

# Force suiveuse critique sur une colonne pesante semi-infinie : modèle et expériences

Emmanuel de LANGRE, Olivier DOARÉ, Frédéric PELLET

LadHyX, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France  
Courriel : delangre@ladhyx.polytechnique.fr

(Reçu le 7 novembre 2000, accepté le 15 janvier 2001)

## Résumé.

On propose, par une approche de développement asymptotique, une valeur approchée de la force suiveuse qui rend instable une poutre semi-infinie suspendue. La validation expérimentale est réalisée à l'aide d'un tuyau sous écoulement interne. On observe la transition entre la solution classique pour la poutre encastree-libre de faible longueur soumise à une force suiveuse et la solution pour une longueur infinie. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

instabilité / force suiveuse / tuyau sous écoulement

## *Follower force on a semi-infinite beam loaded by its own weight : Model and experiments*

## Abstract.

Using matched asymptotic expansions, we give here an approximate value of the follower force that results in the instability of a semi-infinite hanging beam. An experimental verification is shown in the context of fluid-conveying pipes. The transition between the classical short length solution and the proposed solution for infinite length is also observed in the experiments. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

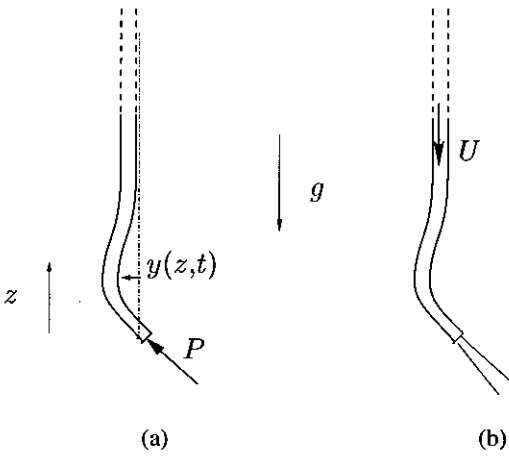
instability / follower force / fluid-conveying pipe

## 1. Introduction

Une poutre encastree-libre soumise à une force suiveuse est un exemple classique de système non-conservatif dont la stabilité ne peut s'étudier que par une approche dynamique [1]. Lorsque cette poutre est suspendue verticalement depuis son encastrement, *figure 1(a)*, la tension résultante de son propre poids augmente sa rigidité apparente. Pour une poutre longue, on peut s'attendre à ce que la tension locale, de plus en plus forte vers l'encastrement, limite la zone des mouvements à la proximité de l'extrémité inférieure. Ainsi, la longueur de la poutre ne devrait plus avoir d'influence sur la charge critique lorsqu'elle est grande devant une taille caractéristique de cette zone inférieure.

L'objet de cette note est de proposer une modélisation simple, validée expérimentalement, de l'instabilité créée par une force suiveuse sur une telle colonne semi-infinie, et de faire le lien avec la solution classique de la poutre de longueur finie. La démarche est proche de celle utilisée pour obtenir les modes d'un fil suspendu tenu à son extrémité inférieure, [2]. L'analogie avec le problème du tuyau sous écoulement interne avec une sortie libre [3], *figure 1(b)*, permet une validation expérimentale.

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.



**Figure 1.** (a) Poutre semi-infinie pesante avec force suiveuse  $P$ . (b) Tuyau semi-infini avec écoulement interne.

**Figure 1.** (a) Semi-infinite hanging rod with follower force  $P$ . (b) Semi-infinite hanging fluid-conveying pipe.

## 2. Modèle simplifié

Nous considérons une poutre semi-infinie soumise à la pesanteur et à une force suiveuse  $P$  en son extrémité inférieure. Son déplacement latéral  $y(z, t)$  est régi par l'équation :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (P - mgz) \frac{\partial y}{\partial z} \right] + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

où  $EI$  et  $m$  sont respectivement la raideur en flexion et la masse linéique de la poutre. L'équation (1) permet de définir deux longueurs caractéristiques : l'une est liée au rapport entre la raideur de flexion et celle induite par la tension en l'absence de force suiveuse,  $l = (EI/mg)^{1/3}$ , l'autre définit le lieu où la tension totale s'annule pour une force suiveuse donnée, soit  $\lambda = P/mg$ .

A une échelle de longueur  $L$  en  $z$  grande devant  $l$  et  $\lambda$ , l'équation (1) se réduit, en considérant deux petits paramètres  $\varepsilon = l/L$  et  $\varepsilon' = \lambda/L$ , à :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ (-mgz) \frac{\partial y}{\partial z} \right] + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

dans laquelle on a pu négliger la raideur en flexion d'une part et la raideur négative de compression induite par la force suiveuse d'autre part.

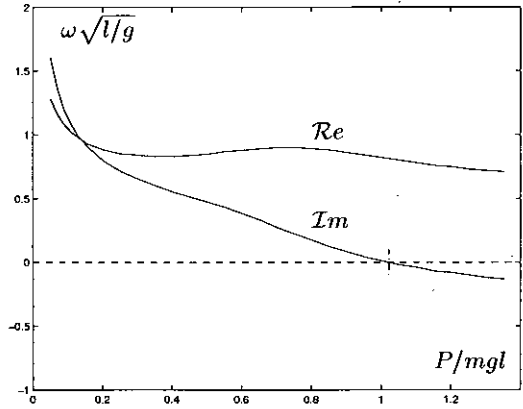
Les solutions harmoniques  $y(z, t) = \text{Re}[\varphi(z)e^{i\omega t}]$  de l'équation (2), vérifiant une condition de non-retour des ondes à l'infini sont :

$$\varphi(z) = A \left[ J_0 \left( 2\omega \sqrt{\frac{z}{g}} \right) - iY_0 \left( 2\omega \sqrt{\frac{z}{g}} \right) \right] \quad (3)$$

où  $J_0$  et  $Y_0$  sont les fonctions de Bessel d'ordre zéro,  $A$  étant une constante.

Replaçons nous maintenant à une échelle de longueur en  $z$  d'ordre  $\lambda$ . L'intuition permet de supposer que les amplitudes les plus importantes seront localisées dans la partie inférieure de la poutre, plus précisément dans la partie extrême en compression,  $z < \lambda$ . Nous proposons donc de négliger les effets inertiels hors de cette zone et de rassembler l'inertie latérale de celle-ci en une masse ponctuelle  $M = m\lambda$  à l'extrémité  $z = 0$ . L'équation (1) se réduit alors à :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (P - mgz) \frac{\partial y}{\partial z} \right] = 0 \quad (4)$$



**Figure 2.** Effet de la force suiveuse sur la pulsation libre. L'instabilité de flottement apparaît lorsque  $\text{Im}(\omega\sqrt{l/g}) < 0$ .

**Figure 2.** The effect of the magnitude of the follower force on the frequency of free vibrations. Flutter instability arises when  $\text{Im}(\omega\sqrt{l/g}) < 0$ .

avec les conditions à l'extrémité libre  $z = 0$ ,  $\partial^2 y / \partial z^2 = 0$  et  $EI(\partial^3 y / \partial z^3) + m\lambda(\partial^2 y / \partial t^2) = 0$ . Cette équation a pour solution harmonique générale  $y(z, t) = \text{Re}[\psi(z)e^{i\omega t}]$  avec, [2] :

$$\psi(z) = a + \int_0^z [bAi(u) + cBi(u) + dGi(u)] ds \tag{5}$$

où  $u = (s - \lambda) / l$  et  $Ai$ ,  $Bi$  et  $Gi$  sont les fonctions d'Airy, [4],  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  étant des constantes. Le raccord des solutions extérieure (3) et intérieure (5) s'écrit  $\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z)$ . À l'aide des formes asymptotiques des fonctions de Bessel et d'Airy, [4], on en déduit  $c = 0$ ,  $A = id$  et :

$$a + b \left[ \int_0^\lambda Ai(u) ds + \frac{1}{3} \right] + d \left[ \int_0^\lambda Gi(u) ds - \frac{4\gamma + 3i - \ln 3 + 6 \ln(\omega\sqrt{l/g})}{3\pi} \right] = 0 \tag{6}$$

Enfin, les conditions à l'extrémité inférieure donnent les deux relations :

$$bAi' \left( -\frac{\lambda}{l} \right) + dGi' \left( -\frac{\lambda}{l} \right) = 0; \quad bAi'' \left( -\frac{\lambda}{l} \right) + dGi'' \left( -\frac{\lambda}{l} \right) = a \frac{\lambda}{l} \left( \omega\sqrt{\frac{l}{g}} \right)^2 \tag{7}$$

L'existence d'une solution non triviale pour les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $d$  impose dans les équations (6) et (7) une relation implicite entre les paramètres  $\lambda$  et  $\omega$ . La résolution numérique de cette relation, figure 2, donne directement l'évolution de la pulsation adimensionnelle  $\omega\sqrt{l/g}$  en fonction de la force suiveuse adimensionnelle  $P/mgl = \lambda/l$ . L'instabilité est obtenue lorsque la partie imaginaire de  $\omega$  devient négative.

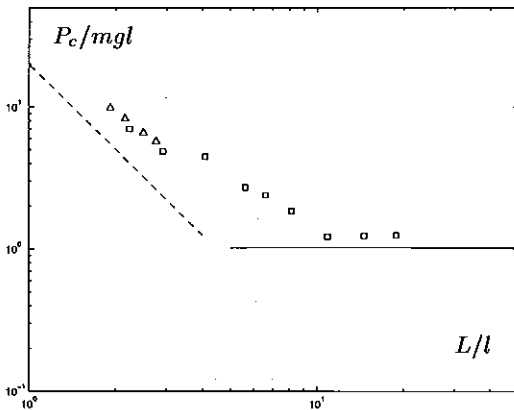
Le seuil d'instabilité peut être calculé directement en imposant  $\omega$  réel dans les équations (6) et (7). Il vient  $d = 0$  et donc  $Ai'(-\lambda/l) = 0$ , soit  $\lambda/l \approx 1,02$  et une charge critique :

$$P_C \approx 1,02 mgl = 1,02 (mg)^{2/3} (EI)^{1/3} \tag{8}$$

On notera que l'instabilité a lieu pour une charge telle que  $\lambda \approx l$ , c'est-à-dire lorsque la zone en compression axiale devient comparable en taille à celle où la flexion domine.

### 3. Validation expérimentale

Un tuyau avec un écoulement interne débouchant sur une extrémité libre est un moyen simple de réaliser une force suiveuse, [3]. Si la masse linéique du fluide  $m_F$  est faible devant celle du tuyau, les effets gyroscopiques restent faibles [3] et la force suiveuse équivalente est  $P = m_F U^2$  où  $U$  est la vitesse moyenne du fluide.



**Figure 3.** Influence de la longueur de la poutre sur la charge critique. ( $\Delta$ ) essais, tuyaux courts, [3]; ( $\square$ ) essais, tuyaux longs; (- -) équation (9); (—) équation (8).

**Figure 3.** Influence of the beam length on the critical force. ( $\Delta$ ) tests, short pipes [3]; ( $\square$ ) tests, long pipes; (- -) equation (9); (—) equation (8).

On utilise ici un tuyau en silicone de diamètre intérieur  $d = 2$  mm, de longueur  $L$  variant entre 23 cm et 1,5 m, avec  $EI = 3,3 \times 10^{-4} \text{ Nm}^2$  et  $m = 29 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$ , et un écoulement d'eau. Ce tuyau est suspendu par un encastrement à son extrémité supérieure. Pour une longueur  $L$  donnée, on fait varier la vitesse de l'écoulement interne jusqu'à observer une instabilité de flottement. Les valeurs de force suiveuse équivalente sont portées, *figure 3*, en fonction de la longueur  $L/l$ . Elles sont bien dans la continuité des essais sur un tuyau plus court, [3]. La solution classique pour une poutre finie en l'absence de gravité, [1] :

$$P_C \approx 2\pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (9)$$

suit bien leur évolution pour  $L/l < 3$ . Pour de plus grandes longueurs, on obtient une valeur de la force critique qui ne dépend plus de la longueur du tuyau. Cette limite correspond bien à la prédiction de l'équation (8).

#### 4. Analyse

On sait que sous l'action d'une force suiveuse une poutre de longueur finie devient instable par confusion de fréquence entre deux modes propres, [1]. Le mode instable est alors une combinaison déphasée des deux modes, telle que le travail de la force suiveuse au cours d'un cycle soit positif. Pour la poutre semi-infinie les caractéristiques d'un seul mode propre évoluent progressivement vers l'instabilité, *figure 2*. Celle-ci est atteinte lorsque la condition de non-retour des ondes à l'extrémité supérieure ne permet plus de dissiper le travail de la force suiveuse à l'extrémité inférieure. Ce comportement s'interprète donc en terme d'ondes plutôt que de modes. C'est une instabilité locale, [5]. Il faut noter que cette situation est générique de nombreux cas de vibrations sous écoulements, dans lesquels des instabilités locales apparaissent à des extrémité libres, alors que le reste de la structure est rigidifié par la friction induite par l'écoulement, [6].

#### Références bibliographiques

- [1] Bolotin V.V., *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, 1963.
- [2] Triantafyllou M.S., Triantafyllou G.S., The paradox of the hanging string: An explanation using singular perturbations, *J. Sound Vib.* 148 (1991) 343–351.
- [3] Païdoussis M.P., *Fluid-Structure Interactions. Slender Structures and Axial Flow*, Vol. 1, Academic Press, 1998.
- [4] Abramowitz M., Stegun I., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1970.
- [5] de Langre E., Ouvrard A.E., Absolute and convective bending instabilities in fluid-conveying pipes, *J. Fluids Struct.* 13 (1999) 663–680.
- [6] Weaver D.S., Païdoussis M.P., On collapse and flutter phenomena in thin tubes conveying fluid, *J. Sound Vib.* 50 (1977) 117–132.