x) > 0\}$. Et il suffit de remarquer que

$$Q^1(x, x) = (P(x, x) + I(x, x))/2 \geq I(x, x)/2 = 1/2 > 0,$$

implique $1 \in \mathcal{T}(x)$ et donc $\text{pgcd}(\mathcal{T}(x)) = 1$ pour tout x .

2. Enfin $\pi Q = \pi$ est équivalent à $\pi(P + I)/2 = \pi$ soit $\pi P/2 + \pi/2 = \pi$ soit $\pi P = \pi$. On appelle Q la chaîne paresseuse associée à P .

Exercice 7. [Périodicité du n -cycle] On reprend l'exemple du n -cycle introduit dans l'exercice 5. On note P la matrice de transition de la marche aléatoire sur ce graphe. On pose $\mathcal{T}(x, y) = \{t \geq 0, P^t(x, y) > 0\}$. On définit un chemin de longueur t de x à y comme une collection de sommets $(x_s)_{0 \leq s \leq t} \in V^{t+1}$ tel que pour tout $s \in \{0, \dots, t-1\}$, $\{x_s, x_{s+1}\} \in E$.

1. Observer que $t \in \mathcal{T}(x, y)$ ssi il existe un chemin de longueur t de x à y
2. Dans le cas $n = 4$, expliciter $\mathcal{T}(0, 0), \mathcal{T}(0, 1), \mathcal{T}(0, 2), \mathcal{T}(0, 3)$ et dans le cas $n = 5$, expliciter $\mathcal{T}(0, 0), \mathcal{T}(0, 1), \mathcal{T}(0, 2), \mathcal{T}(0, 3), \mathcal{T}(0, 4)$.
3. Décrire $\mathcal{T}(x, y)$ dans le cas général en fonction des quantités k et $n - k$, où $k = |x - y|$.
4. En déduire la période de P si n est pair et si n est impair.
5. On suppose n impair. Trouver le plus petit entier t tel que pour tout $x, y \in V$, $P^t(x, y) > 0$.
6. Soit $j \geq 2$, et $n_1, \dots, n_j \geq 2$. On forme un graphe en considérant un n_1 -cycle, un n_2 -cycle, ... et un n_j -cycle, puis en identifiant les sommets 0 de tous ces cycles de manière à former un graphe connexe. Sous quelle condition le graphe résultant est-il apériodique ?

Correction. On note que tous les degrés valent 2 dans le graphe $G = (V, E)$, donc $P(x, y) = 1/2$ quand $\{x, y\} \in E$. On appelle chemin de longueur t une suite de $t+1$ sommets liés par des arêtes, c'est-à-dire une collection $x_0, x_1, \dots, x_t \in V$ tels que $(0 \leq s < t \Rightarrow \{x_s, x_{s+1}\} \in E)$. De la formule du produit matriciel, on a

$$P^t(x, y) = \sum_{\{x_s\}_{0 \leq s \leq t, x_0=x, x_t=y}} \prod_{0 \leq s \leq t-1} P(x_s, x_{s+1}) = \sum_{\{x_s\}_{0 \leq s \leq t, x_0=x, x_t=y}} 2^{-t} = N_{x,y}(t)2^{-t}$$

où $N_{x,y}(t)$ est le cardinal des chemins de longueur t de x à y . Ainsi si l'on pose $\mathcal{T}(x, y) = \{t \geq 0, P^t(x, y) > 0\}$, on voit que $t \in \mathcal{T}(x, y)$ ssi $N_{x,y}(t) \neq 0$.

Pour analyser quand $N_{x,y}(t) \neq 0$, on pourra commencer par prendre de petites valeurs de n pour comprendre la forme des ensembles $\mathcal{T}(x, y)$. Par exemple pour $n = 4$, on voit que $\mathcal{T}(0) = 2\mathbb{N}$, $\mathcal{T}(0, 1) = 1+2\mathbb{N}$, $\mathcal{T}(0, 2) = 2+2\mathbb{N}$, $\mathcal{T}(0, 3) = 1+2\mathbb{N}$. Pour $n = 5$, on voit que $\mathcal{T}(0) = 2\mathbb{N} \cup 5+2\mathbb{N}$, $\mathcal{T}(0, 1) = 1 + 2\mathbb{N} \cup 4 + 2\mathbb{N}$, $\mathcal{T}(0, 2) = 2 + 2\mathbb{N} \cup 3 + 2\mathbb{N}$, $\mathcal{T}(0, 3) = 3 + 2\mathbb{N} \cup 2 + 2\mathbb{N}$

On se donne $x, y \in \Omega$ et on pose $k = |x - y|$ la distance de x à y . Il suffit d'observer que

$$\{t \geq 0, P^t(x, y) > 0\} = (k + 2\mathbb{N}) \cup (n - k + 2\mathbb{N}).$$

Le reste en découle : si n est pair, alors avec $k = 0$,

$$\mathcal{T}(x) = \{t \geq 0, P^t(x, x) > 0\} = (2\mathbb{N}) \cup (n + 2\mathbb{N}) = 2\mathbb{N}$$

pour tout x et donc la période vaut 2. Si n est impair,

$$\mathcal{T}(x) = \{t \geq 0, P^t(x, x) > 0\} = (2\mathbb{N}) \cup (n + 2\mathbb{N})$$

comprend tous les entiers à partir de n (et même $n - 1, \dots$) : la période de la chaîne vaut donc 1 dans ce cas, et la chaîne est apériodique.

Toujours dans le cas impair, $n - 1$ est le plus petit entier t tel que $P^t(x, y) > 0$: si $2j < n - 1$, $P^{2j}(x, x + 1) = 0$ (prendre $k = 1$), et si $2j + 1 < n - 1$, $P^{2j+1}(x, x) = 0$ (prendre $k = 0$). Enfin, pour tout x, y , $P^{n-1}(x, y) > 0$ ($n - 1$ pair, donc ok pour les sommets à distance paire ; pour les sommets à distance impaire, $k \geq 1$ impaire, donc $n - 1 \in n - k + 2\mathbb{N}$).

Pour la dernière question enfin, il faut et il suffit que l'un des n_i , $i = 1 \dots j$, mettons n_{i_0} soit impair : on peut toujours revenir en l'origine en les instants pairs comme précédemment, et sous cette condition supplémentaire, on peut en utiliser le n_{i_0} -cycle revenir à 0 en un temps impair ; ceci montre l'apériodicité ; ainsi on a tous les entiers à partir de $n_{i_0} - 1$, et la chaîne est apériodique. Si en revanche tous les n_i sont pairs, la longueur d'un chemin issu de 0 qui finit en 0 est forcément paire (et pour tous les entiers pairs, on peut trouver de tels chemins) : la période vaut alors 2.

Exercice 8. [Unicité de la mesure stationnaire] Soit P une matrice stochastique irréductible sur Ω . On cherche à montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité stationnaire pour P par une méthode distincte de celle vue en cours (basée sur la transposition et le théorème du rang). On note π_1 et π_2 deux mesures de probabilité stationnaires de P .

1. Soit $y \in \Omega$ qui minimise $x \mapsto \pi_1(x)/\pi_2(x)$. Partant de l'égalité

$$\sum_{x \in \Omega} \frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)} \frac{\pi_2(x)}{\pi_2(y)} P(x, y) = \frac{\pi_1(y)}{\pi_2(y)}$$

montrer que tout x tel que $P(x, y) > 0$ vérifie $\pi_1(y)/\pi_2(y) = \pi_1(x)/\pi_2(x)$.

2. Obtenir la même conclusion pour tout $x \in \Omega$, puis conclure.

Correction. Notons π_1 et π_2 deux mesures stationnaires, et soit y comme dans l'énoncé. On a :

$$\frac{\pi_1(y)}{\pi_2(y)} = \frac{(\pi_1 P)(y)}{\pi_2(y)} = \sum_{x \in \Omega} \frac{\pi_1(x)}{\pi_2(y)} P(x, y) = \sum_{x \in \Omega} \frac{\pi_2(x)}{\pi_2(y)} \frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)} P(x, y)$$

et, par définition de y , ceci est supérieur ou égal à

$$\frac{\pi_1(y)}{\pi_2(y)} \sum_{x \in \Omega} \frac{\pi_2(x)}{\pi_2(y)} P(x, y) = \frac{\pi_1(y)}{\pi_2(y)} \frac{(\pi_2 P)(y)}{\pi_2(y)} = \frac{\pi_1(y)}{\pi_2(y)}$$

Puisqu'on a égalité entre les deux expressions gauche et à droite, ceci entraîne $\pi_1(x)/\pi_2(x) = \pi_1(y)/\pi_2(y)$ pour tout x tel que $P(x, y) > 0$. Le cas de $x \in \Omega$ quelconque peut être traité en choisissant au préalable t tel que $P^t(x, y) > 0$, puisque π_1 et π_2 sont encore des mesures stationnaires pour la matrice stochastique élevée à la puissance t . Enfin, ayant montré que l'application $x \mapsto \pi_1(x)/\pi_2(x)$ est constante, elle vaut nécessairement 1 puisque π_1 et π_2 sont des mesures de probabilité.

Exercice 9. [Propriétés spectrales, I] On étudie les propriétés de P vu comme opérateur agissant par multiplication à gauche $P : \mathbb{C}^\Omega \rightarrow \mathbb{C}^\Omega, f \mapsto Pf$.

1. Montrer que P est un opérateur contractant pour la norme $\|\cdot\|_\infty, \|f\|_\infty = \max_z |f(z)|$:

$$\|Pf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

2. On se restreint à $f \in \mathbb{R}^\Omega$ pour cette question. Soit π une mesure de probabilité stationnaire de P . On suppose que pour tout $x \in \Omega, \pi(x) > 0$. Montrer que P est un opérateur contractant pour la norme $\|\cdot\|_\pi$ induite par le produit scalaire $\langle f, g \rangle_\pi = \sum_z f(z)g(z)\pi(z)$:

$$\|Pf\|_\pi \leq \|f\|_\pi$$

(On pourra penser à utiliser Cauchy-Schwarz).

3. Soit f un vecteur propre de P associé à une valeur propre $\lambda \neq 1$. Montrer que $\sum_x f(x)\pi(x) = 0$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de P , alors son module satisfait $|\lambda| \leq 1$.

Correction. 1. Pour la norme infinie tout d'abord

$$|Pf(x)| = \left| \sum_y P(x, y)f(y) \right| \leq \sum_y P(x, y)|f(y)| \leq \|f\|_\infty \sum_y P(x, y) = \|f\|_\infty$$

et on conclut en prenant le max sur x à gauche.

2. En utilisant Jensen pour la fonction $x \mapsto x^2$ (ou encore Cauchy Schwarz en écrivant

$P(x, y)f(y) = \sqrt{P(x, y)}\sqrt{P(x, y)}f(y)$, et $\pi P = \pi$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|Pf\|_{\pi}^2 &= \langle Pf, Pf \rangle_{\pi} = \sum_x Pf(x)^2 \pi(x) \\ &= \sum_x \left(\sum_y P(x, y)f(y) \right)^2 \pi(x) \\ &\leq \sum_x \left(\sum_y P(x, y)f^2(y) \right) \pi(x) \\ &= \sum_y \left(\sum_x \pi(x)P(x, y) \right) f^2(y) \\ &= \sum_y f^2(y) \pi(y) = \langle f, f \rangle_{\pi} = \|f\|_{\pi}^2 \end{aligned}$$

3. π étant une mesure invariante :

$$\begin{aligned} \sum_x \lambda f(x) \pi(x) &= \sum_x Pf(x) \pi(x) \\ &= \sum_x \sum_y P(x, y)f(y) \pi(x) \\ &= \sum_y \pi(y) f(y) \end{aligned}$$

Avec $\lambda \neq 1$, on obtient le résultat. En particulier, tout vecteur propre associé à une valeur propre distinct de 1 prend donc des valeurs négatives (à contraster avec le vecteur propre 1 associé à la valeur propre 1).

4. D'après 2, on a :

$$\begin{aligned} \|f\|_{\pi} &\geq \|Pf\|_{\pi} \\ &\geq \|\lambda f\|_{\pi} \\ &\geq |\lambda| \|f\|_{\pi} \end{aligned}$$

Donc $|\lambda| \leq 1$ On peut aussi bien le faire avec 1 : la norme est ici au choix.

Exercice 10. [Fonctions harmoniques sur un graphe infini] Une proposition du cours assure que les fonctions harmoniques par rapport à une matrice stochastique P irréductible sur un espace fini Ω sont constantes. L'objectif de l'exercice est de comprendre comment ces propriétés peuvent être mises en défaut pour un graphe infini.

Étant donné un graphe G , on définit donc une matrice stochastique P sur l'ensemble des sommets $V(G)$ de G comme dans l'exercice 2, et on dira simplement que $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique sur G si f est harmonique par rapport à P ainsi définie.

1. Caractériser l'ensemble des fonctions harmoniques sur \mathbb{Z} (vu comme graphe). \mathbb{Z} admet-il des fonctions harmoniques bornées non constantes ?
2. Construire une fonction harmonique bornée non constante sur l'arbre binaire complet (un graphe connexe acyclique dans lequel tout sommet est de degré 3, sauf la racine qui est de degré 2 : le sommet racine a deux enfants, qui chacun ont deux enfants, qui chacun ...). On pourra commencer par chercher cette fonction à symétrie radiale, c'est-à-dire fonction de la seule distance à la racine.

Correction. 1. Si f est harmonique sur \mathbb{Z} (pour la matrice stochastique associée à la marche simple sur cet ensemble), alors $f(k) = \frac{1}{2}f(k-1) + \frac{1}{2}f(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On se donne mettons $f(0)$ et $f(1)$. Il s'agit donc d'une récurrence double classique, mais d'un cas particulièrement simple : on n'est pas même obligé de poser l'équation caractéristique $(X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, de racine double 1) pour constater que la solution s'écrit :

$$f(k) = f(0) + k(f(1) - f(0)), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Notons qu'il est aussi tout à fait possible de poser cette récurrence double formellement). On a donc obtenu la fonction affine (sur \mathbb{Z}) qui passe par $f(0)$ et $f(1)$. Il est immédiat de voir que cette solution convient ; de plus la solution est unique puisque de proche en proche, $f(0)$ et $f(1)$ déterminent $f(k)$ pour chaque entier k .

2. On cherche f harmonique sur l'arbre binaire complet, dont on fera une représentation graphique au tableau. On veut de plus que la fonction obtenue soit bornée non constante : laissons pour le moment cette contrainte de côté, on verra ensuite si la fonction trouvée satisfait la contrainte additionnelle (il n'y a pas a priori d'autre moyen de faire...) On commence par chercher f radiale sur les indications de l'énoncé, c'est-à-dire qui ne dépend que de la distance à la racine. On a donc que, si k désigne la distance à la racine :

$$f(k) = \frac{1}{3}f(k-1) + \frac{2}{3}f(k+1), \quad k \geq 1$$

Donc

$$f(k+1) = \frac{3}{2}f(k) - \frac{1}{2}f(k-1)$$

Cette fois-ci la solution ne saute pas aux yeux (pour moi en tout cas), on écrit donc l'équation caractéristique : $X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} = (X - \frac{3}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2 = (X - 1)(X - \frac{1}{2})$ Les solutions sont donc à chercher sous la forme :

$$f(k) = \lambda + \frac{\mu}{2^k},$$

pour λ, μ des réels. Puisqu'on cherche une solution et non pas toutes les solutions, on peut choisir $f(0)$ et $f(1)$, et le plus choix le plus simple semble être $f(0) = 0, f(1) = 1$, ce qui implique : $\lambda + \mu = 0, \lambda + \mu/2 = 1$ puis $\lambda = 2, \mu = -2$ D'où :

$$f(k) = 2(1 - 2^{-k}), k \geq 1$$

Arrivé à ce point, on aimerait conclure en posant : si $f(v) = 2(1 - 2^{-k})$ lorsque $d(\rho, v) = k$, mais on constate alors que la racine a la valeur 0 tandis que les deux enfants de la racine, notons les a et b , ont la valeur 1 ; autrement dit, la fonction proposée n'est pas harmonique en la racine. Pour palier à ce souci, on peut simplement poser :

$$\begin{cases} f(v) = -2(1 - 2^{-k}) \text{ lorsque } d(\rho, v) = k \text{ et } v \text{ descendant (au sens large) de } a \\ f(v) = +2(1 - 2^{-k}) \text{ lorsque } d(\rho, v) = k \text{ et } v \text{ descendant (au sens large) de } b \end{cases}$$

qui est cette fois-ci bien harmonique en la racine. De plus elle est bien bornée est non constante, comme le demande l'énoncé.

On pourrait démontrer un résultat d'unicité pour de telles fonctions à symétrie radiale. Cependant, il existe de nombreuses autres fonctions harmoniques qui ne sont pas radiales : un exemple simple (mais non borné cette fois-ci) consiste à choisir une fonction

affine le long d'un chemin bi-infini (isomorphe à \mathbb{Z} donc) dont tous les sommets sont distincts, puis à étendre par des constantes les valeurs de cette fonction (je ne détaille pas plus, faire un dessin). Cependant, cet exemple est moins intéressant car ces fonctions sont constantes ou non bornées.

On reverra vers la fin du cours l'intérêt de calculer les valeurs de fonctions harmoniques pour comprendre les probabilités d'atteinte d'ensembles. Cet exercice est une première sensibilisation qui montre que la situation peut être significativement plus compliquée dans le cas non de graphes non finis.

Exercice 11. [Somme de Césaro et existence d'une mesure stationnaire] Soit μ une mesure de probabilité sur Ω vue ici comme un vecteur ligne. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k \quad \text{et} \quad \mu_n = \mu Q_n$$

la moyenne de Césaro des itérées de P , et son application à μ .

1. Vérifier que la mesure de probabilité μ_n satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|\mu_n P(x) - \mu_n(x)| \leq 1/n.$$

2. Justifier l'existence d'une suite extraite $(n_k)_k$ telle que pour tout x , la suite $(\mu_{n_k})_k$ converge vers une limite notée ν . Montrer que la mesure limite ν est une mesure de probabilité stationnaire pour P .

Correction. On observe que $(\mu_n P - \mu_n)(x)$ forme une série télescopique :

$$(\mu_n P - \mu_n)(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (\mu P^{k+1} - \mu P^k)(x)}{n} = \frac{\mu P^n(x) - \mu(x)}{n}$$

dont la valeur absolue n'excède pas $1/n$ (noter que $\mu P^n(x) - \mu(x) \in [-1, 1]$, chaque terme de la différence étant dans $[0, 1]$, puisque μP^n et μ sont deux probabilités). Puisque $[0, 1]^\Omega$ est un compact, on peut extraire de $(\mu_n)_n$ une sous-suite qui converge. On note $(\mu_{n_k})_k$ l'extraction obtenue, et ν la mesure limite. Il est facile de voir qu'il s'agit encore d'une mesure de probabilité. Pour voir que ν est stationnaire, on fixe x puis on observe que

$$|(\nu P - \nu)(x)| \leq |(\nu P - \mu_{n_k} P)(x)| + |(\mu_{n_k} P - \mu_{n_k})(x)| + |(\mu_{n_k} - \nu)(x)|$$

puis on choisit k suffisamment grand pour que $(1/n_k) \leq \varepsilon/3$ et $\sum_x |(\mu_{n_k} - \nu)(x)| \leq \varepsilon/3$. Cette dernière condition implique $|\sum_x (\nu P - \mu_{n_k} P)(x)| = |(\sum_{x,y} (\nu - \mu_{n_k})(y) P(y, x))| \leq \sum_{x,y} |(\nu - \mu_{n_k})(y)| \leq \varepsilon/3$. Donc le membre de droite est inférieur à ε , qui est arbitraire : on conclut bien que $\nu P = \nu$.

Exercice 12. [Somme de Césaro : convergence sans extraction] On garde les notations de l'exercice 11. La matrice $I - P$ agit par multiplication par la droite selon $\mathbb{R}^\Omega \rightarrow \mathbb{R}^\Omega$, $\nu \mapsto \nu(I - P)$ (noter que l'on considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^Ω plutôt que le sous-ensemble des mesures de probabilité, de manière à rester dans le cadre de l'algèbre linéaire.)

1. Calculer νQ_n dans le cas où $\nu \in \text{Im}(I - P)$ puis dans le cas où $\nu \in \text{Ker}(I - P)$. En déduire que $\text{Ker}(I - P) \cap \text{Im}(I - P) = \{0\}$, et conclure à l'aide du théorème du rang que $\text{Ker}(I - P) \oplus \text{Im}(I - P) = \mathbb{R}^\Omega$.

2. Soit $\mu \in \mathbb{R}^\Omega$. En déduire qu'il existe $\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{R}^\Omega$ telles que $\mu = \nu_0(I - P) + \nu_1$ avec $\nu_1(I - P) = 0$. Calculer μ_n en fonction de ν_0 et ν_1 et en déduire que $\mu_n \rightarrow \nu_1$ quand $n \rightarrow \infty$.
3. Déduire des questions précédentes que $\nu_1 = \nu$.

Correction. 1. Si ν_1 est dans l'image, $\nu_1 = \nu_0(I - P)$ pour un certain ν_0 alors $\nu_1 \sum_{k=0}^{n-1} P^k = \nu_0(I - P) \sum_{k=0}^{n-1} P^k = \nu_0 - \nu_0 P^n$ d'où $\nu_1 Q_n \rightarrow 0$. Si ν_1 est dans le noyau de $I - P$, $\nu_1(I - P) = 0$ implique $\nu_1 = \nu_1 P = \nu_1 P^k$ d'où $\nu_1 = \nu_1 Q_n$. Si ν_1 appartient à l'intersection, on a donc $\nu_1 = \nu_1 Q_n \rightarrow 0$, soit $\text{Ker}(I - P) \cap \text{Im}(I - P) = \{0\}$ (la fonction nulle sur Ω). Du théorème du rang, on sait que la somme des dimensions de ces deux sous-espaces est $|\Omega|$, donc les deux espaces sont supplémentaires.

2. Si μ est donné, on peut donc trouver ν_0 et ν_1 avec $\mu = \nu_0(I - P) + \nu_1$, et $\nu_1 \in \text{Ker}(I - P)$. Alors, $\mu Q_n = \nu_0(I - P)Q_n + \nu_1$ et par le même raisonnement que ci-dessus, on a $\nu_0(I - P)Q_n \rightarrow 0$.

3. Ceci implique bien $\mu Q_n \rightarrow \nu_1$. Par ailleurs, $\mu Q_{n_k} \rightarrow \nu$, donc par unicité de la limite, $\nu_1 = \nu$.

Les lignes de Q sont formées par les mesures ν_1 associées à μ qui décrit la base canonique de l'espace.

En résumé, on a toujours convergence des moyennes de Césaro sans condition d'apériodicité sur la chaîne, et sans condition d'irréductibilité (mais les limites peuvent alors dépendre de la mesure initiale μ choisie). Intuitivement, les fluctuations qu'on peut constater pour des chaînes périodiques se trouvent ici "moyennisées".

Exercice 13. [Propriétés spectrales, II] Soit P stochastique irréductible réversible par rapport à une mesure de probabilité π . On munit l'ensemble des fonctions de Ω dans \mathbb{R} du produit scalaire $\langle f, g \rangle_\pi = \sum_x f(x)g(x)\pi(x)$. Posons $n = |\Omega|$.

1. Construire une base de vecteurs propres $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$, orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$. Indication : on pourra considérer la matrice auxiliaire Q définie par

$$Q(x, y) = \sqrt{\pi(x)/\pi(y)} P(x, y),$$

qui, en tant que matrice symétrique, admet une base de vecteurs propres orthonormée pour le produit scalaire usuel euclidien.

2. On notera les valeurs propres associées $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$. En déduire que

$$P^t(x, y) = \sum_{k \geq 1} f_k(x) f_k(y) \pi(y) \lambda_k^t.$$

3. On suppose désormais les valeurs propres classés par valeur absolue décroissante. Étudier l'espace propre associé au vecteur propre 1, et en déduire

$$\left| \frac{P^t(x, y)}{\pi(y)} - 1 \right| \leq |\lambda_2|^t \sum_{k \geq 2} f_k(x) f_k(y)$$

4. Observer que : $\langle \delta_x, \delta_x \rangle_\pi = \pi(x)$, puis développer f dans la base des f_k pour conclure que $\sum_k f_k^2(x) = \frac{1}{\pi(x)}$.

5. En déduire finalement

$$\left| \frac{P^t(x, y)}{\pi(y)} - 1 \right| \leq \frac{|\lambda_2|^t}{\min_x \pi(x)}$$

Si P apériodique, $|\lambda_2| < 1$ (voir polycopié), et on obtient donc une nouvelle preuve du théorème de convergence, avec une vitesse de convergence exprimée en terme de valeur propre et vecteur propre cette fois ci.

Correction. 1. Notons g_k la b.o.n. (pour le produit scalaire usuel) de Q ,

$$\sum_y \sqrt{\frac{\pi(x)}{\pi(y)}} P(x, y) g_k(y) = Q g_k(x) = \lambda_k g_k(x)$$

s'écrit encore $\sum_y P(x, y) \frac{g_k(y)}{\sqrt{\pi(y)}} = \lambda_k \frac{g_k(x)}{\sqrt{\pi(x)}}$ et si l'on pose $f_k = \frac{g_k}{\sqrt{\pi}}$, alors on constate que

$$\langle f_k, f_\ell \rangle_\pi = \sum_x f_k(x) f_\ell(x) \pi(x) = \sum_x g_k(x) g_\ell(x) = \mathbf{1}_{\{k=\ell\}},$$

c'est-à-dire que f_k est une b.o.n. pour le produit scalaire associé à π .

2. Maintenant $P^t(x, y) = P^t f(x)$ avec $f = \delta_y$, mais $f = \sum_k \langle f, f_k \rangle f_k = \sum_k f_k(y) \pi(y) f_k$

Donc

$$P^t(x, y) = \sum_k f_k(y) \pi(y) f_k(x) \lambda_k^t$$

3. De plus, sous l'hypothèse d'irréductibilité, l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1, engendré par la fonction constante égale à 1 (preuve dans l'exercice 9), et ceci implique

$$\frac{P^t(x, y)}{\pi(y)} - 1 = \sum_{k \geq 2} f_k(y) f_k(x) \lambda_k^t$$

et donc

$$\left| \frac{P^t(x, y)}{\pi(y)} - 1 \right| \leq |\lambda_2|^t \sum_{k \geq 2} f_k(y) f_k(x)$$

4. On observe que $\delta_x = \sum_k f_k(x) \pi(x) f_k$ donne

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \langle \delta_x, \delta_x \rangle \\ &= \left\langle \sum_k f_k(x) \pi(x) f_k, \sum_k f_k(x) \pi(x) f_k \right\rangle \\ &= \sum_k f_k^2(x) \pi^2(x) \\ &= \pi^2(x) \sum_k f_k^2(x) \end{aligned}$$

ce qui implique $\sum_k f_k^2(x) = \frac{1}{\pi(x)}$.

5. Finalement,

$$\sum_{k \geq 2} f_k(y) f_k(x) \leq \sum_{k \geq 1} f_k(y) f_k(x) \leq \sqrt{\sum_{k \geq 1} f_k(x)^2} \sqrt{\sum_{k \geq 1} f_k(y)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi(x) \pi(y)}} \leq \frac{1}{(\min_z \pi(z))}$$