# QCM récapitulatif (avec M=2)

**Exercice 1.** Discerner parmi les énoncés suivants lesquels sont vrais et lesquels sont faux ; justifier de façon très succinte (donner un contre exemple lorsque l'énoncé est faux). Certaines questions sont des questions de cours ou des applications directes du cours ; d'autres, marquées par une étoile, demandent plus de réflexion.

$P$ est une matrice stochastique sur $\Omega$ fini (sans conditions supplémentaires, sauf mention explicite).

Les questions suivantes traitent de l'irréductibilité et de l'apériodicité.

1. Si $P$ est irréductible, pour tout $x, y \in \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$, $P^n(x, y) > 0$.
2. Si $P$ est apériodique et irréductible, pour tout $x, y \in \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$, $P^n(x, y) > 0$.
3. Si $P$ est apériodique et irréductible, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$, pour tout $x, y \in \Omega$, $P^n(x, y) > 0$.
4. ** S'il existe $\epsilon > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x, y \in \Omega$, $P^m(x, y) > \varepsilon$, alors pour tout $x$, $(P^n(x, \cdot))_{n \geq 0}$ converge vers son unique mesure de probabilité stationnaire.

Les questions suivantes traitent des mesures invariantes de $P$.

1. $P$ admet au plus une mesure de probabilité stationnaire.
2. $P$ admet au moins une mesure de probabilité stationnaire. [voir Exercice 10 du TD1].
3. Si la suite de mesure de probabilités $(P^n(x, .))_n$ converge, alors la mesure de probabilité limite est nécessairement une mesure de probabilité stationnaire.
4. * Si la suite de mesure de probabilités $(P^n(x, .))_n$ converge le long d'une sous-suite, alors la mesure de probabilité limite est nécessairement une mesure de probabilité stationnaire.
5. Si la suite de mesure de probabilités $(P^n(x, .))_n$ converge, alors la mesure de probabilité limite est indépendante de $x$.

Les questions suivantes traitent des matrices de transition réversibles.

1. Si $P$ est irréductible et réversible (par rapport à une mesure de probabilité $\pi$), alors $P$ est apériodique.
2. Si $P$ est irréductible, $P$ peut être réversible par rapport à deux mesures de probabilité $\pi$ et $\pi'$ distinctes.
3. * Si $P$ est irréductible et réversible par rapport à une mesure de probabilité $\pi$, alors la période de $P$ est au plus de 2.

On considère une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Les questions suivantes traitent des mesures harmoniques.

1. Si $f$ est harmonique pour $P$ sur $\Omega$, alors $f$ est constante.
2. Si $f$ est harmonique pour $P$ sur $\Omega$ et $P$ irréductible, alors $f$ est constante.
3. Si $P$ est irréductible, une fonction harmonique sur $B \subset \Omega$ atteint son maximum sur $B$. [voir Exercice 9 du TD1].

4. Si $P$ est irréductible, une fonction harmonique sur $B \subset \Omega$ atteint son minimum sur $\Omega \setminus B$.
5. * Si $f$ est harmonique pour $P$ sur $\Omega$ privé d'un point et $P$ irréductible, alors $f$ est constante.

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ la chaîne de Markov de matrice de transition $P$. On note $\tau_x = \min\{t \geq 0, X_t = x\}$ et $\tau_x^+ = \min\{t \geq 1, X_t = x\}$. On pose $\nu_x(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_t = z, t < \tau_x^+)$. Les questions suivantes portent sur la représentation probabiliste des mesures invariantes. On suppose ici $P$ irréductible.

1. Pour tout $x$, $\nu_x$ est une mesure stationnaire pour $P$ (pas nécessairement une mesure de probabilité) , c'est-à-dire que $\nu_x P = \nu_x$.
2. Pour tout $x, y$, on a l'égalité (entre nombres réels) $\nu_x(\Omega) = \nu_y(\Omega)$.
3. Pour tout $x, y$, on a l'égalité (entre mesures) $\nu_x = \nu_y$.
4. Pour tout $x, y$, on a l'égalité (entre mesures de probabilité) $\frac{1}{\nu_x(\Omega)}\nu_x = \frac{1}{\nu_y(\Omega)}\nu_y$.
5. Pour tout $x$, on a $\mathbb{E}_x(\tau_x) = \nu_x(\Omega)$.
6. * $\pi$ est une mesure de probabilité stationnaire pour $P$ ssi pour tout $x$, $\mathbb{P}_\pi(X_0 \neq x \cap X_1 = x) = \mathbb{P}_\pi(X_0 = x \cap X_1 \neq x)$.

Soit $\mu$ et $\nu$ deux mesures de probabilité sur $\Omega$. Les questions suivantes traitent de la distance en variation totale et des couplages de mesure de probabilité.

1. Si $\sum_x (\mu(x) - \nu(x))\mathbb{1}_{\mu(x)>\nu(x)} = 0$, alors $\|\mu - \nu\|_{TV} = 0$.
2. S'il existe un couplage $(X, Y)$ un couplage de $\mu$ et $\nu$ tel que $\mathbb{P}(X = Y) \geq 0.8$ alors $\|\mu - \nu\|_{TV} < 0.2$.
3. Si pour tout couplage $(X, Y)$ de $\mu$ et $\nu$, $\mathbb{P}(X = Y) \leq 0.9$, alors $\|\mu - \nu\|_{TV} \leq 0.1$.
4. * Les mesures images de $\mu$ et $\nu$ par $f$ satisfont à $\|\mu \circ f^{-1} - \nu \circ f^{-1}\|_{TV} \leq \|\mu - \nu\|_{TV}$ [si $f : \Omega \to \Omega'$ alors $\mu \circ f^{-1}(A) := \mu(f^{-1}(A))$ pour tout $A \subset \Omega'$.]

Soit $(G = (V, E), \{c(e)\})$ un réseau, et $a, z \in V$ deux sommets distincts de $G$. On suppose que $P$ associée à la marche aléatoire sur ce réseau est irréductible. Un flot est dit non nul s'il n'est pas la fonction identiquement nulle sur les arêtes orientées de $E$. Les questions suivantes traitent de flots et de résistance équivalente :

1. Il existe un flot $\theta$ non nul de $a$ à $z$ d'intensité nulle ($\|\theta\| := \text{div } \theta(a) = 0$).
2. Il existe un flot $\theta$ non nul de $a$ à $z$ qui vérifie la loi des cycles et est d'intensité nulle.
3. Il existe un unique flot de $a$ à $z$ qui vérifie la loi des cycles.
4. La résistance équivalente est égale à la moitié de la différence de tension entre la source $a$ et le puits $z$ si le courant est d'intensité 2.
5. La fonction $x \mapsto \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_z)$ est la tension en $x$ lorsque la tension aux bornes de $a$ et de $z$ est fixée à 0 et 1 respectivement.
6. Le flot nul est l'unique flot d'énergie minimal de $a$ à $z$.

Soit $\tau$ un temps d'arrêt pour la filtration naturelle de la chaine de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ de matrice de transition $P$. Quelques questions sur les temps d'arrêt pour finir :

1. $\mathbb{P}(X_{t+1} = y \cap X_t = x \cap \{\tau \leq t\}) = P(x, y)\mathbb{P}(X_t = x \cap \{\tau \leq t\})$
2. $\mathbb{P}(X_{t+1} = y \,|\, X_t = x \cap \{\tau \geq t - 1\}) = P(x, y)$
3. $\mathbb{P}(X_{t+1} = y \,|\, X_t = x \cap \{\tau \leq t + 1\}) = P(x, y)$
4. $\mathbb{P}(X_{t+2} = y \cap X_t = x \cap \{\tau \leq t + 1\}) = P^2(x, y)\mathbb{P}(X_t = x \cap \{\tau \leq t + 1\})$