



Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines
Thèse de doctorat

Spécialité
Mathématiques de la Modélisation

Présentée par

Carlo Maria Zwölf

*pour obtenir le grade de Docteur
de L'Université de Versailles et Saint Quentin en Yvelines*

Sujet de thèse

Méthodes variationnelles pour la modélisation des
problèmes de transmission d'onde électromagnétique
entre diélectrique et méta-matériau.

Thèse soutenue le 05/12/2007 devant le jury composé de

Mr.	Chérif AMROUCHE	<i>Rapporteur</i>
Mr.	Alfredo BERMUDEZ de CASTRO	<i>Rapporteur</i>
Mme.	Anne-Sophie BONNET-BENDHIA	<i>Directrice de thèse</i>
Mr.	Tahar Zamène BOULMEZAOUD	<i>Examineur</i>
Mr.	Patrick CIARLET	<i>Directeur de thèse</i>
Mr.	Houssein HADDAR	<i>Examineur</i>
Mr.	Daniel MAYSTRE	<i>Président du jury</i>



Thèse réalisée à l'Unité de Mathématiques Appliquées de
l'ENSTA

Remerciements

Depuis quelques temps je désirais fortement écrire cette page : la rédaction des remerciements s'effectue en effet lorsque la plupart des problèmes de rédaction du manuscrit est finie, les derniers points obscurs sont éclaircis et la soutenance reste le dernier cap à passer pour couronner les efforts du thésard ! C'est donc avec bonheur que j'écris ces lignes.

Je tiens tout d'abord à remercier Eric Lunéville de m'avoir accueilli à l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA, où les doctorants ont la chance de bénéficier des conditions de travail idéales.

Au cours de ces trois ans j'ai eu le privilège d'être encadré par Anne-Sophie Bonnet Bendhia et Patrick Ciarlet. Ils ont su me proposer un sujet de recherche actuel et intéressant et diriger mes travaux avec une grande attention à la pédagogie. Je tiens aussi à leur exprimer toute ma gratitude pour leur patience, pour les relectures attentives de ce manuscrit et pour m'avoir donné la possibilité de participer à des conférences et des congrès.

Je remercie Chérif Amrouche et Alfredo Bermudez de Castro qui ont accepté de rapporter cette thèse et les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de leur présence.

J'ai beaucoup de reconnaissance envers Jean-Luc Commeau, Christophe Mathulik et Maurice Diamantini (les gourous informatiques de l'UMA). Grâce à leurs précieux conseils et leurs techniques de sauvegarde, mes travaux ont pu survivre à plusieurs pannes informatiques sans être perdus.

Je remercie tous les membres de l'UMA pour leur accueil chaleureux et pour leur grande disponibilité, en particulier Colin Chambeyron pour son aide inestimable avec le code Mélina.

Un grand merci à Eve-Marie, Grace, Nadia et Nicolas qui, de simples collègues, sont devenus des vrais amis qui m'ont aidé à surmonter les moments difficiles qu'inévitablement parsèment les trois ans d'une thèse.

Je tiens à remercier Anne-Marie Vieillefon et Gaëlle qui ont lu avec beaucoup de patience la première version de ce manuscrit en me mettant en garde devant les pièges de la langue Française (qui est pour moi une découverte relativement récente).

Je remercie enfin ma famille, Gaëlle (citée pour la deuxième fois, ce n'est pas un hasard) et mes parents pour leur réconfort et leur aide dans les moments les plus difficiles.

À la mémoire de Giovanni

Table des matières

Introduction	7
1 Éléments de modélisation	11
1.1 Les matériaux de la main gauche	11
1.2 Les Équations de Maxwell	11
1.3 Éléments de modélisation des méta-matériaux	13
1.4 Le vecteur de Poynting dans les méta-matériaux	15
1.5 Quelques exemples d'application des méta-matériaux	16
1.6 L'importance d'un cadre mathématique	19
1.7 Conventions géométriques et notations	20
1.8 Un problème modèle	22
1.9 Le problème modèle ou le problème de transmission non coercif	23
1.10 Le problème de transmission dans la littérature	25
1.10.1 Le cas d'un grand contraste	26
1.10.2 Traitement d'une interface régulière	26
1.10.3 Une interface à coin	27
1.11 Exemples d'autres problèmes liés au problème modèle	27
1.12 Bilan et motivations pour une approche variationnelle	30
2 Formulation Naturelle pour le problème scalaire	31
2.1 Introduction	31
2.2 Quelques résultats préliminaires	32
2.3 Caractère bien posé de la formulation naturelle	36
2.3.1 Le cas d'une géométrie particulière	40
2.4 Discrétisation de la formulation naturelle	40
3 Formulations enrichies pour le problème scalaire	43
3.1 Introduction	43
3.2 Formulation à deux champs	44
3.2.1 Construction de la formulation variationnelle	45
3.2.2 Équivalence avec le problème initial	46
3.2.3 Cas d'une frontière Γ_b non connexe	48
3.2.4 Caractère bien posé de la formulation à deux champs	49
3.2.5 Le cas d'une géométrie particulière	52
3.3 Formulation à trois champs	52
3.3.1 Construction de la formulation variationnelle	52
3.3.2 Équivalence avec le problème de départ	54
3.3.3 Caractère bien posé de la formulation variationnelle à trois champs	56
3.3.4 Le cas d'une géométrie particulière	59
3.4 Formulations enrichies et singularités géométriques	59
3.5 Quelques généralisations des formulations enrichies	60
3.5.1 Méthode bande pour la formulation deux champs	62
3.5.2 Méthode bande pour la formulation trois champs	65

4	Validations numériques des F.V. pour le problème modèle	69
4.1	Introduction	69
4.2	Erreur par rapport à une solution analytique	69
4.3	Comparaisons entre les différentes formulations	72
4.3.1	Cas d'une interface plane	73
4.3.2	Cas d'une interface curviligne	74
4.3.3	Cas d'une interface à coin	77
5	Étude d'une cavité résonante	83
5.1	Introduction	83
5.2	Aspects théoriques généraux	83
5.3	Approximations des valeurs propres	85
5.3.1	Formulations variationnelles	85
5.3.2	Analyse numérique	87
5.4	Étude théorique pour une cavité rectangulaire	89
5.4.1	Sur la solution de l'équation de dispersion	92
5.5	Comparaisons théorique-numérique pour une cavité rectangulaire	95
5.5.1	Comparaison pour les valeurs propres positives	97
5.5.2	Comparaison pour les valeurs propres négatives	98
5.5.3	Bilan de la comparaison	107
5.6	Le cas où ϵ et μ changent de signe	107
6	Un nouveau résultat de compacité	117
6.1	Introduction	117
6.2	Un résultat de compacité pour ϵ qui change de signe	119
7	Formulation enrichie pour le problème de Maxwell 3D	127
7.1	Introduction	127
7.2	Construction de la formulation	127
7.3	Équivalence avec le problème de départ	129
7.4	Caractère bien posé de la formulation	132
7.5	Bilan sur le traitement du problème de Maxwell	135
	Conclusion et perspectives	137
	Appendice	139
A.A	Obtention des équations de Maxwell bidimensionnelles	139
A.B	Du problème de Maxwell au problème modèle	140
A.C	Le dioptré milieu droitier - milieu gauche	142
A.C.1	Analyse du cas (i) :	143
A.C.2	Analyse du cas (ii) :	147
A.C.3	Analyse du cas (iii) :	149
A.C.4	Analyse du cas (iv) :	150
A.D	Quelques éléments pour l'estimation de la norme de l'opérateur \mathcal{R}	152
A.E	Caractérisation de la constante de relèvement de l'inégalité (3.16)	154

A.E.1 Quelques cas particuliers	155
A.F Un problème vectoriel avec des conditions au bord mixtes . .	158
A.G Quelques résultats sur des problèmes vectoriels	160
Index des espaces fonctionnels	167

Introduction

Ce document recueille les résultats des travaux de recherche obtenus au cours de ma thèse de doctorat, effectuée sous la direction d'Anne-Sophie Bonnet Bendhia et Patrick Ciarlet au sein du laboratoire POEMS.

À partir de la fin des années '90 un intérêt croissant est porté vers une nouvelle catégorie de matériaux composites qui, à des fréquences particulières, se comportent comme des milieux caractérisés par des permittivités électriques ϵ négatives et/ou par des perméabilités magnétiques μ négatives [41, 40, 35].

En effet, grâce aux propriétés électromagnétiques uniques qu'on rencontre lorsque $\epsilon < 0$ ou $\mu < 0$, ces milieux artificiels, dont font partie les méta-matériaux et les supra-conducteurs, ont un très vaste domaine d'application en électronique, en optique ou en optronique [36, 23, 32].

Pour toutes les applications pratiques il est donc très important de pouvoir modéliser et simuler le comportement électromagnétique de ces milieux artificiels. Cela se fait sans difficultés particulières lorsqu'on considère un milieu "négatif" isolé. Par contre, lorsqu'on cherche à étudier l'interaction entre méta-matériaux ($\epsilon < 0$, $\mu < 0$) et diélectrique ($\epsilon > 0$, $\mu > 0$) ou supra-conducteur ($\epsilon < 0$, $\mu > 0$), on est confronté à des difficultés mathématiques et numériques liées aux changements de signe des constantes électromagnétiques à l'interface séparant les différents milieux [21, 34, 7].

L'objectif de cette thèse est l'étude, par différentes approches variationnelles, de ces problèmes d'interface. Le document présent se compose de sept chapitres :

Au cours du **premier chapitre**, après avoir rappelé quelques notions d'électromagnétisme et de physique des milieux artificiels composites, on fournit quelques exemples d'application qui devraient permettre d'illustrer les enjeux technologiques liés à ces milieux "négatifs". Dans la suite du chapitre, après avoir introduit les conventions géométriques et les notations qui seront employées tout au long de ce manuscrit, on notera que, pour les géométries bidimensionnelles, le problème électromagnétique se réduit à un problème scalaire faisant intervenir un terme de la forme $-\text{div}(\epsilon^{-1}\nabla\cdot)$. On expliquera alors plus dans le détail les difficultés liées au changement de signe de ϵ et on rappellera que, d'après l'ample littérature autour de ce problème scalaire, ce dernier est bien posé si le rapport entre les valeurs que ϵ prend des deux cotés de l'interface (on appellera ce rapport particulier *contraste*) est suffisamment grand ou petit en valeur absolue, alors qu'il est toujours mal posé si le contraste est égal à -1 .

On note déjà que des conditions de ce type, portant sur le contraste des constantes électromagnétiques, apparaîtront tout au long de ce manuscrit comme des conditions suffisantes pour assurer le caractère bien posé des problèmes qui seront étudiés.

On consacra la fin de ce premier chapitre à un *excursus* sur d'autres problèmes qui font intervenir des difficultés de même nature que le problème scalaire.

Au cours du **deuxième chapitre** le problème scalaire sera étudié par une méthode variationnelle "directe" : on s'intéressera à la formulation variationnelle naturelle (i.e. la formulation variationnelle la plus simple qu'on peut construire) du problème scalaire et on constatera que, à cause du changement de signe de ϵ il n'est pas possible d'étudier cette formulation en appliquant directement les outils standards dont on dispose pour les problèmes de type coercif plus compact. Au cours de ce chapitre on établira alors un formalisme variationnel qui permettra, sous certaines conditions convenables portant sur le contraste de ϵ , de situer le problème scalaire dans un cadre mathématiquement bien posé et d'obtenir des estimations d'erreur pour les solutions du problème scalaire, lorsqu'elles sont approchées en discrétisant la formulation naturelle par la méthode des éléments finis.

Une approche variationnelle, différente de celle du chapitre deux, sera présentée au cours du **troisième chapitre** : en étendant une méthode introduite dans [13], on introduira, uniquement dans les régions où ϵ est négatif, une variable supplémentaire égale au gradient de l'inconnue scalaire. Cette inconnue vectorielle auxiliaire sera utilisée pour construire deux formulations variationnelles (dites enrichies) équivalentes au problème scalaire. Pour chacune de ces formulations on établira des conditions, portant sur le contraste de la permittivité ϵ et sur la géométrie, qui permettront de situer la formulation considérée dans le cadre classique des problèmes de type coercif plus compact. L'introduction d'une variable vectorielle supplémentaire faisant augmenter le coût des calculs lors d'une mise en œuvre numérique, à la fin du chapitre ces formulations enrichies seront généralisées afin de pouvoir réduire la taille des régions dans lesquelles la variable auxiliaire doit être définie.

Des validations numériques de la formulation naturelle et des formulations enrichies pour le problème scalaire seront présentées au cours du **quatrième chapitre** : on considérera, dans un premier temps, une géométrie simple de sorte qu'on disposera d'une solution exacte du problème scalaire à laquelle comparer les solutions obtenues en discrétisant, par éléments finis, les formulations variationnelles présentées au cours des chapitres précédents. Dans un deuxième temps on s'intéressera à des géométries plus complexes pour lesquelles on n'aura pas accès à la solution exacte : les différents résultats numériques fournis par les trois formulations variationnelles seront alors comparés entre eux.

Au cours du **cinquième chapitre** on utilisera les méthodes variationnelles développées aux deux chapitres précédents pour calculer les modes et les fréquences propres d'une cavité résonante lorsque ϵ et/ou μ changent de signe. On montrera tout d'abord que le problème est autoadjoint si ϵ

ou μ est de signe constant, alors que les résultats numériques montrent qu'il n'est l'est plus si ϵ et μ changent de signe. Dans le premier cas les fréquences propres ω sont réelles ou imaginaires pures, alors que dans le second cas il existe des fréquences propres complexes ($\omega^2 \notin \mathbb{R}$).

On procédera ensuite à une étape de validation des méthodes numériques obtenues à partir de la formulation naturelle et des deux formulations enrichies. Pour cette étape on s'intéressera à une cavité de géométrie rectangulaire et, afin de faciliter ultérieurement le traitement, on prendra μ de signe constant sur Ω : l'opérateur $\mu^{-1}\text{div}(\epsilon^{-1}\nabla\cdot)$ étant autoadjoint si le contraste en ϵ est différent de -1 , toutes les valeurs propres de cet opérateur sont réelles. Le calcul analytique des valeurs et des modes propres de la cavité est simplifié, d'une part par cette dernière propriété et de l'autre par la géométrie particulière retenue pour le domaine Ω . On pourra alors comparer les résultats des approximations numériques à cette référence analytique afin d'en tester l'efficacité.

Après la validation, les méthodes numériques jugées fiables seront utilisées pour approcher les fréquences et les modes propres dans le cas où ϵ et μ changent de signe, pour lequel l'opérateur $\mu^{-1}\text{div}(\epsilon^{-1}\nabla\cdot)$ n'est pas autoadjoint. Le calcul analytique des valeurs propres complexes étant moins simple, on ne disposera pas de références exactes.

Les deux derniers chapitres de ce travail seront dédiés à l'étude du problème de Maxwell tridimensionnel, avec une attention particulière portée au cas où ϵ et μ changent de signe. On s'intéressera sans perte de généralité au problème de Maxwell exprimé pour le champ électrique. Les difficultés liées au changement de signe de μ au sein du terme $\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\cdot\right)$ seront alors analogues à celle rencontrées lors de l'étude du problème scalaire. Le changement de signe de la permittivité électrique fera intervenir une difficulté supplémentaire : lorsque ϵ change de signe on ne peut pas trouver dans la littérature des résultats nous assurant que l'espace fonctionnel auquel appartient naturellement le champ électrique s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)^3$.

Au cours du **sixième chapitre** on se concentrera sur cette dernière difficulté : on démontrera que même si ϵ change de signe, cet espace fonctionnel peut s'injecter de façon compacte dans $L^2(\Omega)^3$, si le contraste en ϵ est suffisamment grand ou petit. En d'autres termes, au cours de ce chapitre, on fournira une extension du théorème de compacité de Weber [44].

Au cours du **septième chapitre** on généralisera au système de Maxwell l'approche utilisée au chapitre trois pour construire les formulations enrichies, ce qui permettra de résoudre les problématiques liées au changement de signe de μ . En assemblant cette dernière approche au résultat de compacité du chapitre six, on pourra alors démontrer le caractère bien posé des formulations enrichies du problème de Maxwell dans le cas général où ϵ et/ou μ changent de signe.

Éléments de modélisation

1.1 Les matériaux de la main gauche

Veselago en 1968 étudia du point de vue théorique un hypothétique matériau homogène et isotrope caractérisé par une permittivité et une perméabilité négatives [43]. Il s'intéressa plus particulièrement à la propagation d'une onde plane monochromatique dans un tel milieu et il démontra que

- le trièdre $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k})$ est inversé ;
- le vecteur de Pointing est dans la direction opposée de la vitesse de phase ;
- les effets Doppler et Čerenkov sont inversés.

À cause de ces propriétés, il baptisa ce matériau comme *matériau de la main gauche*. Après s'être interrogé sur l'existence des matériaux "gauchers", il conclut que, dans la nature, il est impossible d'en trouver.

Bien qu'intéressants, les concepts développés par Veselago n'ont pas suscité beaucoup d'intérêt jusqu'à la publication des travaux de Smith *et al.* [41] à la fin des années '90 : ils ont réalisé un milieu composite qui, dans le domaine des microondes, se comporte comme un matériau de la main gauche et ils ont pu vérifier expérimentalement les prédictions de Veselago. Depuis, les communautés de chercheurs en physique de l'état solide et électronique sont de plus en plus intéressées par cette nouvelle catégorie de milieux artificiels, aujourd'hui communément appelés *méta-matériaux*. Grâce à leurs caractéristiques électromagnétiques uniques, les méta-matériaux ont un vaste domaine d'application et leur utilisation pourrait amener au dépassement de certaines limitations physiques considérées jusqu'à présent infranchissables. Bien que la plupart des recherches autour des méta-matériaux soit concentrée sur les matériaux gauchers, il faut souligner l'intérêt porté sur des milieux dans lesquels seulement une des deux constantes électromagnétiques est négative. Nous rappelons par exemple que le modèle phénoménologique de London pour la supraconduction ainsi que les modèles pour la dynamique des plasmas au voisinage de la résonance plasmon font intervenir des constantes diélectriques négatives.

Dans la suite de ce chapitre introductif, après un rappel sur les équations de Maxwell, nous évoquerons les idées à la base de la réalisation des méta-matériaux et, afin d'illustrer les enjeux technologiques qu'ils comportent, nous fournirons quelques exemples de leur application.

1.2 Les Équations de Maxwell

Les phénomènes électromagnétiques sont couramment modélisés à l'aide de quatre fonctions vectorielles dépendant des trois variables d'espace et du

temps :

- le champ électrique \mathcal{E} ,
- l'induction électrique \mathcal{D} ,
- l'induction magnétique \mathcal{B} ,
- le champ magnétique \mathcal{H} .

Le comportement de ces fonctions est régi par les équations de Maxwell à quatre champs :

$$\partial_t \mathcal{D} - \mathbf{rot} \mathcal{H} = -\mathcal{J}, \quad (1.1)$$

$$\partial_t \mathcal{B} + \mathbf{rot} \mathcal{E} = 0, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \mathcal{R}, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0. \quad (1.4)$$

Les équations (1.1) et (1.2) sont des équations d'évolution alors que (1.3) et (1.4) constituent des contraintes. La densité de charge électrostatique \mathcal{R} et le vecteur densité de courant \mathcal{J} satisfont la relation de conservation de la charge $\partial_t \mathcal{R} + \operatorname{div} \mathcal{J} = 0$.

Les champs \mathcal{D} et \mathcal{E} d'une part, et \mathcal{B} et \mathcal{H} de l'autre, sont liés par des lois de comportement qui, dans le cas le plus simple, sont linéaires :

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}, \quad \mathcal{B} = \mu \mathcal{H}.$$

Les quantités ϵ et μ sont respectivement la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique. Dans le cas des milieux homogènes ϵ et μ sont des scalaires, alors que dans des milieux anisotropes ce sont des tenseurs.

Grâce aux lois de comportement, nous pouvons récrire les équations de Maxwell dans leur version à deux champs :

$$\partial_t (\epsilon \mathcal{E}) - \mathbf{rot} \mathcal{H} = -\mathcal{J}, \quad (1.5)$$

$$\partial_t (\mu \mathcal{H}) + \mathbf{rot} \mathcal{E} = 0, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div} (\epsilon \mathcal{E}) = \mathcal{R}, \quad (1.7)$$

$$\operatorname{div} (\mu \mathcal{H}) = 0. \quad (1.8)$$

Comme nous le verrons au § 1.3, à des fréquences déterminées les méta-matériaux peuvent être modélisés en faisant intervenir des constantes électromagnétiques fictives négatives.

Pour la description des méta-matériaux il est alors naturel d'adopter un formalisme harmonique en temps : en régime harmonique toute dépendance temporelle est de la forme $\exp(i\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}^*$. Soient ρ et \mathbf{J} tels que

$$\mathcal{R} = \Re(\rho \exp(-i\omega t))$$

$$\mathcal{J} = \Re(\mathbf{J} \exp(-i\omega t)).$$

Si \mathbf{E} , \mathbf{H} sont solutions de

$$-i\omega\epsilon\mathbf{E} - \mathbf{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{J}, \quad (1.9)$$

$$-i\omega\mu\mathbf{H} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (1.10)$$

$$\operatorname{div} (\epsilon\mathbf{E}) = \rho, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div} (\mu\mathbf{H}) = 0. \quad (1.12)$$

alors, $\mathcal{E} = \Re(\mathbf{E} \exp(-i\omega t))$ et $\mathcal{H} = \Re(\mathbf{H} \exp(-i\omega t))$ satisfont (1.5)-(1.8). Les équations (1.9)-(1.12) sont appelées les équations de Maxwell harmoniques en temps.

Il est possible d'éliminer un des deux champs (respectivement \mathbf{E} , \mathbf{H}) pour obtenir un système équivalent d'équations de second ordre (respectivement (1.13)-(1.14) et (1.15)-(1.16)) :

$$\omega^2 \epsilon \mathbf{E} - \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) = -i\omega \mathbf{J} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{div} (\epsilon \mathbf{E}) = \rho, \quad (1.14)$$

$$\omega^2 \mu \mathbf{H} - \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\epsilon} (\mathbf{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}) \right) = 0 \quad (1.15)$$

$$\mathbf{div} (\mu \mathbf{H}) = 0. \quad (1.16)$$

Nous rappelons que, lors du passage d'un milieu à un autre, le champ électromagnétique satisfait les conditions de transmission

$$\begin{aligned} [\mathbf{E} \times \mathbf{n}] &= 0, & [\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}] &= \rho_s, \\ [\mathbf{H} \times \mathbf{n}] &= \mathbf{J}_s, & [\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}] &= 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

où $[X]$ indique le saut de la quantité X à l'interface séparant les deux milieux. Les champs \mathbf{J}_s et ρ_s représentent respectivement le vecteur densité de courant superficiel et la densité surfacique de charge qui peuvent exister à l'interface séparant les deux milieux.

Lorsque le domaine de propagation est borné, des conditions aux limites, dépendant de la nature du bord, viennent compléter le système de Maxwell. Concluons ce court rappel en introduisant, à titre d'exemple, les conditions de type conducteur parfait :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.18)$$

1.3 Éléments de modélisation des méta-matériaux

La permittivité électrique et la perméabilité magnétique sont des grandeurs qui modélisent au niveau macroscopique le comportement électromagnétique microscopique des matériaux : les caractéristiques électriques sont liées aux déplacements du barycentre des charges positives par rapport à celui des charges négatives induits, au sein des atomes ou des molécules, par l'application d'un champ externe. Les caractéristiques magnétiques sont dues aux courants créés par les mouvements des nuages électroniques autour des noyaux, par le spin porté par les électrons et par les réactions de ces minuscules boucles de courant face à un champ externe qui leur est appliqué.

Bien qu'aucun matériau ne présente à l'état naturel des constantes électromagnétiques négatives, certaines structures périodiques (composées par des métaux ou par des diélectriques) peuvent présenter à des fréquences particulières des constantes fictives négatives : pour certaines longueurs d'ondes suffisamment grandes, les structures périodiques apparaissent comme des

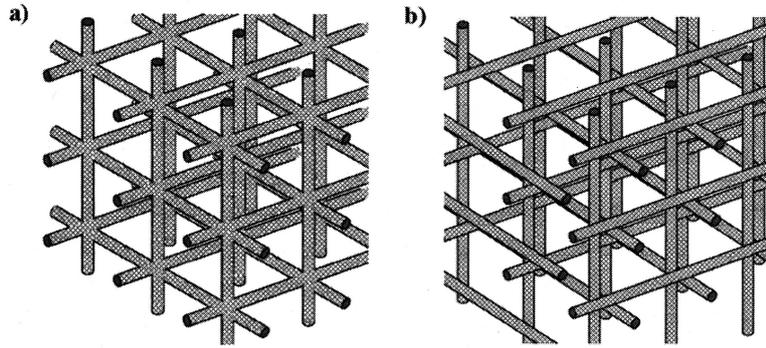


FIG. 1.1 – Fragment d'un méta-matériau à constante diélectrique négative constitué par : (a) une structure de fibres connectées, (b) une structure de fibres déconnectées.

milieux continus et des techniques d'homogénéisation peuvent être utilisées pour leur modélisation. Il a ainsi été démontré dans [9] et [40] que des structures périodiques de fibres conductrices ou diélectriques présentent des permittivités fictives négatives, pour certaines fréquences excitant les modes propres associés à la périodicité du réseau.

Par des techniques d'homogénéisation analogues, dans [35] et [30], il a été montré qu'un réseau périodique de résonateurs circulaires peut être caractérisé, à certaines fréquences, par une perméabilité fictive négative.

L'utilisation des résonateurs circulaires, plus connus comme *split ring reso-*

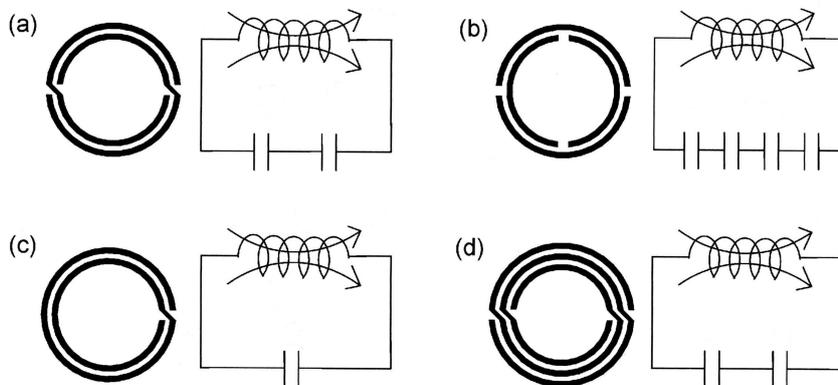


FIG. 1.2 – Différents types de résonateurs circulaires. À droite de chaque résonateur est représenté un circuit qui, par les caractéristiques inductives et capacitives, lui est équivalent. Les inductances et capacités des circuits sont fonction de la taille des résonateurs, de leur épaisseur, et du matériau dans lequel ils sont réalisés.

nator, n'est pas la seule méthode envisageable pour le magnétisme artificiel : dans [10] il est démontré que l'effet des micro-résonances propres à une structure de fibres parallèles infiniment longues et constituées d'un diélectrique de forte permittivité ϵ conduit à une perméabilité fictive négative.

Bien que dans les modèles d'homogénéisation le réseau périodique soit considéré comme étant infini, Smith *et. al.* [41], [39], [38] ont pu réaliser expéri-

mentalement des structures périodiques présentant des constantes électromagnétiques fictives négatives.

La méthode la plus répandue et usuelle pour modéliser les interactions entre les méta-matériaux et les diélectriques consiste à considérer ϵ et/ou μ négatifs dans les milieux artificiels et ϵ et μ positifs dans les diélectriques. Cette description fait donc intervenir un saut de signe des constantes électromagnétiques à l'interface séparant les deux milieux, sans rendre compte de façon plus fine des transitions entre le milieu artificiel et naturel.

Dans la suite de ce travail nous proposons une analyse mathématique des équations issues de ce modèle d'interface. Notre démarche devrait permettre d'en évaluer les limites de validité : dans les cas où les problèmes considérés seront mal posés dans des espaces fonctionnels garantissant le caractère borné de l'énergie électromagnétique, les limites du modèle d'interface adopté seront atteintes.

1.4 Le vecteur de Poynting dans les méta-matériaux

Considérons un matériau occupant un ouvert \mathcal{O} . Ce matériau est caractérisé par des constantes électromagnétiques ϵ, μ dont le signe sera spécifié plus tard.

Nous nous plaçons en régime harmonique et nous nous fixons un champ électrique \mathbf{E} qui, nous supposons, satisfait dans \mathcal{O} les équations de Maxwell.

Le flux d'énergie électromagnétique lié à la présence du champ électrique est donné par le vecteur de Poynting $\mathbf{S} := \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. D'après l'équation (1.10) $\mathbf{H} = \mathbf{rot} \mathbf{E} / (i \mu \omega)$: nous pouvons réexprimer

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \left(\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{rot} \mathbf{E}}{i \omega} \right). \quad (1.19)$$

Puisque nous avons fixé l'expression de \mathbf{E} , à partir de (1.19) nous constatons que si $\mu < 0$, le flux d'énergie est dans la direction opposée de celle qu'il aurait dans le cas où μ serait positive.

En d'autres termes : si au sein d'un méta-matériau caractérisé par une perméabilité magnétique μ_- négative le champ électrique est décrit par une certaine fonction \mathbf{E} , alors son vecteur de Poynting a même module et direction opposée du vecteur de Poynting associée à l'onde \mathbf{E} évoluant dans un milieu où $\mu_+ = |\mu_-|$.

Ainsi, à titre d'exemple, pour une onde plane monochromatique se propageant dans un milieu à perméabilité négative, le vecteur de Poynting sera dans la direction inverse du vecteur d'onde et, par conséquent, la vitesse de groupe sera dans la direction opposée à la vitesse de phase.

1.5 Quelques exemples d'application des méta-matériaux

Les méta-matériaux, par leurs propriétés électromagnétiques uniques, peuvent être employés pour des applications technologiques complètement innovatrices. Leur utilisation laisse entrevoir le dépassement de certaines limites physiques considérées auparavant comme infranchissables : à titre d'exemple, parmi les applications potentielles des méta-matériaux, nous allons décrire plus dans le détail les lentilles parfaites, les cavités optiques ultra-compactes (dont les dimensions caractéristiques sont très inférieures à la longueur d'onde λ) ou encore les guides d'onde dont la dimension latérale est plus petite que la limite de diffraction ($\lambda/2$).

Les lentilles parfaites :

Considérons une lame à faces parallèles de méta-matériau gaucher plongée dans un diélectrique. Dans un premier temps, en utilisant quelques simples considérations d'optique géométrique, nous expliquerons pourquoi la lame peut se comporter comme une lentille. Dans un deuxième moment, par quelques considérations d'optique ondulatoire, on verra que cette lentille permet de focaliser la lumière plus efficacement qu'un dispositif classique.

Lorsqu'un milieu gaucher est traversé par un rayon lumineux, il se com-

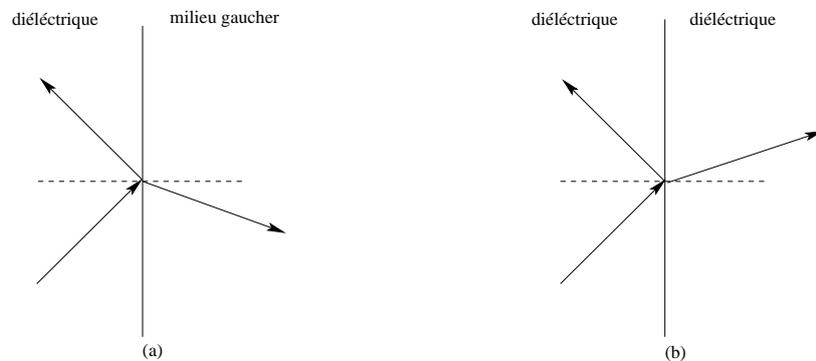


FIG. 1.3 – Schéma du phénomène de réflexion-diffraction pour un rayon traversant un dioptré plan. Les flèches représentent le sens de propagation de l'énergie : (a) réfraction négative ; (b) réfraction classique. Dans le cas (a) le rayon incident et le rayon réfracté sont du même côté par rapport à la normale d'incidence.

porte comme si son indice optique était négatif (cf. § A.C). Par conséquent, d'après la troisième loi de Descartes, lors du passage d'un milieu gaucher à un milieu standard (et vice-versa), les rayons incidents et réfractés se situent du même côté par rapport à la normale (cf. figure 1.3). Ce phénomène est connu sous le nom de *réfraction négative*. Nous invitons le lecteur intéressé par plus de détails sur la réfraction négative à consulter l'annexe A.C où nous présentons l'étude d'un dioptré plan séparant un diélectrique d'un milieu gaucher.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 1.4, grâce à une lame gauchère à faces parallèles il est possible de faire converger les rayons sortants d'un

point source vers un point focal. Dans [36] Pendry a suggéré qu'une lame

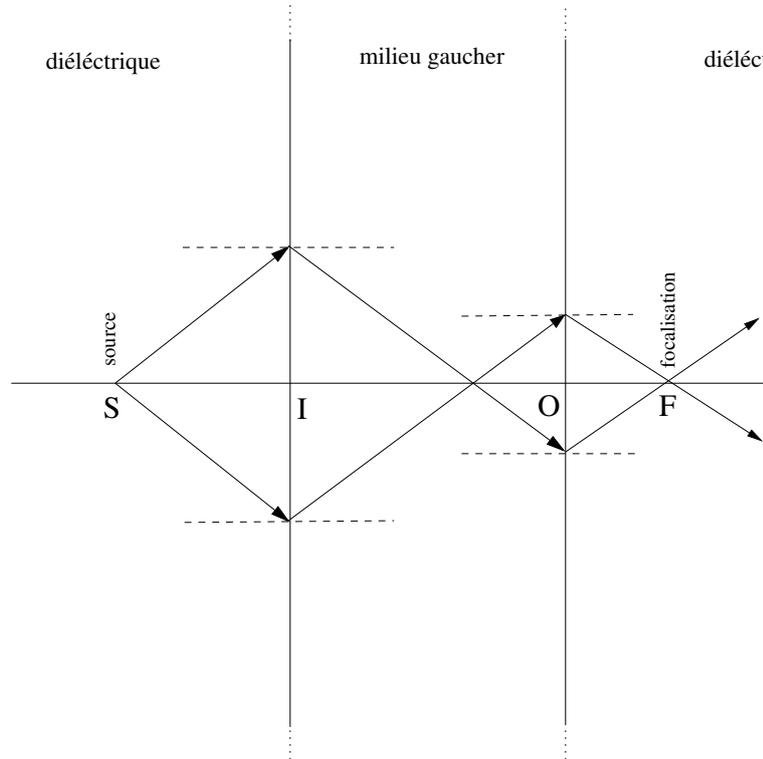


FIG. 1.4 – Parcours des rayons lumineux à la traversée d'une lame gauche. Les rayons sortant de la source sont focalisés à la sortie de la lame. Dans la configuration décrite par Pendry $\overline{SI} + \overline{OF} = \overline{IO}$.

gauchère à faces parallèles plongée dans un diélectrique de constantes électromagnétiques ϵ_d, μ_d puisse se comporter comme une lentille parfaite si, au sein du méta-matériau, $\epsilon = -\epsilon_d$ et $\mu = -\mu_d$ (i.e. si la permittivité et la perméabilité relatives sont égales à -1) : dans le modèle de l'optique ondulatoire, l'information lumineuse portant sur les détails plus petits et fins est portée par les hautes fréquences spatiales. À la traversée d'un dioptre séparant deux milieux classiques, les hautes fréquences spatiales sont liées à des modes évanescents. La perte d'information liée à ce phénomène implique que la résolution maximale d'une lentille ne peut pas être supérieure à la longueur d'onde (limite de Rayleigh).

Au sein du milieu gauche les ondes évanescentes croissent de sorte que, à la sortie de la lame, l'amplitude de ces dernières n'est pas atténuée par le processus de transmission. Puisque toutes les fréquences spatiales sont transmises à travers la lame, l'absence de perte d'information implique la disparition de la limite de Rayleigh.

Dans la configuration décrite par Pendry la somme de la distance entre la source et l'entrée de la lame avec la distance entre la sortie de la lame et le point de focalisation est égale à l'épaisseur même de la lame (cf. figure 1.4). Maystre *et al.* [32] ont repris les travaux de Pendry et, dans [33], ils ont montré qu'un méta-matériau possédant une permittivité et une perméabi-

lité relatives égales à -1 ne peut pas exister. Ils ont cependant montré que pour des permittivités et perméabilités négatives, la lame à faces parallèles peut focaliser la lumière de façon plus efficace (i.e. avec moins de pertes d'information optique) qu'une lentille classique.

Un résultat analogue à ce dernier est présenté dans [45] où les auteurs considèrent une lame gauchère pour laquelle la permittivité relative et la perméabilité relative sont différentes de -1 . Ils démontrent qu'un tel dispositif permet une focalisation sélective suivant les différentes polarisations qui composent le rayon incident.

Les micro-cavités résonantes :

Dans une cavité électromagnétique mono-dimensionnelle de largeur d le mode de plus basse fréquence (non nulle) a pour longueur d'onde $\lambda = 2d$. Dans [23] Engheta a suggéré qu'une cavité constituée par la juxtaposition de deux couches infinies, l'une de matériau gaucher, l'autre de diélectrique et dont les surfaces externes sont couvertes par des couches parfaitement réfléchissantes (cf. figure 1.5) puisse se comporter comme une micro cavité. En considérant une polarisation de type H_{\parallel} pour le champ magnétique, il a

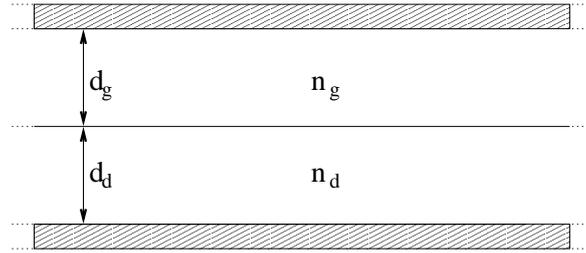


FIG. 1.5 – Cavité mono-dimensionnelle constituée de deux couches infinies, l'une de matériau "gaucher", l'autre de diélectrique. Les surfaces externes sont recouvertes d'une couche parfaitement réfléchissante

établi qu'une telle cavité possède un mode propre non nul dont la relation de dispersion peut s'écrire

$$\frac{\tan(n_d k_0 d_d)}{\tan(n_g k_0 d_g)} = \frac{n_d |\mu_d|}{n_g |\mu_g|}, \quad (1.20)$$

avec ϵ_g, μ_g, d_g et ϵ_d, μ_d, d_d respectivement la permittivité, la perméabilité, l'épaisseur de la couche gauchère et de la couche diélectrique.

Pour mieux comprendre la particularité de la structure à base de métamatériaux, considérons le système d'équations aux valeurs propres satisfait par la polarisation H_{\parallel} :

$$\begin{cases} -d_x \left(\frac{1}{\epsilon} d_x H_{\parallel} \right) = \omega^2 \mu H_{\parallel} \\ H_{\parallel} = 0 \text{ sur la surface externe} \end{cases} . \quad (1.21)$$

Les valeurs de ω vérifient la relation

$$\omega^2 = \frac{\int \frac{1}{\epsilon} |d_x H_{\parallel}|^2}{\int \mu |H_{\parallel}|^2}. \quad (1.22)$$

Lorsqu'on considère une cavité classique, ayant les mêmes caractéristiques géométriques que la structure proposée par Engheta, mais constituée par la juxtaposition de deux couches diélectriques, en partant de (1.22) nous obtenons l'estimation

$$\omega^2 \geq \frac{1}{\max(\epsilon) \max(\mu)} \frac{\pi^2}{(d_d + d_g)^2}.$$

Dans le cas d'une cavité à base de méta-matériaux, à cause du changement de signe de ϵ et/ou μ nous ne pouvons pas obtenir, à partir de (1.22), une minoration de ce type et ω^2 peut prendre des valeurs positives très petites ainsi que des valeurs négatives. Il en résulte que la longueur d'onde associée à la plus petite valeur de ω puisse être très grande par rapport aux dimensions caractéristiques de la cavité.

Au cours du chapitre 5 nous généraliserons les résultats d'Engheta en nous intéressant, théoriquement et numériquement, à l'étude d'une cavité bidimensionnelles.

Les micro-guides d'ondes :

Dans [1] ont été considérées deux sortes de guides fermés obtenues avec des méta-matériaux : la première est constituée d'une bi-couche matériau gaucher-diélectrique ; la deuxième est constituée par une bi-couche de méta-matériau à ($\epsilon < 0$ $\mu > 0$) et de méta-matériau à ($\epsilon > 0$ $\mu < 0$). Par des considérations analogues à celles que nous venons d'exposer pour les micro-cavités, les auteurs comparent ces micro-guides avec des structures ayant la même géométrie, mais réalisées uniquement avec des diélectriques : ils suggèrent que les premières peuvent guider des modes dont le nombre d'onde peut être supérieur au plus grand nombre d'onde associé, pour les guides uniquement diélectriques, à un mode propagatif.

1.6 L'importance d'un cadre mathématique

Les applications liées aux méta-matériaux, que ce soit en électronique, en optique ou en optronique, sont nombreuses et, par l'inventivité des chercheurs, elles ne cessent d'augmenter.

Un point commun à toutes ces applications est le rôle clef joué par l'intégration et l'interaction des méta-matériaux entre eux et/ou avec des matériaux classiques. Il est donc crucial de pouvoir calculer et simuler numériquement le comportement du champ électromagnétique à l'interface entre ces différents milieux.

Cela induit cependant quelques problèmes : les géométries complexes des

systèmes qui nécessitent une investigation ne facilitent pas la mise en oeuvre de techniques de calcul de type différences finies (le traitement des bords et la prise en compte des conditions aux limites et aux interfaces peuvent en effet se révéler extrêmement complexes). De plus, à cause du changement de signe des constantes électromagnétiques, les méthodes de discrétisation de type FDTD peuvent ne pas converger à cause d'instabilités numériques à l'interface séparant les deux milieux [42].

La complexité géométrique ainsi qu'une faible régularité des interfaces peuvent constituer une difficulté pour les techniques basées sur les équations intégrales (cf. § 1.9 et § 1.10.2). Il est de plus difficile de généraliser ces dernières lorsqu'on veut considérer plus de deux milieux en interaction. Enfin, à cause du changement de signe de la permittivité et/ou de la perméabilité aux interfaces, les formulations variationnelles couramment utilisées pour les discrétisations type éléments finis des équations de Maxwell ne rentrent pas dans la catégorie des problèmes coercifs, ni coercifs plus compacts.

Dans la suite de ce travail, notre attention portera sur les approches de type variationnel.

Nous allons consacrer la fin de ce chapitre à l'introduction des conventions (géométriques et autres) qui seront adoptées tout au long de ce manuscrit ainsi qu'à l'introduction d'un problème modèle faisant intervenir des difficultés de saut de signe des constantes électromagnétiques analogues à celles du problème de Maxwell.

1.7 Conventions géométriques et notations

Considérons un dispositif faisant intervenir des méta-matériaux et des matériaux classiques. Suivant les différents sauts de signe des paramètres électromagnétiques, nous pouvons être confrontés à différentes natures d'interface. Nous nous proposons d'élaborer un formalisme qui nous permette de traiter de façon générale toutes les typologies d'interface. Dans ce but nous considérons le domaine de propagation Ω ouvert borné de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne polyédrique et nous allons donner deux bipartitions (indépendantes entre elles) de ce domaine. L'une est basée sur le changement de signe de la constante diélectrique alors que l'autre est basée sur le changement de signe de la constante magnétique (cf. figure 1.6).

Nous appelons

- Ω_a la portion de Ω dans laquelle la permittivité ϵ est positive et Ω_b celle où elle est négative.
- Ω_1 la portion de Ω dans laquelle la perméabilité μ est positive et Ω_2 celle où elle est négative.

Nous supposons ces quatre sous-domaines simplement connexes¹ et à bord lipschitzien polyédrique tels que

$$\begin{aligned}\overline{\Omega} &= \overline{\Omega_a} \cup \overline{\Omega_b}, & \Omega_a \cap \Omega_b &= \emptyset, \\ \overline{\Omega} &= \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}, & \Omega_1 \cap \Omega_2 &= \emptyset.\end{aligned}$$

Nous notons \mathbf{n}_i la normale unitaire sortante de Ω_i ($i = a, b, 1, 2$). Nous définissons les interfaces

$$\begin{aligned}\zeta &:= \partial\Omega_a \cap \partial\Omega_b, \\ \Sigma &:= \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2,\end{aligned}$$

et nous introduisons $\Gamma_i := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega$, que nous supposons connexes¹.

Dans la suite de ce manuscrit, pour toute quantité v définie sur Ω , nous

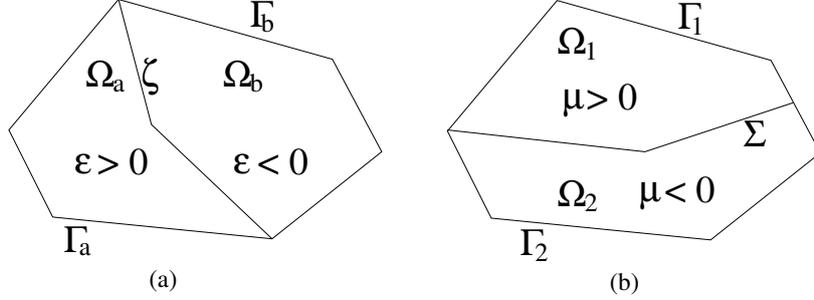


FIG. 1.6 – Décomposition du domaine Ω : (a), suivant le changement de signe de ϵ ; (b) suivant le changement de signe de μ .

adoptons les notations $v_i := v|_{\Omega_i}$ et

$$\begin{cases} \text{si } v_i > 0 \text{ presque partout sur } \Omega_i : v_i^{max} := \sup_{x \in \Omega_i} v_i(x), v_i^{min} := \inf_{x \in \Omega_i} v_i(x). \\ \text{si } v_i < 0 \text{ presque partout sur } \Omega_i : v_i^+ := \sup_{x \in \Omega_i} |v_i(x)|, v_i^- := \inf_{x \in \Omega_i} |v_i(x)|. \end{cases}$$

De plus, sauf mention du contraire, nous allons considérer des espaces fonctionnels constitués de fonctions à valeurs réelles. Nous notons respectivement $(\cdot, \cdot)_{j,i}$ et $\|\cdot\|_{j,i}$ le produit scalaire et la norme sur l'espace de Sobolev $H^j(\Omega_i)$.

Tout au long de ce travail nous allons considérer des constantes électromagnétiques telles que ϵ et μ , ainsi que ϵ^{-1} et μ^{-1} appartiennent à l'espace $L^\infty(\Omega)$.

Nous serons souvent amenés à considérer les restrictions à Ω_a ou Ω_b des éléments de $H_0^1(\Omega)$. Introduisons alors (pour $i = a, b$) l'espace

$$H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega_i) := \{p \in H^1(\Omega_i) ; p|_{\Gamma_i} = 0\},$$

muni de la norme $H^1(\Omega_i)$ usuelle. Par définition, $\forall v \in H^1(\Omega)$, nous avons $v_a|_\zeta = v_b|_\zeta$. La restriction au domaine Ω_i , de toute fonction de $H_0^1(\Omega)$ appartient à $H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega_i)$, de sorte que l'espace

$$\mathcal{K}_\zeta := \{(p, r) \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b) \text{ t.q. } p|_\zeta = r|_\zeta\}$$

est isomorphe à $H_0^1(\Omega)$.

Nous rappelons aussi que $H_{00}^{1/2}(\zeta)$ est l'ensemble des fonctions $H^{1/2}(\zeta)$ dont le prolongement par zéro à $\partial\Omega_i$ est continu dans $H^{1/2}(\partial\Omega_i)$. L'application trace de $H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ dans $H_{00}^{1/2}(\zeta)$ est surjective, linéaire et continue.

Pour conclure ce paragraphe, nous introduisons deux espaces fonctionnels

¹Les deux hypothèses Ω_i simplement connexe, Γ_i connexe ne sont pas nécessaires. Elles ont été introduites pour simplifier l'exposé et les démonstrations.

couramment employés (et adaptés) pour les problèmes électromagnétiques posés dans un ouvert borné \mathcal{O} : on définit

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\text{div}; \mathcal{O}) &:= \{ \mathbf{p} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ t.q. } \text{div } \mathbf{p} \in L^2(\mathcal{O}) \}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}) &:= \{ \mathbf{p} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ t.q. } \mathbf{rot } \mathbf{p} \in L^2(\mathcal{O}) \}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

En notant $\| \cdot \|_0$ la norme $L^2(\mathcal{O})$ et la norme $\mathbf{L}^2(\mathcal{O})$, la norme sur $\mathbf{H}(op; \mathcal{O})$ (pour $op \in \{ \mathbf{rot}, \text{div} \}$) est définie par

$$\| \cdot \|_{\mathbf{H}(op; \mathcal{O})} := \left(\| \cdot \|_0^2 + \| op(\cdot) \|_0^2 \right)^{1/2}.$$

1.8 Un problème modèle

Comme nous l'avons anticipé au § 1.6 (et comme nous le verrons plus en détail au § 6.1), à cause du changement de signe des constantes électromagnétiques à l'interface entre méta-matériaux et milieux classiques, les formulations variationnelles usuelles des équations de Maxwell ne rentrent pas dans le formalisme des problèmes coercifs, ni coercifs plus compacts.

Avant de nous intéresser directement au système de Maxwell tridimensionnel, il nous a semblé opportun de mieux comprendre les problèmes de transmission non coercifs en traitant ce même système dans le cas statique ($\omega = 0$) et dans le cas harmonique bidimensionnel (i.e. le cas où le domaine Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , tel qu'il a été introduit au § 1.7. Nous renvoyons le lecteur au § A.A pour les définitions des opérateurs différentiels de \mathbb{R}^2 et pour l'établissement des équations de Maxwell bidimensionnelles). En effet, dans ces configurations (cf. § A.B), le champ électrique solution du système de Maxwell dérive d'un potentiel scalaire qui, à une permutation près des constantes électromagnétiques, vérifie un problème de la forme suivante : pour une donnée scalaire f de carré intégrable sur Ω et $\omega^2 \geq 0$, trouver $u \in H^1(\Omega)$

$$\text{div} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla u \right) + \omega^2 \mu u = f. \quad (1.24)$$

Dans le cas tridimensionnel statique, le potentiel est à trace nulle sur $\partial\Omega$. Dans une configuration bidimensionnelle, les polarisations du champ électrique parallèles dérivent d'un potentiel scalaire à dérivée normale nulle sur $\partial\Omega$, alors que la polarisation du champ transverse dérive d'un potentiel scalaire à trace nulle sur le bord.

Nous allons donc nous intéresser au problème (1.24) aussi bien à deux qu'à trois dimensions d'espace. Pour son étude nous choisissons, pour fixer les idées et sans perte de généralité, des conditions aux limites de Dirichlet homogènes : $u|_{\partial\Omega} = 0$. Dans toute la suite de ce travail, nous appellerons (1.24) le *problème modèle*.

La difficulté principale de (1.24) est constituée par la perte d'ellipticité de l'opérateur $\text{div}(\epsilon^{-1} \nabla \cdot)$, due au changement de signe de la constante diélectrique. Pour mieux la mettre en évidence considérons la formulation variationnelle naturelle du problème (1.24) :

trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla u, \nabla v \right)_0 - \omega^2 (\mu u, v)_0 = -(f, v)_0.$$

À cause du changement de signe de ϵ , la quantité $\left(\frac{1}{\epsilon} \nabla u, \nabla v \right)_0$ n'a pas de signe spécifique. Par conséquent, il n'est pas possible d'étudier cette formulation naturelle en appliquant directement le formalisme des problèmes coercifs plus compacts.

Une remarque simple qui permet d'illustrer de façon convaincante la difficulté liée au changement de signe de la constante diélectrique consiste à considérer la configuration où la constante diélectrique est telle que $\epsilon_a = -\epsilon_b$ et la géométrie est telle que les domaines Ω_a et Ω_b sont symétrique l'un par rapport à l'autre. Pour une donnée $\eta \in H_{00}^{1/2}(\zeta)$ considérons u_a solution du problème :

trouver $u_a \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a)$ t.q.

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{1}{\epsilon_a} u_a \right) = 0 \text{ dans } \Omega_a \\ u_a|_{\zeta} = \eta \end{cases} \quad (1.25)$$

Soit u_b la fonction symétrique de u_a ; par construction u_b est un élément de $H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b)$ et est tel que $\partial_{\mathbf{n}_b} u_b|_{\zeta} = \partial_{\mathbf{n}_a} u_a|_{\zeta}$, $u_b|_{\zeta} = \eta$ et $\operatorname{div} \left(\frac{1}{\epsilon_b} u_b \right) = 0$ dans Ω_b . Il est alors immédiat de constater que la fonction u telle que $u|_{\Omega_a} = u_a$ et $u|_{\Omega_b} = u_b$ appartient à $H_0^1(\Omega)$. De plus u appartient au noyau de l'opérateur $\operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla \cdot)$. En effet, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla u, \nabla v \right)_0 = \left(\frac{1}{\epsilon_a} \nabla u_a, \nabla v \right)_{0,a} + \left(\frac{1}{\epsilon_b} \nabla u_b, \nabla v \right)_{0,b} \\ &= \sum_{i=a,b} \left[- \left(\operatorname{div} \left(\frac{1}{\epsilon_i} \nabla u_i \right), v \right)_{0,i} + \left\langle \frac{1}{\epsilon_i} \partial_{\mathbf{n}_i} u_i, v \right\rangle_{\zeta} \right] \\ &= \left\langle \frac{1}{\epsilon_a} (\partial_{\mathbf{n}_a} u_a - \partial_{\mathbf{n}_b} u_b), v \right\rangle_{\zeta} = 0 \end{aligned}$$

Dans cette configuration particulière, le noyau de l'opérateur $\operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla \cdot)$ est donc de dimension infinie et, par conséquent, il ne peut pas s'agir d'un opérateur à résolvante compacte.

1.9 Le problème modèle ou le problème de transmission non coercif

Dans la littérature il est possible de trouver de nombreux résultats concernant des problèmes fortement liés à (1.24), comme par exemple le problème de transmission non coercif pour l'opérateur d'Helmholtz :

étant donné $\kappa_\epsilon, k_a, k_b \in \mathbb{R}$, $g \in (H_{00}^{1/2}(\zeta))'$, trouver $(u_a, u_b) \in H^1(\Omega_a) \times H^1(\Omega_b)$ t.q.

$$\begin{cases} (\Delta + k_a^2)u_a = 0 \text{ dans } \Omega_a \\ (\Delta + k_b^2)u_b = 0 \text{ dans } \Omega_b \\ u_a|_\zeta = u_b|_\zeta \\ (\partial_{\mathbf{n}_a} u_b - \kappa_\epsilon \partial_{\mathbf{n}_a} u_a) \Big|_\zeta = g \\ u_a|_{\Gamma_a} = 0, \quad u_b|_{\Gamma_b} = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

La nature du problème (1.26) est très différente selon que la valeur du paramètre κ_ϵ est positive ou négative : lorsque κ_ϵ est positif, la condition de raccord de la trace normale est une condition de transmission usuelle et le problème (1.26) admet une formulation variationnelle bien posée au sens de Fredholm. Pour κ_ϵ négatif, la formulation variationnelle de (1.26) n'est plus coercive.

Nous souhaitons mettre en évidence les liens entre le problème de transmission (1.26) et le problème modèle (1.24). Pour cela, commençons par expliciter ce dernier sur les deux sous-domaines Ω_a et Ω_b : d'après (1.24) u est telle que $\operatorname{div}(\epsilon^{-1}\nabla u)$ est de carré intégrable dans Ω . Par conséquent, $(\epsilon^{-1}\nabla u)$ appartient à l'espace fonctionnel $\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega)$. Il est alors aisé de montrer (cf. § 1.7 et § 3.1) que le problème (1.24) est équivalent à : pour une donnée $f \in L^2(\Omega)$, trouver $(u_a, u_b) \in H^1(\Omega_a) \times H^1(\Omega_b)$ t.q.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\epsilon_a} \nabla u_a \right) + \omega^2 \mu_a u_a = f_a \\ \operatorname{div} \left(\frac{1}{\epsilon_b} \nabla u_b \right) + \omega^2 \mu_b u_b = f_b \\ \left(\frac{1}{\epsilon_a} \partial_{\mathbf{n}_a} u_a - \frac{1}{\epsilon_b} \partial_{\mathbf{n}_a} u_b \right) \Big|_\zeta = 0 \\ u_a|_\zeta = u_b|_\zeta \\ u_a|_{\Gamma_a} = 0, \quad u_b|_{\Gamma_b} = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

Dans le cas où la constante diélectrique ϵ est constante par morceaux et telle que $\epsilon_a \in \mathbb{R}_*^+$ et $\epsilon_b \in \mathbb{R}_*^-$, nous pouvons réécrire (1.27) sous la forme

$$\begin{cases} (\Delta u_a + \omega^2 \mu_a \epsilon_a) u_a = f_a \\ (\Delta u_b + \omega^2 \mu_b \epsilon_b) u_b = f_b \\ \left(\partial_{\mathbf{n}_a} u_b - \frac{\epsilon_b}{\epsilon_a} \partial_{\mathbf{n}_a} u_a \right) \Big|_\zeta = 0 \\ u_a|_\zeta = u_b|_\zeta \\ u_a|_{\Gamma_a} = 0, \quad u_b|_{\Gamma_b} = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

En observant ce dernier problème, nous pouvons déjà constater les analogies entre le problème modèle et (1.26) : pour $\kappa_\epsilon = \epsilon_b/\epsilon_a$, la troisième équation de (1.28) est une condition de transmission non coercive et homogène de même nature que la troisième équation de (1.26).

Afin de mieux expliciter toutes les analogies entre le problème modèle et le problème de transmission non coercif, nous allons ramener la donnée volumique f à une donnée d'interface. Introduisons alors le problème (on

rappelle $i = a, b$:
trouver $\varphi_i \in H_0^1(\Omega_i)$ t.q.

$$\Delta\varphi_i + \omega^2\mu_i\epsilon_i\varphi_i = f_i. \quad (1.29)$$

Ce problème étant bien posé au sens de Fredholm², nous pouvons effectuer le changement de variable $\psi_i = u_i - \varphi_i$. La nouvelle inconnue ψ_i est un élément de $H^1(\Omega_i)$ et vérifie le système

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \omega^2\epsilon_a\mu_a)\psi_a = 0 \text{ dans } \Omega_a \\ (\Delta + \omega^2\epsilon_b\mu_b)\psi_b = 0 \text{ dans } \Omega_b \\ \psi_a|_\zeta = \psi_b|_\zeta \\ \left(\partial_{\mathbf{n}_a}\psi_b - \frac{\epsilon_b}{\epsilon_a}\partial_{\mathbf{n}_a}\psi_a|_\zeta \right) \Big|_\zeta = - \left[\partial_{\mathbf{n}_a}\varphi_b - \frac{\epsilon_b}{\epsilon_a}\partial_{\mathbf{n}_a}\varphi_a \right] \Big|_\zeta \\ \psi_a|_{\Gamma_a} = 0, \quad \psi_b|_{\Gamma_b} = 0 \end{array} \right. . \quad (1.30)$$

Nous constatons immédiatement que le problème (1.30) est identique au problème (1.26) pour $\kappa_\epsilon = \epsilon_b/\epsilon_a$, $k_a = \omega^2\epsilon_a\mu_a$, $k_b = \omega^2\mu_b\epsilon_b$ et $g = - \left[\partial_{\mathbf{n}_a}\varphi_b + \frac{|\epsilon_b|}{\epsilon_a}\partial_{\mathbf{n}_a}\varphi_a \right]$.

La valeur du rapport ϵ_b/ϵ_a étant négative, nous sommes dans le cas où le problème (1.26) n'admet pas une formulation variationnelle coercive. Au cours du paragraphe suivant nous allons alors rappeler quelques méthodes utilisées dans la littérature pour affronter l'étude du problème de transmission lorsque $\kappa_\epsilon < 0$.

1.10 Le problème de transmission dans la littérature

Le problème de transmission non coercif pour l'opérateur d'Helmholtz posé dans un domaine de propagation non borné a été particulièrement étudié dans la littérature.

Soit Ω_I un ouvert borné de \mathbb{R}^2 simplement connexe de frontière ζ et Ω_E le complémentaire de $\overline{\Omega_I}$ dans \mathbb{R}^2 . La normale sortante de Ω_i ($i = I, E$) sera notée \mathbf{n}_i . Dans le cas de ce domaine non borné le problème de transmission non coercif pour l'opérateur d'Helmholtz est constitué par les équations (1.26), complétées par la condition de Sommerfeld de rayonnement à l'infini : étant donné $\kappa_\epsilon, k_E, k_I \in \mathbb{R}$, $g \in H^{-1/2}(\zeta)$, trouver $(u_E, u_I) \in H_{loc}^1(\Omega_E) \times H^1(\Omega_I)$ t.q.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + k_E^2)u_E = 0 \text{ dans } \Omega_E \\ (\Delta + k_I^2)u_I = 0 \text{ dans } \Omega_I \\ u_E|_\zeta = u_I|_\zeta \\ (\partial_{\mathbf{n}_E}u_I - \kappa_\epsilon\partial_{\mathbf{n}_E}u_E) \Big|_\zeta = g \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\|x\|=R} |\partial_n u_E - ik_E u_E|^2 d\gamma = 0 \end{array} \right. . \quad (1.31)$$

²Dans le cas où $\omega^2\epsilon_i\mu_i$ est une valeur propre de l'opérateur $\Delta : H^2(\Omega_i) \cap H_0^1(\Omega_i) \rightarrow L^2(\Omega_i)$, l'approche que nous sommes en train de présenter n'est pas valable. Les liens entre (1.24) et (1.26) demeurent cependant identiques au cas où $\omega^2\epsilon_i\mu_i$ n'est pas valeur propre du laplacien

Tous les résultats d'existence et unicité que nous allons rappeler pour ce dernier problème, restent valables pour le problème (1.26) exprimé en domaine borné.

La technique utilisée dans la littérature pour l'étude de (1.31) consiste à se ramener à un problème uniquement posé sur l'interface ς pour ensuite utiliser des méthodes d'équations intégrales. Costabel et Stephan [21] ont établi que la résolution de (1.31) est équivalente à la solution d'un système de deux équations intégrales qui constituent, si $\kappa_\epsilon \neq -1$ et la frontière ς est régulière, un système de Fredholm de deuxième espèce. Ce résultat peut être généralisé au cas d'une frontière polygonale pour des κ_ϵ complexes à partie imaginaire non nulle et vérifiant $\Re(1 - \kappa_\epsilon) > 0$ et $\Re(1 - 1/\kappa_\epsilon) > 0$. Les mêmes auteurs dans [22] établissent des résultats analogues pour l'opérateur de Maxwell.

Le cas critique $\kappa_\epsilon = -1$ a été étudié dans [34], toujours à l'aide d'équations intégrales : il a été démontré qu'en correspondance de cette valeur critique le problème (1.31) est mal posé.

Dans les deux paragraphes suivants, nous allons éclairer ces résultats et les compléter en reprenant systématiquement l'exposé que Ramdani fournit dans [37] pour le traitement du problème de transmission en domaine non borné.

1.10.1 Le cas d'un grand contraste

Étant donnée une trace $\varphi \in H^{1/2}(\varsigma)$, Ramdani construit les solutions u_i des problèmes de Dirichlet (P_i) (on rappelle $i = E, I$) :

$$(P_i) \begin{cases} \Delta u_i + k_i^2 u_i = 0, & \text{dans } \Omega_i \\ u_i|_\varsigma = \varphi \end{cases} .$$

Si les k_i ne sont pas des fréquences propres de l'opérateur $\Delta : H^2(\Omega_i) \cap H_0^1(\Omega_i) \rightarrow L^2(\Omega_i)$, les problèmes (P_i) sont bien posés et leurs solutions sont continuellement dépendantes des données. Cela permet de définir les opérateurs *Dirichlet-to-Neumann* T_i , qui sont des isomorphismes de $H^{1/2}(\varsigma)$ sur $H^{-1/2}(\varsigma)$ et dont l'action est décrite par $T_i \varphi = \partial_{\mathbf{n}_i} u_i$.

La résolution du problème (1.31) est alors équivalente à la résolution de l'équation $(T_I + \kappa_\epsilon T_E) \varphi = g$.

Dans le cas où $0 < |\kappa_\epsilon| < \frac{1}{\|T_I^{-1}\| \|T_E\|}$ ou dans le cas où $|\kappa_\epsilon| > \|T_E^{-1}\| \|T_I\|$

l'opérateur $(T_I + \kappa_\epsilon T_E)$ définit un isomorphisme de $H^{1/2}(\varsigma)$ sur $H^{-1/2}(\varsigma)$, ce qui permet de conclure immédiatement sur l'existence et unicité d'une solution pour (1.31). Nous portons l'attention du lecteur sur le fait que ce résultat ne fait intervenir aucune hypothèse quant à la régularité de l'interface.

1.10.2 Traitement d'une interface régulière

Dans le cas d'une interface régulière, en utilisant une représentation intégrale de la solution par potentiel simple couche, on retrouve les résultats de

[21]. L'idée à la base de cette approche est d'exprimer l'opérateur $(T_I + \kappa_\epsilon T_E)$ en fonction des deux nouveaux opérateurs A et C définis respectivement par

$$\begin{cases} A = T_I - T_E \\ C = T_I + T_E \end{cases} .$$

Ainsi, par construction, $(T_I + \kappa_\epsilon T_E) = (1/2)[(1 - \kappa_\epsilon)A + (1 + \kappa_\epsilon)C]$.

L'opérateur A est un isomorphisme de $H^{1/2}(\zeta)$ sur $H^{-1/2}(\zeta)$. En utilisant des résultats de théorie du potentiel l'auteur démontre que, dans le cas d'une frontière ζ régulière, l'opérateur C est compact de $H^{1/2}(\zeta)$ dans $H^{-1/2}(\zeta)$. La compacité de l'opérateur C dépendant directement de la régularité de l'interface, cette dernière propriété est nécessaire pour la validité de l'approche qui est ici exposée.

L'auteur démontre alors que l'opérateur $(T_I + \kappa_\epsilon T_E)$ est un isomorphisme de $H^{1/2}(\zeta)$ sur $H^{-1/2}(\zeta)$, excepté pour une famille au plus dénombrable de valeurs de κ_ϵ , dont le seul point d'accumulation possible est -1 . De plus, si $\kappa_\epsilon = -1$, l'opérateur $(T_I + \kappa_\epsilon T_E)$ est compact et par conséquent non inversible.

1.10.3 Une interface à coin

L'effet d'une singularité géométrique de l'interface (i.e. une interface présentant un coin) a été étudié de façon plus précise dans [7]. Les auteurs s'intéressent au problème de transmission non coercif exprimé en domaine borné et fermé par des conditions aux bords de Dirichlet homogènes. Ils considèrent de plus une interface présentant un seul coin d'angle θ et établissent précisément quels sont les intervalles de valeur du contraste pour lequel le problème est bien posé : grâce à une étude des singularités par transformée de Mellin, ils ont prouvé que l'opérateur associé au problème de transmission non coercif est autoadjoint à résolvante compacte si $\kappa_\epsilon < \vartheta(\theta)$ ou $\kappa_\epsilon > 1/\vartheta(\theta)$, avec $\vartheta(\theta) := 1 - 2\pi/\theta$. Ces deux dernières conditions sont nécessaires et suffisantes.

1.11 Exemples d'autres problèmes liés au problème modèle

Au cours de ce paragraphe nous allons introduire deux autres problèmes qui ont été étudiés au sein de la littérature et qui présentent des fortes analogies avec le problème modèle : il s'agit du problème de Cauchy pour l'opérateur d'Helmholtz et du problème de transmission interne auquel Ca-koni, Colton et Haddar ont été amenés à s'intéresser lors de leurs travaux sur la *linear sampling method* [13].

Considérons O un ouvert borné à bord ∂O lipschitzien. Soit γ une partie connexe du bord et $\gamma' = \partial O \setminus \gamma$. Nous allons poser le problème de Cauchy dans le domaine O :

étant données $g \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$, $h \in (H_{00}^{1/2}(\gamma))'$, trouver $u \in H^1(O)$ solution de

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 \text{ dans } O \\ u_a|_{\gamma'} = g \\ \partial_{\mathbf{n}} u_a|_{\gamma'} = h \end{cases} . \quad (1.32)$$

La difficulté consiste dans le fait que sur γ' on dispose des deux conditions alors qu'il y en a aucune portant sur γ . Il est connu que le problème (1.32) est mal posé. Une technique pour chercher à le résoudre consiste à dédoubler l'inconnue u en introduisant une inconnue auxiliaire \hat{u} : l'idée est que chacune de ces deux inconnues ne doit vérifier qu'une condition aux bords à la fois. Le manque de conditions sur γ est compensé par l'introduction des conditions

$$u|_{\gamma} = \hat{u}|_{\gamma}, \quad \partial_{\mathbf{n}} u|_{\gamma} = \partial_{\mathbf{n}} \hat{u}|_{\gamma}.$$

Considérons alors le problème suivant :

étant donnés $g \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$, $h \in (H_{00}^{1/2}(\gamma))'$, trouver $u, \hat{u} \in \{H^1(O)\}^2$ solution de

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0 \text{ dans } O \\ \Delta \hat{u} + \omega^2 \hat{u} = 0 \text{ dans } O \\ u|_{\gamma'} = g \\ (\partial_{\mathbf{n}} \hat{u})|_{\gamma'} = h \\ (u - \hat{u})|_{\gamma} = 0 \\ \partial_{\mathbf{n}} u - \partial_{\mathbf{n}} \hat{u}|_{\gamma} = 0 \end{cases} . \quad (1.33)$$

Par application à $(u - \hat{u})$ du principe du prolongement unique, si (1.33) admet une solution, celle-ci serait telle que $u = \hat{u}$ dans O et, par conséquent, elle serait aussi solution de (1.32).

Considérons alors le cas particulier où γ est contenue dans un hyperplan

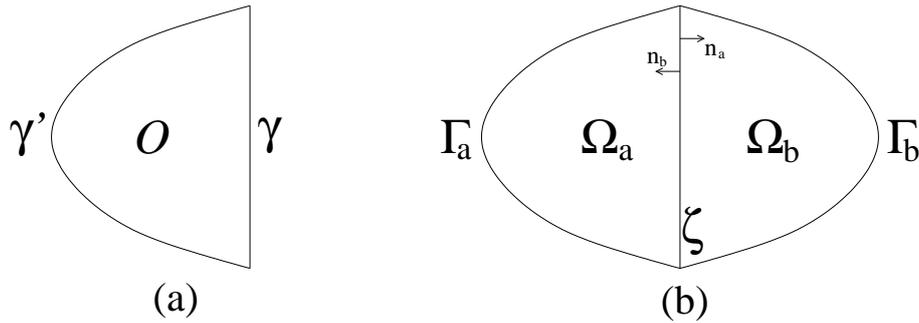


FIG. 1.7 – Pour le domaine O représenté en (a), la portion du bord appelée γ appartient à une droite. Ce domaine peut alors être symétrisé comme il est représenté en (b).

de sorte que le domaine O peut être symétrisé par rapport à γ (cf. fig. 1.7). Pour reprendre les notations introduites au § 1.7, nous identifions Ω_a à O , l'interface ζ à γ , Γ_a à γ' et le champ u_a à u . Le domaine Ω_b est par conséquent le symétrique de Ω_a par rapport à ζ . Notons alors u_b et h_b les symétriques des champs \hat{u} et h .

Le problème (1.33) peut donc être “symétrisé ” et reformulé de façon équivalente comme il suit :

étant donnés $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_a)$, $h_b \in (H_{00}^{1/2}(\Gamma_b))'$, trouver $(u_a, u_b) \in H^1(\Omega_a) \times H^1(\Omega_b)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_a + \omega^2 u_a = 0 \text{ dans } \Omega_a \\ \Delta u_b + \omega^2 u_b = 0 \text{ dans } \Omega_b \\ u_a|_{\Gamma_a} = g \\ \partial_{\mathbf{n}} u_b|_{\Gamma_b} = h_b \\ (u_a - u_b)|_{\zeta} = 0 \\ (\partial_{\mathbf{n}_a} u_a|_{\zeta} - \partial_{\mathbf{n}_b} u_b)|_{\zeta} = 0 \end{array} \right. . \quad (1.34)$$

Comme $\mathbf{n}_a|_{\zeta} = -\mathbf{n}_b|_{\zeta}$, la cinquième équation de (1.34) peut être réécrite sous la forme $\partial_{\mathbf{n}_a} u_a + \partial_{\mathbf{n}_a} u_b|_{\zeta} = 0$. On reconnaît ainsi dans (1.34) le problème (1.28) avec $\epsilon_a = -\epsilon_b$, $\mu_a = \mu_b$, des données volumiques nulles, des conditions de Dirichlet non homogènes pour u_a et des conditions de Neumann non homogènes pour u_b .

Le problème (1.34) peut donc être interprété comme un problème de transmission non coercif pour l'opérateur d'Helmholtz, caractérisé par une valeur du contraste $\kappa_{\epsilon} = -1$. Ainsi, en accord avec les résultats que nous avons rappelés au § 1.10, nous retrouvons que le problème (1.32) est mal posé.

Comme nous l'avons rappelé, dans le cas d'une interface ζ régulière, le problème de transmission non coercif est bien posé dès que $|\kappa_{\epsilon}| > 1$; une solution qui est alors envisagée pour résoudre le problème de Cauchy consiste à perturber le problème (1.34) en remplaçant la condition sur la trace normale par $(\partial_{\mathbf{n}_a} u_a + (1 + \varepsilon)\partial_{\mathbf{n}_a} u_b)|_{\zeta} = 0$ et à faire tendre ε vers zéro.

Remarque 1.11.1 L'analogie entre le problème modèle et le problème de Cauchy persiste même si la configuration géométrique du domaine O est telle qu'il ne peut pas être symétrisé par rapport à γ . Nous avons choisie l'approche par symétrie car il permet de mettre en évidence simplement les analogies entre ces deux problèmes.

★

Intéressons nous à présent au problème de transmission interne étudié dans [13]. Dans sa forme la plus simple ce problème peut s'écrire sous la forme : étant donnés $\sigma \in \mathbb{R}_{\star}^{-}$, $g \in H^{1/2}(\partial O)$ et $h \in H^{-1/2}(\partial O)$, trouver $(u, \hat{u}) \in \{H^1(O)\}^2$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + \omega^2 u = 0 \text{ dans } O \\ \Delta \hat{u} + \omega^2 \hat{u} = 0 \text{ dans } O \\ (u - \hat{u})|_{\partial O} = g \\ (\partial_{\mathbf{n}} u - \sigma \partial_{\mathbf{n}} \hat{u})|_{\partial O} = h \end{array} \right. . \quad (1.35)$$

Il est immédiat de mettre en évidence les liens entre (1.24) et le problème modèle (1.35). En effet ce dernier est un problème de type Cauchy pour lequel

- la portion γ' du bord est réduite à un ensemble de mesure nulle et par conséquent $\gamma = \partial O$;

- la condition de raccord en valeur sur ∂O n'est pas homogène ;
- la condition de raccord en trace normale n'est pas homogène et fait intervenir un paramètre σ négatif.

Nous reconnaissons alors dans (1.35) un problème de transmission non coercif caractérisé par une valeur du contraste $\kappa_\epsilon = \sigma$. L'approche variationnelle qui a été proposé par Cakoni, Colton et Haddar pour résoudre le problème (1.35) a inspiré le traitement du problème modèle que nous exposerons au cours du chapitre 3.

1.12 Bilan et motivations pour une approche variationnelle

Rappelons les résultats saillants, exposés tout au long de ce chapitre, concernant le problème modèle (1.24) pour $\epsilon_a \in \mathbb{R}_*^+$ et $\epsilon_b \in \mathbb{R}_*^-$:

- Lorsque le contraste $\kappa_\epsilon = -1$, le problème est mal posé dans $H^1(\Omega)$.
- Pour une interface régulière, dès que $\kappa_\epsilon \neq -1$, le problème est bien posé au sens de Fredholm.
- Pour une interface quelconque, le problème est bien posé au sens de Fredholm si la valeur absolue du contraste κ_ϵ est suffisamment grande ou suffisamment petite. Dans le cas d'une interface présentant un coin d'angle θ , le contraste doit être plus petit que $\vartheta(\theta)$ et plus grand que $1/\vartheta(\theta)$, avec $\vartheta(\theta) := 1 - 2\pi/\theta$.

Bien que les techniques d'équations intégrale se soient révélées très utiles pour l'étude du problème modèle, nous proposons dans ce travail un traitement basé sur des approches variationnelles : les méthodes variationnelles nous permettent de traiter simplement et avec beaucoup de généralité des constantes électromagnétiques variables, ainsi que des interfaces lipschitziennes entre les différents milieux. De plus leur discrétisation numérique par des méthodes d'éléments finis est directe.

Nous expliciterons dans un premier temps les étapes qui nous permettront, en contournant les problématiques liées au changement de signe de ϵ et/ou μ , de poser le problème modèle dans un cadre mathématiquement bien posé. Dans un deuxième temps, nous étendrons ces approches au problème de Maxwell tridimensionnel.

Formulation Naturelle pour le problème scalaire

2.1 Introduction

Dans la suite, afin de rendre l'exposé plus lisible, nous adoptons les notations $\alpha = \epsilon^{-1}$ et $\beta = \omega^2 \mu$.

Nous rappelons que ϵ_a est strictement positive alors que ϵ_b est strictement négative. Comme nous avons déjà pu le voir au § 1.8, les difficultés liées à ce changement de signe de la constante diélectrique peuvent être mises en évidence très facilement en considérant la formulation variationnelle naturelle associée au problème (1.24) :

trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad {}_1A(u, v) = {}_1L(v), \quad (2.1)$$

où ${}_1A(u, v) = {}_1B(u, v) + {}_1C(u, v)$ et

$$\begin{aligned} {}_1B(u, v) &:= (\alpha \nabla u, \nabla v)_0, \\ {}_1C(u, v) &:= -(\beta u, v)_0, \\ {}_1L(v) &:= -(f, v)_0. \end{aligned}$$

La quantité

$${}_1B(u, v) = (\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} - (|\alpha_b| \nabla u_b, \nabla v_b)_{0,b}$$

n'a pas de signe spécifique et par conséquent il n'est pas possible d'appliquer directement à (2.1) le formalisme propre aux problèmes de type elliptique. Le but de ce chapitre est de développer une approche qui nous permettra de situer (sous certaines conditions explicitées plus loin) la formulation variationnelle naturelle dans un cadre mathématiquement bien posé.

Pour énoncer (et prouver) certains des résultats de ce chapitre, nous sommes amenés à définir, pour $q \geq 1/2$, l'espace fonctionnel

$$H_{00}^q(\zeta) := \{p \in H^q(\zeta) \text{ t.q. } {}^i\tilde{p} \in H^q(\partial\Omega_i), i = a, b\}$$

où ${}^i\tilde{p}$ est le prolongement par zéro de p à l'intégralité du bord $\partial\Omega_i$. Pour mesurer les éléments de $H_{00}^q(\zeta)$ nous pourrions utiliser la norme

$${}_i\|p\|_{H_{00}^q(\zeta)} := \|{}^i\tilde{p}\|_{H^q(\partial\Omega_i)}, \text{ avec } \|{}^i\tilde{p}\|_{H^q(\partial\Omega_i)} := \inf_{\substack{v \in H^{q+1/2}(\Omega_i) \\ v|_{\partial\Omega_i} = {}^i\tilde{p}}} \|v\|_{H^{q+1/2}(\Omega_i)}.$$

2.2 Quelques résultats préliminaires

Au sein de ce paragraphe nous présentons quelques résultats généraux qui s'avéreront très utiles pour l'étude de la formulation naturelle (2.1) : il s'agit d'étendre le lemme de Lax-Milgram et l'alternative de Fredholm à une certaine catégorie de problèmes souffrant d'un manque de coercivité. Ces deux extensions font respectivement l'objet de la proposition 2.2.1 et de la proposition 2.2.2.

En ce qui concerne la discrétisation par éléments finis de ce type de problèmes, le manque de coercivité ne nous permet pas d'appliquer le lemme de Céa. Pour contourner cette difficulté nous énoncerons le théorème de Strang (proposition 2.2.3). Ce dernier théorème, en se substituant au lemme de Céa, permet en effet d'obtenir les estimations usuelles pour les erreurs liées à l'approximation par éléments finis.

Soit V un espace de Hilbert et \mathbb{T} un opérateur linéaire continu et bijectif de V dans V . On définit la norme de cet opérateur par

$$\|\mathbb{T}\| := \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|\mathbb{T}v\|_V}{\|v\|_V}.$$

Nous dirons qu'une forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ est \mathbb{T} -coercive sur V^2 s'il existe une constante γ réelle strictement positive telle que

$$\forall v \in V, \quad |b(v, \mathbb{T}v)| \geq \gamma \|v\|_V^2.$$

Remarque 2.2.1 Soit $b(\cdot, \cdot)$ une forme continue sur $V \times V$. L'injectivité de \mathbb{T} est une condition nécessaire (mais non suffisante) à la \mathbb{T} -coercivité de $b(\cdot, \cdot)$. En effet, si \mathbb{T} n'était pas injective, il existerait $v \in V$ non nul tel que $\mathbb{T}v = 0$. Par la continuité de la forme $b(\cdot, \cdot)$ nous aurions

$$|b(v, \mathbb{T}v)| \leq C \|v\|_V \|\mathbb{T}v\|_V \implies b(v, \mathbb{T}v) = 0 \leq \|v\|_V,$$

ce qui n'est pas compatible avec la \mathbb{T} -coercivité de $b(\cdot, \cdot)$.

★

Proposition 2.2.1 Soit $l(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V . Si la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ est \mathbb{T} -coercive sur V^2 et continue sur $V \times V$, alors le problème :

trouver $u \in V$ t.q.

$$\forall v \in V, \quad b(u, v) = l(v), \tag{2.2}$$

admet une unique solution $u \in V$.

Preuve : Par application du théorème de représentation de Riesz, il existe $f \in V$ t.q. pour tout $v \in V$ on ait $l(v) = (f, v)_V$. Soit alors B l'opérateur linéaire de V dans V associé à $b(\cdot, \cdot)$ et tel que $b(u, v) = (Bu, v)_V$ pour tout $u, v \in V$.

Le problème (2.2) peut alors s'écrire :

trouver $u \in V$ t.q. $Bu = f$.

Pour terminer la preuve il suffit de montrer que B est bijectif.

L'injectivité de B découle de la propriété de \mathbb{T} -coercivité et de la continuité de l'opérateur \mathbb{T} : en effet, $Bu = 0$ entraîne $(Bu, \mathbb{T}u)_V = 0$, d'où $u = 0$ d'après la \mathbb{T} -coercivité.

Par ailleurs, pour $u \neq 0$

$$\|Bu\|_V = \sup_{v \in V, v \neq 0} \left(\frac{|(Bu, v)_V|}{\|v\|_V} \right) \geq \frac{|b(u, \mathbb{T}u)|}{\|\mathbb{T}u\|_V} \geq \gamma \frac{\|u\|_V^2}{\|\mathbb{T}u\|_V}.$$

Utilisons à présent la continuité de \mathbb{T} :

$$\|\mathbb{T}u\|_V \leq \|\mathbb{T}\| \|u\|_V \implies \frac{1}{\|\mathbb{T}u\|_V} \geq \frac{1}{\|\mathbb{T}\| \|u\|_V},$$

d'où

$$\|Bu\|_V \geq \frac{\gamma}{\|\mathbb{T}\|} \|u\|_V, \quad \forall u \in V. \quad (2.3)$$

Pour établir la surjectivité de B , considérons son image $R(B)$. Cette dernière est un sous-espace fermé de V : si Bu_n est une suite de Cauchy dans V , alors d'après (2.3), u_n est de Cauchy et converge dans V vers un élément u . Par continuité de B , la suite Bu_n converge vers Bu . La limite de la suite Bu_n appartient donc à $R(B)$.

De plus $R(B)$ est dense dans V : en effet, considérons $w \in V$ tel que $w \in R(B)^\perp$. L'opérateur \mathbb{T} étant surjectif, il existe $v \in V$ tel que $w = \mathbb{T}v$ et

$$0 = (Bv, w)_V = (Bv, \mathbb{T}v)_V = b(v, \mathbb{T}v) \geq \gamma \|v\|_V^2.$$

Il en résulte $v = 0$ et, par linéarité de \mathbb{T} , $w = 0$.

□

Proposition 2.2.2 Soit $l(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V et soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ qui peut être écrite sous la forme $a(\cdot, \cdot) = b(\cdot, \cdot) + c(\cdot, \cdot)$, les deux formes $b(\cdot, \cdot)$ et $c(\cdot, \cdot)$ étant aussi bilinéaires continues sur $V \times V$.

Si l'opérateur C associé à la forme $c(\cdot, \cdot)$ par le théorème de représentation de Riesz est compact sur V et s'il existe un opérateur \mathbb{T} linéaire continu et bijectif de V dans V tel que $b(\cdot, \cdot)$ est \mathbb{T} -coercive sur V , alors le problème suivant :

trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = l(v) \quad (2.4)$$

est bien posé au sens de Fredholm.

Preuve : L'opérateur \mathbb{T} étant bijectif, le problème (2.4) est équivalent à : trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad b(u, \mathbb{T}v) + c(u, \mathbb{T}v) = l(\mathbb{T}v). \quad (2.5)$$

D'après la proposition 2.2.1, l'opérateur B associé à la forme $b(\cdot, \cdot)$ est inversible. L'opérateur C étant compact et l'opérateur \mathbb{T} étant continu, $c(u, \mathbb{T}v)$

est une perturbation compacte de $b(u, \mathbb{T}v)$. Le problème (2.5) est donc bien posé au sens de Fredholm. \square

Les propositions 2.2.3 et 2.2.4, que nous allons exposer dans la suite immédiate, constituent des outils précieux pour l'étude de la discrétisation par éléments finis des problèmes de type \mathbb{T} -coercif plus compact.

Proposition 2.2.3 (Lemme de Strang) Soit V^h un sous-espace de V de dimension finie et soit $u^h \in V^h$ une solution approchée du problème (2.4). Si la forme $a(\cdot, \cdot)$ est stable, i.e. s'il existe une constante $\sigma > 0$ indépendante de h telle que

$$\sup_{w^h \in V^h} \frac{|a(v^h, w^h)|}{\|w^h\|_V} \geq \sigma \|v^h\|_V, \quad \forall v^h \in V^h,$$

alors il existe une constante C indépendante de h et telle que

$$\|u - u^h\|_V \leq C \inf_{v^h \in V^h} \|u - v^h\|_V. \quad (2.6)$$

Preuve : Rappelons tout d'abord que u^h est telle que

$$\forall v^h \in V^h, \quad a(u^h, v^h) = l(v^h).$$

D'autre part $\|u - u^h\|_V \leq \|u - v^h\|_V + \|v^h - u^h\|_V$ et par conséquent

$$\|u - u^h\|_V \leq \inf_{v^h \in V^h} \left(\|u - v^h\|_V + \|v^h - u^h\|_V \right). \quad (2.7)$$

Notons que $a(u^h, w^h) = l(w^h) = a(u, w^h)$. D'après la stabilité de la forme $a(\cdot, \cdot)$, nous avons

$$\sigma \|v^h - u^h\|_V \leq \sup_{w^h \in V^h} \frac{|a(v^h - u^h, w^h)|}{\|w^h\|_V} = \sup_{w^h \in V^h} \frac{|a(v^h - u, w^h)|}{\|w^h\|_V}.$$

La continuité de la forme $a(\cdot, \cdot)$ nous permet alors de conclure : il existe en effet $C' \in \mathbb{R}_*^+$ t.q.

$$|a(u - v^h, w^h)| \leq C' \|u - v^h\|_V \|w^h\|_V,$$

par conséquent $\|v^h - u^h\|_V \leq \frac{C'}{\sigma} \|u - v^h\|_V$. En partant de (2.7) nous obtenons donc

$$\|u - u^h\|_V \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\sigma} \right) \inf_{v^h \in V^h} \|u - v^h\|_V.$$

\square

La proposition suivante constitue un outil pratique nous permettant, sous certaines conditions, d'établir simplement la stabilité d'une forme bilinéaire.

Proposition 2.2.4 Si V^h est une famille de sous-espaces de V , de dimension finie, telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v^h \in V^h} \|v - v^h\|_V = 0, \quad \forall v \in V$$

et si

- \mathbb{T}^h est un opérateur linéaire, uniformément continu de V^h dans V^h (muni de la norme $\|\cdot\|_V$) tel que, pour tout h , il existe une constante c indépendante de h pour laquelle

$$\|\mathbb{T}^h\| := \sup_{v^h \in V^h} \frac{\|\mathbb{T}^h v^h\|_V}{\|v^h\|_V} < c,$$

- A est un automorphisme de V de la forme $A = B + C$, où C est compact et B est \mathbb{T}^h -coercif sur $\{V^h\}^2$ tel que la constante de coercivité ne dépend pas de h ,

alors la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ telle que $a(u, v) = (Au, v)_V$, pour tout $u, v \in V$, est stable.

Preuve : Nous allons procéder par l'absurde pour montrer qu'il existe une constante $\sigma > 0$ indépendante de h telle que

$$\sup_{w^h \in V^h} \frac{|a(v^h, w^h)|}{\|w^h\|_V} \geq \sigma \|v^h\|_V, \quad \forall v^h \in V^h.$$

Supposons qu'il existe une suite de sous-espaces $V^{\tilde{h}}$, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}(n) = 0$, et une suite de fonctions $v^{\tilde{h}} \in V^{\tilde{h}}$ t.q.

- (i) $\|v^{\tilde{h}}\|_V = 1$
- (ii) $\sup_{s^{\tilde{h}} \in V^{\tilde{h}}} \frac{|a(v^{\tilde{h}}, s^{\tilde{h}})|}{\|s^{\tilde{h}}\|_V} < \frac{1}{n}$.

Soit $w \in V$ non-nul donné. Pour tout $w^{\tilde{h}} \in V^{\tilde{h}}$ nous avons

$$\begin{aligned} |a(v^{\tilde{h}}, w)| &= |a(v^{\tilde{h}}, w - w^{\tilde{h}}) + a(v^{\tilde{h}}, w^{\tilde{h}})| \\ &\leq |a(v^{\tilde{h}}, w - w^{\tilde{h}})| + |a(v^{\tilde{h}}, w^{\tilde{h}})| \\ &\leq (\|w - w^{\tilde{h}}\|_V + \|w^{\tilde{h}}\|_V) \sup_{s^{\tilde{h}} \in V^{\tilde{h}}} \frac{|a(v^{\tilde{h}}, s^{\tilde{h}})|}{\|s^{\tilde{h}}\|_V}. \end{aligned}$$

Choisissons $\varepsilon > 0$. D'une part, d'après la première hypothèse de l'énoncé, à partir d'un certain n_0 on a la majoration

$$\inf_{w^{\tilde{h}} \in V^{\tilde{h}}} \|w - w^{\tilde{h}}\|_V < \varepsilon.$$

Pour chaque $n \geq n_0$, il existe $w^{\tilde{h}} \in V^{\tilde{h}}$ réalisant cette inégalité. En particulier

$$\|w^{\tilde{h}}\|_V < \varepsilon + \|w\|_V.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse (ii), il suffit que n soit suffisamment grand pour que

$$\sup_{s^{\tilde{h}} \in V^{\tilde{h}}} \frac{|a(v^{\tilde{h}}, s^{\tilde{h}})|}{\|s^{\tilde{h}}\|_V} < \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout $w \in V$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, on a $|a(v^{\tilde{h}}, w)| < 2\varepsilon^2 + \varepsilon\|w\|_V$. Cela étant vrai pour tout élément w de V , $Av^{\tilde{h}}$ converge faiblement vers 0 dans V . Par continuité de A^{-1} on déduit que $v^{\tilde{h}} \rightharpoonup 0$ et, par la compacité de C , $Cv^{\tilde{h}}$ converge fortement vers 0.

Pour conclure nous allons montrer que v^h converge fortement vers 0, ce qui contredit (i). Nous avons en effet

$$(Bv^h, \mathbb{T}^h v^h)_V = a(v^h, \mathbb{T}^h v^h) - (Cv^h, \mathbb{T}^h v^h);$$

d'après l'hypothèse (ii) et la \mathbb{T}^h -coercivité de \mathbb{B} (on rappelle que la constante de coercivité γ ne dépend pas de h) nous obtenons

$$\gamma \|v^h\|_V^2 \leq |(Bv^h, \mathbb{T}^h v^h)_V| \leq \frac{\|\mathbb{T}^h\|}{n} \|v^h\|_V + \|Cv^h\|_V \|\mathbb{T}^h v^h\|_V.$$

À partir de cette dernière inégalité nous déduisons aisément que

$$\gamma \|v^h\|_V \leq \frac{\|\mathbb{T}^h\|}{n} + \|Cv^h\|_V \|\mathbb{T}^h\|,$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse (i). □

2.3 Caractère bien posé de la formulation naturelle

Afin d'étudier la formulation variationnelle naturelle (2.1) en exploitant les outils que nous venons d'exposer au paragraphe précédent, nous allons construire un opérateur \mathbb{T}_λ tel que la forme ${}_1B$ soit \mathbb{T}_λ -coercive sur $\{H_0^1(\Omega)\}^2$.

Dans ce but introduisons l'opérateur \mathcal{R} , qui à toute donnée $\varphi \in H_0^{1/2}(\zeta)$ associe la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_b \\ u|_\zeta = \varphi \\ u|_{\Gamma_b} = 0 \end{cases}. \quad (2.8)$$

Le problème (2.8) étant bien posé, \mathcal{R} est borné et continu de $H_0^{1/2}(\zeta)$ dans $H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b)$. (Nous renvoyons le lecteur au § A.D, où nous fournissons quelques éléments pour estimer la norme de l'opérateur \mathcal{R} .)

À l'aide de cet opérateur nous définissons $\mathbb{T}_\lambda : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) :$

$$\mathbb{T}_\lambda v = \begin{cases} v_a & \text{dans } \Omega_a \\ \lambda \mathcal{R}(v_a|_\zeta) + (1-\lambda)v_b & \text{dans } \Omega_b \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Nous remarquons en particulier que, par construction, $\mathcal{R}(v_a|_\zeta) \in H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b)$ et $\mathcal{R}(v_a|_\zeta) = v_b$ sur ζ . Il en résulte que $\mathbb{T}_\lambda v$ appartient à $H_0^1(\Omega)$, de plus, puisque l'application trace est linéaire continue de $H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a)$ dans $H_0^{1/2}(\zeta)$, l'opérateur \mathbb{T}_λ est, par construction, linéaire continu de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même.

Remarque 2.3.1 Si l'on revient au problème auquel nous nous intéressons, il pourrait sembler plus naturel de définir l'opérateur \mathcal{R} en remplaçant la première équation de (2.8) par

$$\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega_b.$$

En choisissant cette dernière équation, la régularité de la solution u dépend alors de celle de φ mais aussi de celle de α . L'avantage de (2.8) est que si $\varphi|_\zeta \in H_{00}^s(\zeta)$, $s \leq 1$, alors $u \in H^{s+1/2}(\Omega_b)$.

★

Proposition 2.3.1 L'opérateur \mathbb{T}_λ est bijectif pour $\lambda \neq 1$.

Preuve : Il est immédiat de vérifier l'injectivité de \mathbb{T}_λ pour $\lambda \neq 1$. Pour prouver la surjectivité nous allons montrer que pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\exists v \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $\mathbb{T}_\lambda v = \phi$. Pour que cette dernière égalité soit vérifiée, il suffit de prendre $v_a = \phi$ dans Ω_a et v_b tel que $(1 - \lambda)v_b + \lambda \mathcal{R}\phi = \phi$ dans Ω_b . En d'autres termes

$$v = (\mathbb{T}_\lambda)^{-1}\phi = \mathbb{T}_{\frac{\lambda}{\lambda-1}}\phi = \begin{cases} \phi_a \text{ dans } \Omega_a \\ \frac{\phi_b}{1-\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda-1}\mathcal{R}\phi_a|_\zeta \text{ dans } \Omega_b \end{cases} \quad \square$$

Avant d'aller plus loin, nous introduisons une notation supplémentaire dont nous nous servirons au cours de la proposition 2.3.2 : pour $i = a, b$ nous notons

$${}_1B_i(\cdot, \cdot) = (\alpha_i \nabla \cdot, \nabla \cdot)_{0,i}.$$

Nous avons vu au cours du chapitre précédent que, dans le cas où $\epsilon_a \in \mathbb{R}_*^+$ et $\epsilon_b \in \mathbb{R}_*^-$, le contraste κ_ϵ joue un rôle crucial dans la détermination du caractère bien posé du problème modèle scalaire (1.24). Nous introduisons une nouvelle grandeur qui peut être interprétée comme une généralisation du contraste κ_ϵ au cas où ϵ_a et ϵ_b ne sont plus des constantes :

$$K := \sup_{v \in H_0^1(\Omega), v_a \neq 0} \frac{|{}_1B_b(\mathcal{R}v, \mathcal{R}v)|}{{}_1B_a(v, v)}. \quad (2.9)$$

Proposition 2.3.2 Si $K < 1$ et si $\lambda \in]\lambda^-(K), \lambda^+(K)[$, où

$$\lambda^-(K) := \frac{2[1 - (1 - K)^{1/2}]}{K}, \quad \lambda^+(K) := \frac{2[1 + (1 - K)^{1/2}]}{K},$$

alors la forme ${}_1B$ est \mathbb{T}_λ coercive sur $\{H_0^1(\Omega)\}^2$.

Preuve : Commençons par évaluer ${}_1B(v, \mathbb{T}_\lambda v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$:

$${}_1B(v, \mathbb{T}_\lambda v) = {}_1B_a(v, v) + (1 - \lambda){}_1B_b(v, v) + \lambda {}_1B_b(v, \mathcal{R}v).$$

Il en découle naturellement la minoration

$$|{}_1B(v, \mathbb{T}_\lambda v)| \geq {}_1B_a(v, v) + (\lambda - 1)|{}_1B_b(v, v)| - \lambda |{}_1B_b(v, \mathcal{R}v)|. \quad (2.10)$$

Le terme $|{}_1B_b(v, \mathcal{R}v)|$ peut être majoré par application de l'inégalité de Young et en utilisant la définition (2.9) : pour $\eta \in \mathbb{R}_*^+$ nous avons

$$\begin{aligned} |{}_1B_b(v, \mathcal{R}v)| &\leq \frac{\eta}{2} |{}_1B_b(v, v)| + \frac{1}{2\eta} |{}_1B_b(\mathcal{R}v, \mathcal{R}v)| \\ &\leq \frac{\eta}{2} |{}_1B_b(v, v)| + \frac{K}{2\eta} |{}_1B_a(v, v)|. \end{aligned}$$

En combinant cette dernière relation avec (2.10), nous aboutissons à

$$|{}_1B_b(v, \mathbb{T}_\lambda v)| \geq \left(1 - \frac{\lambda K}{2\eta}\right) |{}_1B_a(v, v)| + \left(\lambda - 1 - \frac{\lambda\eta}{2}\right) |{}_1B_b(v, v)|. \quad (2.11)$$

Il est alors immédiat de constater que la forme ${}_1B$ est \mathbb{T}_λ -coercive si les deux conditions

$$1 - \frac{\lambda K}{2\eta} > 0 \Leftrightarrow \eta > \frac{\lambda K}{2}, \quad (2.12)$$

$$\lambda - 1 - \frac{\lambda\eta}{2} > 0 \quad (2.13)$$

sont satisfaites.

Pour un $\eta(K)$ convenable (dépendant ici de K) satisfaisant (2.12), la condition (2.13) est satisfaite si $\frac{\lambda^2 K}{4} - \lambda + 1 < 0$.

Il est aisé de vérifier que ceci est réalisé si et seulement si $K < 1$ et $\lambda \in]\lambda^-(K), \lambda^+(K)[$.

□

Corollaire 2.3.1 Dès lors que $K < 1$, la forme ${}_1B$ est \mathbb{T}_2 coercive sur $\{H_0^1(\Omega)\}^2$.

Preuve : Il suffit de remarquer que λ^+ est monotone décroissante sur $[0, 1[$ et $\lim_{K \rightarrow 1^-} \lambda^+(K) = 2^+$ alors que λ^- est monotone croissante sur le même intervalle et $\lim_{K \rightarrow 1^-} \lambda^-(K) = 2^-$.

◇

Théorème 2.3.1 Si $K < 1$ la formulation variationnelle naturelle (2.1) est bien posée au sens de Fredholm.

Preuve : La première étape consiste à montrer que l'opérateur ${}_1\mathcal{C}$ tel que

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad ({}_1\mathcal{C}u, v)_1 = {}_1C(u, v)$$

est un opérateur compact. Considérons alors u_n une suite bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a immédiatement

$$|({}_1\mathcal{C}u_n, v)_1| \leq \left(\sup_{x \in \Omega} |\beta|\right) \|u_n\|_0 \|v\|_0,$$

d'où il découle

$$\|{}_1\mathcal{C}u_n\|_1 = \sup_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{|({}_1\mathcal{C}u_n, v)_1|}{\|v\|_1} \leq \left(\sup_{x \in \Omega} |\beta|\right) \|u_n\|_0. \quad (2.14)$$

L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, nous pouvons extraire de u_n une sous-suite (toujours noté u_n) fortement convergente dans $L^2(\Omega)$. D'après (2.14), la sous-suite ${}_1\mathcal{C}u_n$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. L'opérateur ${}_1\mathcal{C}$ est donc compact.

Considérons à présent l'opérateur ${}_1\mathcal{B}$ associé à la forme ${}_1B$ et tel que

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad ({}_1\mathcal{B}u, v)_1 = {}_1B(u, v).$$

D'après le corollaire 2.3.1 (on rappelle $K < 1$), il existe au moins une valeur de λ pour laquelle ${}_1B$ soit \mathbb{T}_λ -coercive. La proposition 2.2.2 permet alors de conclure. ■

Le résultat que nous venons de présenter est en accord avec la littérature : l'opérateur \mathcal{R} étant continu de $H_{00}^{1/2}(\zeta)$ dans $H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b)$ nous avons

$$|{}_1B_b(\mathcal{R}v, \mathcal{R}v)| \leq \alpha_b^+ \|\mathcal{R}\|_b^2 \|v\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)}^2.$$

De plus, l'application trace étant continue de $H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a)$ dans $H_{00}^{1/2}(\zeta)$ (on notera $\mathcal{C}_{b \leftarrow a}$ la constante de continuité, cf. § A.D.1), nous aboutissons à l'estimation

$$|{}_1B_b(\mathcal{R}v, \mathcal{R}v)| \leq \alpha_b^+ \mathcal{C}_{b \leftarrow a}^2 \|\mathcal{R}\|^2 \|\nabla v\|_{0,a}^2.$$

Le paramètre K est alors majoré par

$$K \leq \frac{\alpha_b^+}{\alpha_a^{min}} \|\mathcal{R}\|^2 \mathcal{C}_{b \leftarrow a}^2.$$

Par conséquent, pour $\frac{\alpha_b^+}{\alpha_a^{min}} \|\mathcal{R}\|^2 \mathcal{C}_{b \leftarrow a}^2 < 1$, i.e. pour

$$R_a^\epsilon := \frac{\epsilon_b^-}{\epsilon_a^{max}} > \|\mathcal{R}\|^2 \mathcal{C}_{b \leftarrow a}^2, \quad (2.15)$$

le paramètre K est strictement inférieur à 1 et le problème est bien posé. Dans le cas où la constante diélectrique est telle que $\epsilon_a \in \mathbb{R}_*^+$ et $\epsilon_b \in \mathbb{R}_*^-$, le rapport R_a^ϵ coïncide avec $|\kappa_\epsilon|$ (on rappelle $\kappa_\epsilon = \epsilon_b/\epsilon_a$). Nous retrouvons ainsi que le problème modèle scalaire est bien posé au sens de Fredholm pour $|\kappa_\epsilon|$ suffisamment grand.

Pour retrouver un résultat analogue pour de grandes valeurs du rapport $R_b^\epsilon := \epsilon_a^{min}/\epsilon_b^+$, il suffit de reprendre la proposition 2.3.2 et le théorème 2.3.1 en procédant de façon symétrique de sorte que les rôles de Ω_a et Ω_b soient inversés.

Lorsque $\epsilon_a \in \mathbb{R}_*^+$ et $\epsilon_b \in \mathbb{R}_*^-$, $R_b^\epsilon = |\kappa_\epsilon|^{-1}$: nous retrouvons ainsi que, lorsque la valeur absolue du contraste est suffisamment petite, le problème modèle scalaire est bien posé au sens de Fredholm.

2.3.1 Le cas d'une géométrie particulière

Considérons une géométrie pour laquelle l'interface ζ est contenue dans un hyperplan et le symétrique de Ω_a par rapport à cet hyperplan est contenu dans Ω_b : d'après le corollaire A.E.1 et la remarque A.E.1, $\mathcal{C}_{b \rightarrow a} = 1$. De plus, d'après la proposition A.D.1 et la remarque A.D.1, $\|\mathcal{R}\| = 1$. La formulation variationnelle (2.1) est donc bien posée au sens de Fredholm si $\mathcal{R}_a^\epsilon > 1$. Pour cette configuration particulière on retrouve que le problème modèle est bien posé dès que $|\kappa_\epsilon| > 1$.

2.4 Discrétisation de la formulation naturelle

Nous nous proposons de discrétiser (2.1) par des éléments finis de Lagrange. Le traitement que nous allons proposer est valable aussi bien en deux qu'en trois dimensions d'espace. Considérons alors $\mathcal{T}_h = \cup \Delta$ une triangulation du domaine Ω , Δ étant un triangle en 2D et un tétraèdre en 3D. Nous supposons de plus que la triangulation \mathcal{T}_h

- respecte la partition $\Omega = \overline{\Omega_a} \cup \overline{\Omega_b}$, i.e. tout triangle (ou tétraèdre) est entièrement dans Ω_a ou entièrement dans Ω_b ,
- est quasi-uniforme¹ au moins sur le domaine Ω_b au voisinage de l'interface ζ .

Pour tout Δ , soit $P_k(\Delta)$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k . Nous introduisons les espaces discrets

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^h &:= \left\{ v^h \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } v^h|_\Delta \in P_k(\Delta), \forall \Delta \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ \mathcal{H}_i^h &:= \left\{ v^h \in H^1(\Omega_i) \text{ t.q. } v^h|_\Delta \in P_k(\Delta), \forall \Delta \in \mathcal{T}_h \text{ et } \Delta \subset \Omega_i \right\}, \quad i = a, b \\ \mathcal{H}_0^h &:= \mathcal{H}^h \cap H_0^1(\Omega), \\ \mathcal{H}_{0,i}^h &:= \mathcal{H}_i^h \cap H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega_i), \\ \mathcal{H}_\zeta^h &:= \left\{ v^h|_\zeta \text{ t.q. } v^h \in \mathcal{H}^h \right\}. \end{aligned}$$

La version discrétisée de (2.1) est alors :

trouver $u^h \in \mathcal{H}_0^h$ t.q.

$$\forall v^h \in \mathcal{H}_0^h, \quad {}_1A(u^h, v^h) = {}_1L(v^h). \quad (2.16)$$

Le traitement que nous allons présenter est inspiré de la théorie des éléments finis pour les problèmes coercifs plus compacts (cf. [29] chapitre V) : l'idée est de montrer, en appliquant la proposition 2.2.4, que la forme ${}_1A$ est stable. Dans ce cas, par application de la proposition 2.2.3, nous obtiendrons un résultat qui remplacera dans les estimations d'erreurs le lemme de Céa. Pour avoir la stabilité de ${}_1A$ il suffit d'exhiber un opérateur \mathbb{T}_λ^h dont la norme ne dépend pas de h et tel que ${}_1B$ soit \mathbb{T}_λ^h -coercive sur $\{\mathcal{H}_0^h\}^2$. La première étape pour construire un tel opérateur consiste à discrétiser l'opérateur \mathcal{R} qui à toute donnée $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\zeta)$ associe la solution du problème (2.8).

¹On rappelle qu'une famille de triangulations \mathcal{T}_h est dite quasi-uniforme s'il existe $\rho > 0$ tel que $\min_{\Delta \in \mathcal{T}_h} (\text{diam}(B_\Delta)) \geq \rho h$, où B_Δ est la plus grande sphère contenue dans Δ .

Soit alors \mathcal{R}^h l'opérateur qui à tout $\varphi^h \in H_0^1(\zeta) \cap \mathcal{H}_\zeta^h$ associe u^h , solution par éléments finis conformes H^1 du problème (2.8) avec φ^h comme donnée.

Proposition 2.4.1 L'opérateur \mathcal{R}^h est uniformément borné de $H_0^1(\zeta) \cap \mathcal{H}_\zeta^h$ (muni de la norme $\|\cdot\|_{H_0^{1/2}(\zeta)}$) dans $\mathcal{H}_{0,b}^h$ (muni de la norme $\|\cdot\|_{1,b}$).

Preuve : Commençons par réexprimer $\mathcal{R}^h = (\mathcal{R}^h - \mathcal{R}) + \mathcal{R}$. Par application de l'inégalité triangulaire nous obtenons

$$\|\mathcal{R}^h\| \leq \|\mathcal{R} - \mathcal{R}^h\| + \|\mathcal{R}\|;$$

L'opérateur \mathcal{R} étant borné, pour achever la preuve il suffit de montrer cette dernière propriété pour $(\mathcal{R} - \mathcal{R}^h)$. Par définition

$$\|\mathcal{R} - \mathcal{R}^h\| = \sup_{\varphi^h \in H_0^1(\zeta) \cap V_\zeta^h} \frac{\|(\mathcal{R} - \mathcal{R}^h)\varphi^h\|_{1,b}}{\|\varphi^h\|_{H_0^{1/2}(\zeta)}};$$

Évaluons alors $\|(\mathcal{R} - \mathcal{R}^h)\varphi^h\|_{1,b}$: nous rappelons que $\mathcal{R}\varphi^h$ est la solution u du problème (2.8) avec $\varphi = \varphi^h|_\zeta$ alors que $\mathcal{R}^h\varphi^h = u^h$ est la solution approchée par éléments finis de ce même problème. Le domaine Ω_b étant à frontière lipschitzienne, la solution u de (2.8) appartient à un espace plus régulier que $H^1(\Omega_b)$. En effet, comme $\varphi^h \in H_{00}^{3/2-\varepsilon}(\zeta)$, $\forall \varepsilon > 0$, on sait que $u \in H^{1+\sigma}(\Omega_b)$, pour une valeur de $\sigma \geq 1/2$ dépendant de la géométrie. Il existe de plus une constante $c_0 \in \mathbb{R}_*^+$ telle que $\|u\|_{H^{1+\sigma}(\Omega_b)} \leq c_0 \|\varphi\|_{H_{00}^{1/2+\sigma}(\zeta)}$. D'autre part, d'après la théorie de l'interpolation (cf. [11], chapitre 12), nous avons

$$\|u - u^h\|_{1,b} \leq Ch^\sigma \|u\|_{H^{1+\sigma}(\Omega_b)}, \quad C \in \mathbb{R}_*^+$$

et par conséquent

$$\|u - u^h\|_{1,b} \leq c_0 Ch^\sigma \|\varphi\|_{H_{00}^{1/2+\sigma}(\zeta)}$$

La triangulation étant quasi-uniforme, au moins dans un voisinage de l'interface, d'après le théorème 4.5.11 de [11], il existe une constante C' strictement positive telle que $\|\varphi^h\|_{H_{00}^{1/2+\sigma}(\zeta)} \leq C' h^{-\sigma} \|\varphi^h\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)}$. En combinant ces dernières estimations nous obtenons

$$\|(\mathcal{R} - \mathcal{R}^h)\varphi^h\|_{1,b} = \|u - u^h\|_{1,b} \leq c_0 C C' \|\varphi^h\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)},$$

par conséquent $\|\mathcal{R} - \mathcal{R}^h\| \leq c_0 C C'$. □

Nous pouvons alors introduire l'opérateur $\mathbb{T}_\lambda^h : \mathcal{H}_0^h \rightarrow \mathcal{H}_0^h$ dont l'action est définie par

$$\mathbb{T}_\lambda^h v^h := \begin{cases} v_a^h & \text{dans } \Omega_a \\ \lambda \mathcal{R}^h v_a^h|_\zeta + (1 - \lambda) v_b^h & \text{dans } \Omega_b \end{cases}.$$

Nous remarquons que, l'application trace étant linéaire et continue de $\mathcal{H}_{0,b}^h$ (muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$) dans $H_0^1(\zeta) \cap V_\zeta^h$ (muni de la norme

$b\|\cdot\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)}$, l'opérateur discret \mathbb{T}_λ^h est par construction uniformément borné de \mathcal{H}_0^h dans lui-même. De plus, pour $\lambda \neq 1$ (cf. proposition 2.3.1), \mathbb{T}_λ^h est bijective.

Proposition 2.4.2 Si le paramètre K défini au (2.9) est strictement inférieur à 1 et si $\lambda \in]\lambda^-(K), \lambda^+(K)[$, alors ${}_1B$ est \mathbb{T}_λ^h -coercive sur $\{\mathcal{H}_0^h\}^2$.

Preuve : L'opérateur \mathcal{R}^h étant uniformément borné, la preuve demeure identique à celle de la proposition 2.3.2. □

Corollaire 2.4.1 Dès lors que $K < 1$, la forme ${}_1B$ est \mathbb{T}_λ^2 -coercive sur $\{\mathcal{H}_0^h\}^2$.

Théorème 2.4.1 Soit u solution de (2.1) et u^h solution de (2.16). Pour h assez petit, si le paramètre $K < 1$, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u - u^h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v^h \in \mathcal{H}_0^h} \|u - v^h\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.17)$$

Preuve : D'après le théorème 2.3.1, le problème (2.1) est bien posé au sens de Fredholm. Nous pouvons alors appliquer, en vertu du corollaire 2.4.1, la proposition 2.2.4 qui nous assure de la stabilité de la forme ${}_1A$. L'application directe de la proposition 2.2.3 nous permet d'obtenir (2.17). ■

Pour l'approximation par éléments finis de (2.16) nous pouvons établir l'estimation d'erreur usuelle en norme $H^1(\Omega)$ fournie par le théorème 3.2.3 de [15]. Pour cela il suffit de reprendre la preuve de ce dernier théorème en remplaçant le lemme de Céa par le théorème 2.4.1. Ainsi, pour des triangulations quasi-uniformes (au moins sur Ω_b dans un voisinage de l'interface ζ), respectant la bipartition et lorsque le pas de maillage h est suffisamment petit, nous obtenons aisément la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v^h \in \mathcal{H}_0^h} \|u - v^h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Si de plus $u \in H^{1+\eta}(\Omega)$, avec $\eta > 0$, nous avons l'estimation

$$\inf_{v^h \in \mathcal{H}_0^h} \|u - v^h\|_{H^1(\Omega)} \leq h^{\min(1,\eta)} \|u\|_{H^{1+\eta}(\Omega)}$$

et l'application du théorème 2.4.1 permet d'obtenir

$$\|u - u^h\|_{H^1(\Omega)} \leq h^{\min(1,\eta)} \|u\|_{H^{1+\eta}(\Omega)}.$$

Formulations enrichies pour le problème scalaire

3.1 Introduction

Au cours de ce chapitre nous continuons à nous occuper du problème modèle scalaire (1.24). Nous adopterons une technique différente de celle qu'on vient d'utiliser au chapitre précédent : au lieu d'introduire un opérateur \mathbb{T}_λ et d'exploiter la \mathbb{T}_λ -coercivité, en nous inspirant d'une méthode introduite par Cakoni, Colton, et Haddar [13] dans le cadre de la *linear sampling method*, nous allons introduire une variable vectorielle supplémentaire. Celle-ci est obtenue en prenant le gradient de l'inconnue scalaire dans un des deux sous-domaines Ω_a ou Ω_b . Cette nouvelle variable correspond à un problème privé du changement de signe de la constante diélectrique, ce qui nous permettra de gagner (sous certaines conditions convenables) la coercivité nécessaire pour aboutir au caractère bien posé du problème modèle. De ce point de vue, la nouvelle variable vectorielle joue un rôle semblable à celui de $\mathbb{T}_\lambda v$ (cf. § 2.12).

Le point de départ pour la construction des formulations variationnelles que nous appelons enrichies (bien évidemment à cause de l'introduction d'une variable supplémentaire) est le problème (1.27). Récrivons ce dernier en prenant en compte les notations $\alpha = \epsilon^{-1}$, $\beta = \omega^2 \mu$:

trouver un couple $(u_a, u_b) \in H^1(\Omega_a) \times H^1(\Omega_b)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} +\operatorname{div}(\alpha_a \nabla u_a) + \beta_a u_a = f_a, \text{ dans } \Omega_a \\ -\operatorname{div}(|\alpha_b| \nabla u_b) + \beta_b u_b = f_b, \text{ dans } \Omega_b \\ u_a|_\zeta = u_b|_\zeta \\ (\alpha_a \partial_{\mathbf{n}_a} u_a - \alpha_b \partial_{\mathbf{n}_a} u_b)|_\zeta = 0 \\ u_i|_{\Gamma_i} = 0, \quad i = a, b \end{array} \right. . \quad (3.1)$$

Dans les formulations type *deux champs*, l'inconnue vectorielle substituera l'inconnue scalaire qui a servi à sa construction alors que dans les formulations à *trois champs* la nouvelle inconnue vectorielle se rajoutera aux deux inconnues scalaires.

Pour la construction de ces formulations nous utiliserons les espaces fonctionnels ($i = a, b$) :

$$\mathbf{H}_{0,\Gamma_i}(\mathbf{rot}; \Omega_i) := \{ \mathbf{p}; \mathbf{rot} \mathbf{p} \in \mathbf{L}^2(\Omega_i), \mathbf{p} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = 0 \},$$

$$\mathbf{H}_{0,\zeta}(\mathbf{rot}; \Omega_i) := \{ \mathbf{p}; \mathbf{rot} \mathbf{p} \in \mathbf{L}^2(\Omega_i), \mathbf{p} \times \mathbf{n}|_\zeta = 0 \},$$

$$\mathbf{X}_i := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_i) \text{ t.q. } \mathbf{rot} \frac{\mathbf{p}}{|\alpha_i|} \in \mathbf{L}^2(\Omega_i), \left(\frac{\mathbf{p}}{|\alpha_i|} \times \mathbf{n} \right) \Big|_{\Gamma_i} = 0 \right\}.$$

Les deux premiers espaces sont munis de la norme $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_i)$ usuelle alors que le dernier est muni de la norme du graphe, c'est à dire

$$\left(\|\cdot\|_{0,i}^2 + \|\operatorname{div} \cdot\|_{0,i}^2 + \left\| \operatorname{rot} \left(\frac{\cdot}{|\alpha_i|} \right) \right\|_{0,i}^2 \right)^{1/2}.$$

Rappelons de plus quelques résultats utiles concernant la trace normale des éléments de $\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_i)$. Pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_i)$ et pour tout $v \in H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ considérons la formule d'intégration par parties

$$(\mathbf{w}, \nabla v)_{0,i} + (\operatorname{div} \mathbf{w}, v)_{0,i} = \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, v \rangle_\zeta. \quad (3.2)$$

Le crochet de dualité sur ζ est à considérer au sens $(H_{00}^{1/2}(\zeta))' - H_{00}^{1/2}(\zeta)$: d'une part la restriction à ζ de toute fonction de $H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ appartient à $H_{00}^{1/2}(\zeta)$; de l'autre, d'après la remarque 3.1 de [24], la trace normale des éléments de $\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_i)$ sur toute composante connexe du bord $\gamma \subset \partial\Omega_i$ (γ étant aussi à bord Lipschitzien) appartient à $(H_{00}^{1/2}(\gamma))'$.

À l'aide de (3.2) il est immédiat d'obtenir la condition de raccord de la trace normale sur ζ pour tout champ $\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega)$. Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ nous avons en effet :

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}, \nabla v)_0 + (\operatorname{div} \mathbf{w}, v)_0 &= \sum_{i=a,b} ((\mathbf{w}_i, \nabla v_i)_{0,i} + (\operatorname{div} \mathbf{w}_i, v_i)_{0,i}) = \\ \sum_{i=a,b} \langle \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_i, v_i \rangle_{\partial\Omega_i} &= \langle \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{n}_a - \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{n}_a, v \rangle_\zeta = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

par conséquent $\mathbf{w}_a \cdot \mathbf{n}_a|_\zeta = \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{n}_a|_\zeta$ au sens $(H_{00}^{1/2}(\zeta))'$.

3.2 Formulation à deux champs

Nous verrons, au cours du § 3.2.1, qu'il est possible de construire une formulation à deux champs équivalente au problème modèle si la fréquence ω n'est pas nulle (cf. la remarque 3.2.3). Dans la suite de cette section nous allons donc considérer $\omega \in \mathbb{R}_*^+$.

Une autre contrainte liée à la nature de la formulation à deux champs porte sur le signe du rapport α/β : comme il sera expliqué au cours de l'exposé du théorème 3.2.1, cette formulation peut rentrer dans le catégorie des problèmes coercifs plus compacts si, au moins sur un des deux sous-domaines Ω_a, Ω_b , le rapport α/β est négatif fini (cf. remarque 3.2.3); cela s'avère vrai dans les cas où

1. la permittivité μ (et donc β , puisque nous rappelons $\beta = \omega^2\mu$) est de signe constant dans Ω tout entier ;
2. $\Omega_a \subset \Omega_2$ (dans ce cas $\alpha_a/\beta_a < 0$) ;
3. $\Omega_b \subset \Omega_1$ (dans ce cas $\alpha_b/\beta_b < 0$).

L'idée de base pour la construction de la formulation à deux champs est de remplacer, dans le sous-domaine où $\alpha_k/\beta_k < 0$, l'inconnue scalaire u_k par le champ vectoriel $\mathbf{u}_k := |\alpha_k| \nabla u_k$.

Dans la suite, pour illustrer le *modus operandi*, nous supposerons $\beta_b > 0$ presque partout dans Ω_b (ce qui est réalisé pour le cas 3 et pour le cas 1 lorsque $\beta > 0$ presque partout dans Ω). Nous posons alors $\mathbf{u}_b = |\alpha_b| \nabla u_b$ (un

choix équivalent serait $\mathbf{u}_a = \alpha_a \nabla u_a$, dans le cas 2 ou dans le cas 1 lorsque $\beta < 0$).

Après avoir explicité la construction de la formulation et en avoir montré l'équivalence avec le problème de départ, nous fournirons les conditions qui en assurent le caractère bien posé au sens de la théorie de Fredholm.

3.2.1 Construction de la formulation variationnelle

Commençons par prendre le produit scalaire dans $L^2(\Omega_a)$ entre la première équation de (3.1) et une fonction test $v_a \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a)$:

$$(\operatorname{div}(\alpha_a \nabla u_a), v_a)_{0,a} + (\beta_a u_a, v_a)_{0,a} = (f_a, v_a)_{0,a} .$$

Intégrons ensuite par parties le terme $(\operatorname{div}(\alpha_a \nabla u_a), v_a)_{0,1}$:

$$(\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} - \langle \alpha_a \partial_{\mathbf{n}_a} u_a, v_a \rangle_\zeta - (\beta_a u_a, v_a)_{0,a} = - (f_a, v_a)_{0,a} .$$

D'après la quatrième équation de (3.1) $\alpha_a \partial_{\mathbf{n}_a} u_a|_\zeta = -\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a|_\zeta$, ce qui nous permet d'écrire

$$(\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} + \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta - (\beta_a u_a, v_a)_{0,a} = - (f_a, v_a)_{0,a} . \quad (3.4)$$

Puisque par construction les variables auxiliaires \mathbf{u}_b que nous introduisons sont telles que

$$\begin{aligned} - \operatorname{div} \mathbf{u}_b &\text{ appartient à } \mathbf{L}^2(\Omega_b), \quad \mathbf{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|} = 0 \text{ dans } \Omega_b, \\ - \left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|} \times \mathbf{n} \right) \Big|_{\Gamma_b} &= 0, \end{aligned}$$

nous choisissons des fonctions test vectorielles $\mathbf{v}_b \in \mathbf{X}_b$.

Divisons par β_b la deuxième équation de (3.1) et multiplions scalairement dans $L^2(\Omega_b)$ le résultat de cette opération par $\operatorname{div} \mathbf{v}_b$:

$$\left(\frac{1}{\beta_b} \operatorname{div}(|\alpha_b| \nabla u_b), \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} - (u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} = - \left(\frac{f_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} .$$

Intégrons par parties le terme $(u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b}$ afin d'obtenir

$$\left(\frac{1}{\beta_b} \operatorname{div}(|\alpha_b| \nabla u_b), \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + (\nabla u_b, \mathbf{v}_b)_{0,b} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_b \rangle_\zeta = - \left(\frac{f_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} .$$

D'après la troisième équation de (3.1) et la définition de \mathbf{u}_b , nous pouvons récrire cette dernière équation sous la forme

$$\left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{u}_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_b \rangle_\zeta = - \left(\frac{f_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} . \quad (3.5)$$

Nous remarquons enfin que, puisque $\nabla u_b = |\alpha_b|^{-1} \mathbf{u}_b$, le terme

$$\left(\mathbf{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} = 0 . \quad (3.6)$$

Pour terminer la construction nous allons sommer les contributions (3.4), (3.5) et (3.6). Cette dernière en particulier nous permet d'obtenir, comme il est expliqué dans [14], une formulation régularisée (ou augmentée).

Par cette procédure nous aboutissons à la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \text{trouver } U = (u_a, \mathbf{u}_b) \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times \mathbf{X}_b \text{ tels que} \\ \forall V = (v_a, \mathbf{v}_b) \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times \mathbf{X}_b, \quad {}_2A(U, V) = {}_2L(V), \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec

$$\begin{aligned} {}_2A(U, V) := & \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{u}_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} + \\ & \left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_\zeta + \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta + \\ & (\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} - (\beta_a u_a, v_a)_{0,a}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\text{et } {}_2L(V) := -(f_a, v_a)_{0,a} - \left(\frac{f_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b}. \quad (3.9)$$

Remarque 3.2.1 Grâce à la normalisation obtenue en divisant par β_b la deuxième équation de (3.1), les deux termes d'interface $\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_\zeta$ et $\langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta$ dans la définition de la forme bilinéaire A sont homogènes entre eux.

★

Remarque 3.2.2 L'avantage d'une formulation régularisée est lié à sa mise en oeuvre numérique : le champ vectoriel peut être discrétisé aisément par des techniques type "Galerkin continu" tels les éléments finis de Lagrange vectoriels (cf. [28]).

★

3.2.2 Équivalence avec le problème initial

Proposition 3.2.1 La formulation variationnelle (3.7) est équivalente au problème (3.1).

Preuve : Il est immédiat de constater que, d'après la définition de l'espace $H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a)$, $u_a|_{\Gamma_a} = 0$.

Choisissons successivement dans (3.7) $v_a = 0$, puis $\mathbf{v}_b = 0$. Le couple (u_a, \mathbf{u}_b) vérifie alors

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_b \in \mathbf{X}_b, \quad \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{u}_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} + \\ \left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_\zeta = - \left(\frac{f_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} \end{aligned} \quad (3.10)$$

et

$$\begin{aligned} \forall v_a \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a), \quad (\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} - (\beta_a u_a, v_a)_{0,a} + \\ \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta = -(f_a, v_a)_{0,a}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dans un premier temps, nous allons montrer que (3.10) implique $\mathbf{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|} = 0$. Pour cela l'idée est de choisir dans (3.10) des fonctions test à divergence nulle. Pour construire ces fonctions tests nous introduisons le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{aligned} & \text{donnée } \mathbf{p} \in \mathbf{L}^2(\Omega_b), \text{ trouver } \chi \in \mathbf{H}_{0,\zeta}(\mathbf{rot}; \Omega_b) \text{ telle que} \\ & \forall \varphi \in \mathbf{H}_{0,\zeta}(\mathbf{rot}; \Omega_b), \quad \left(\frac{\mathbf{rot} \chi}{|\alpha_b|}, \mathbf{rot} \varphi \right)_{0,b} + (\chi, \varphi)_{0,b} = (\mathbf{p}, \varphi)_{0,b}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le problème (3.12) est bien posé et sa solution χ vérifie (cf. § 6.1 pour l'intégration par parties) les deux relations suivantes :

$$\mathbf{rot} \frac{\mathbf{rot} \chi}{|\alpha_b|} + \chi = \mathbf{p} \text{ dans } \Omega_b, \quad \frac{\mathbf{rot} \chi}{|\alpha_b|} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = 0.$$

Ces deux propriétés nous permettent de choisir comme fonction test $\mathbf{v}_b = \mathbf{rot} \chi$. Injectons alors ce \mathbf{v}_b particulier dans (3.10) :

$$\left(\mathbf{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{rot} \frac{\mathbf{rot} \chi}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} + \left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{rot} \chi \right)_{0,b} = 0.$$

Intégrons par parties le terme $\left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{rot} \chi \right)_{0,b}$ afin d'obtenir

$$0 = \left(\mathbf{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{rot} \frac{\mathbf{rot} \chi}{|\alpha_b|} + \chi \right)_{0,b} = \left(\mathbf{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{p} \right)_{0,b}.$$

Nous obtenons ainsi $\mathbf{rot} (\mathbf{u}_b/|\alpha_b|) = 0$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega_b)$.

En s'appuyant encore une fois sur (3.10), nous allons retrouver la deuxième et la troisième équation de (3.1) : nous rappelons que le domaine Ω_b est simplement connexe. Il existe alors $u_b \in H^1(\Omega_b)$ tel que $\nabla u_b = \mathbf{u}_b/|\alpha_b|$. Puisque $\mathbf{u}_b \in \mathbf{X}_b(\Omega_b)$, la trace tangentielle $(\mathbf{u}_b/|\alpha_b| \times \mathbf{n})|_{\Gamma_b} = 0$, avec $\alpha_b \in \mathbb{R}_*^-$. Le bord Γ_b étant connexe, u_b est constante le long de ce dernier¹. Le potentiel scalaire u_b est alors défini à une constante près, que nous choisissons égale à zéro. Remplaçons dans (3.10) \mathbf{u}_b par $|\alpha_b| \nabla u_b$:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_b \in X_b, \quad & \left(\frac{\operatorname{div} (|\alpha_b| \nabla u_b)}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + (\nabla u_b, \mathbf{v}_b)_{0,b} + \\ & \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_\zeta + \left(\frac{f_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} = 0. \end{aligned}$$

Intégrons par parties le deuxième terme de cette dernière somme :

$$\left(\frac{\operatorname{div} (|\alpha_b| \nabla u_b)}{\beta_b} - u_b + \frac{f_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_a - u_b \rangle_\zeta = 0. \quad (3.13)$$

Nous nous proposons de choisir dans (3.13) des fonctions test particulières. Pour leur construction introduisons un nouveau problème auxiliaire :

$$\begin{aligned} & \text{données } (p, s) \in L^2(\Omega_b) \times (H_{00}^{1/2}(\zeta))', \text{ trouver } \chi \in H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b) \text{ telle que} \\ & \forall z \in H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b), \quad (|\alpha_b| \nabla \chi, \nabla z)_{0,b} = (p, z)_{0,b} + \langle s, z \rangle_\zeta \end{aligned} \quad (3.14)$$

¹Pour le cas où Γ_b n'est pas connexe, nous renvoyons au § 3.2.3.

Le problème (3.14) est bien posé et sa solution χ vérifie

$$\operatorname{div}(|\alpha_b|\nabla\chi) = -p \text{ dans } \Omega_b, \quad |\alpha_b|\nabla\chi \cdot \mathbf{n}_b|_\zeta = s.$$

Nous pouvons alors considérer $\mathbf{v}_b = |\alpha_b|\nabla\chi$ comme fonction test dans (3.13) :

$$\left(\frac{\operatorname{div}(|\alpha_b|\nabla u_b)}{\beta_b} - u_b + \frac{f_b}{\beta_b}, p \right)_{0,b} + \langle s, u_b - u_a \rangle_\zeta = 0. \quad (3.15)$$

Dans un premier temps choisissons $s = 0$ pour retrouver la deuxième équation de (3.1), puis $p = 0$ pour retrouver la troisième équation de (3.1).

Pour conclure la preuve, nous allons exploiter les informations contenues dans (3.11) : choisissons dans cette dernière $v_a \in \mathcal{D}(\Omega_a)$ et dérivons au sens des distributions

$$\langle \operatorname{div}(\alpha_a \nabla u_a) + \beta_a u_a - f_a, v_a \rangle = 0,$$

ce qui permet de retrouver la première équation de (3.1). Enfin, pour toute fonction test $v_a \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a)$ intégrons (3.11) par parties. En incluant les résultats obtenus jusqu'ici, nous pouvons écrire

$$\langle \alpha_a \nabla u_a \cdot \mathbf{n}_a + \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta = \langle (\alpha_a \nabla u_a + |\alpha_b|\nabla u_b) \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta = 0.$$

L'opérateur de trace $H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \rightarrow H_{00}^{1/2}(\zeta)$ étant surjectif, cette dernière équation nous permet de retrouver la quatrième équation de (3.1). \square

Remarque 3.2.3 En analysant les étapes de construction de la formulation (3.7), il est immédiat de constater que, dans le cas où $\omega = 0$ (le cas "statique"), même en omettant les étapes de normalisation par β_b , nous ne pourrions pas construire une formulation variationnelle type deux champs équivalente au problème de départ : il serait en effet impossible, à partir de la formulation obtenue, de retrouver la troisième équation de (3.1). \star

3.2.3 Cas d'une frontière Γ_b non connexe

Ce paragraphe est un petit *a parte* au cours duquel nous allons considérer le cas où Γ_b est constituée d'un nombre fini N ($N \geq 2$) de composantes connexes : $(\Gamma_b^k)_{k=0,\dots,N}$.

Introduisons l'espaces fonctionnels

$$\mathbb{H}_{\Gamma_b} := \left\{ \mathbf{v} \text{ t.q. } \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0 \text{ et } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega_b \text{ et } \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\zeta = 0 \right\},$$

Nous rappelons (cf. [24]) que l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega_b)$ peut être exprimé comme la somme directe orthogonale de sous-espaces fermés. Sur le tableau 3.1 nous synthétisons cette décomposition.

Dans le cas où Γ_b est connexe, l'espace \mathbb{H}_{Γ_b} est réduit à zéro alors que

$$\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{L}^2(\Omega_b) \\ \hline \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_b}(\mathbf{rot}; \Omega_b) \text{ t.q. } \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0 \} \\ \hline \nabla H_{0,\Gamma_b}^1 \quad \mathbb{H}_{\Gamma_b} \quad \mathbf{rot} \mathbf{H}_{0,\zeta}(\mathbf{rot}; \Omega_b) \\ \hline \end{array}$$

TAB. 3.1 – Décomposition de $\mathbf{L}^2(\Omega_b)$ sous la forme d'une somme directe orthogonale de sous-espaces fermés.

dans le cas général sa dimension est égale à $(N - 1)$: on a en effet $\mathbb{H}_{\Gamma_b} = \text{Vect}(\nabla\phi_1, \dots, \nabla\phi_N)$, avec $\phi_k \in H^1(\Omega_b)$, $\Delta\phi_k = 0$ dans Ω_b , $\phi_k|_{\Gamma_b^i} = \delta_{kl}$ et $\partial_{\mathbf{n}}\phi_k|_{\zeta} = 0$.

Dans ce deuxième cas de figure, pour qu'un champ vectoriel $\mathbf{v}_b \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_b)$ à rotationnel nul puisse être exprimé comme le gradient d'un élément de $H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b)$, il faut que $\mathbf{v}_b \in \mathbb{H}_{\Gamma_b}^\perp$.

3.2.4 Caractère bien posé de la formulation à deux champs

Nous nous proposons de mettre en évidence des conditions nous permettant d'inscrire la formulation (3.7) dans la catégorie des problèmes coercifs plus compacts. Pour cela, nous allons exprimer ${}_2A$ comme la somme de deux termes ${}_2A_{comp}$ et ${}_2A_{coer}$, le premier étant une perturbation compacte du second et ce second terme étant coercif sous certaines conditions (cf. théorème 3.2.1) :

${}_2A = {}_2A_{comp} + {}_2A_{coer}$, avec

$$\begin{aligned}
{}_2A_{comp}(U, V) &:= -((\beta_a + \alpha_a^{min})u_a, v_a)_{0,a} \text{ et} \\
{}_2A_{coer}(U, V) &:= \left(\frac{\text{div} \mathbf{u}_b}{\beta_b}, \text{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \left(\mathbf{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} + \\
&\quad \left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + (\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} + \alpha_a^{min}(u_a, v_a)_{0,a} + \\
&\quad \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_\zeta + \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta.
\end{aligned}$$

Grâce à l'injection compacte de $H^1(\Omega_a)$ dans $L^2(\Omega_a)$, il est immédiat de constater que ${}_2A_{comp}$ est assimilable à une perturbation compacte de ${}_2A_{coer}$. Avant d'énoncer le théorème 3.2.1 concernant la coercivité de ${}_2A_{coer}$, nous introduisons une constante liée aux relèvements de la trace pour un champ scalaire et de la trace normale pour un champ vectoriel : soit c la constante telle que l'inégalité suivante soit vérifiée de façon optimale

$$\forall (v_a, \mathbf{v}_b) \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times \mathbf{X}_b, \quad |\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta| \leq c \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div}; \Omega_b)} \|v_a\|_{1,a} \quad (3.16)$$

(par optimale on entend que si on remplaçait c par $c - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, alors on pourrait exhiber un couple (v_a, \mathbf{v}_b) qui ne vérifierait pas (3.16)).

Nous renvoyons le lecteur au § A.E pour une caractérisation de la constante c .

Théorème 3.2.1 Si $\alpha_b/\beta_b < 0$ et si

$$\frac{\alpha_a^{min}}{\alpha_b^+} > c^2 \max \left[1, \frac{\beta_b^{max}}{\alpha_b^+} \right], \quad (3.17)$$

alors la forme ${}_2A_{coer}$ est coercive sur $\{H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times \mathbf{X}_b\}^2$.

Preuve : Commençons par évaluer ${}_2A_{coer}(V, V)$, $\forall V = (v_a, \mathbf{v}_b) \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times \mathbf{X}_b$:

$$\begin{aligned} {}_2A_{coer}(V, V) = & \left(\frac{1}{\beta_b} \operatorname{div} \mathbf{v}_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} \\ & \left(\frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + (\alpha_a \nabla v_a, \nabla v_a)_{0,a} + \\ & \alpha_a^{min} (v_a, v_a)_{0,a} + 2 \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nous rappelons que $\alpha_a \in L^\infty(\Omega_a)$ et $\beta_b^{-1} \in L^\infty(\Omega_b)$. En prenant en compte l'inégalité (3.16) nous pouvons alors obtenir l'estimation

$$\begin{aligned} |{}_2A_{coer}(V, V)| \geq & \alpha_a^{min} \|v_a\|_{1,b}^2 + \min \left(\frac{1}{\alpha_b^+}, \frac{1}{\beta_b^{max}} \right) \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_b)}^2 + \\ & \left\| \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right\|_{0,b}^2 - 2c \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_b)} \|v_a\|_{1,a}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Pour conclure, l'idée est de contrôler le terme $2c \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_b)} \|v_a\|_{1,a}$ par une fraction des autres. Rappelons d'abord que pour $m; p \in \mathbb{R}_*^+$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}$ nous avons l'égalité

$$mx^2 + y^2 - 2pxy = \frac{m+p^2}{2} \left(x - \frac{2p}{m+p^2} y \right)^2 + \frac{m-p^2}{2} x^2 + \frac{m-p^2}{m+p^2} y^2. \quad (3.20)$$

Identifions alors $x := \|v_a\|_{1,b}$ et $y := \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_b)}$, puis posons

$$m := \alpha_a^{min} \left[\min \left(\frac{1}{\alpha_b^+}, \frac{1}{\beta_b^{max}} \right) \right]^{-1} \quad \text{et} \quad p := c \left[\min \left(\frac{1}{\alpha_b^+}, \frac{1}{\beta_b^{max}} \right) \right]^{-1}.$$

D'après (3.20), A_{coer} est coercive dès que $m > p^2$. Récrivons cette dernière condition en prenant en compte les définitions de m et p :

$$\alpha_a^{min} > \frac{c^2}{\left[\min \left(\frac{1}{\alpha_b^+}, \frac{1}{\beta_b^{max}} \right) \right]} = \frac{c^2}{\frac{1}{\alpha_b^+} \min \left(1, \frac{\alpha_b^+}{\beta_b^{max}} \right)};$$

nous obtenons ainsi $\frac{\alpha_a^{min}}{\alpha_b^+} > c^2 \left[\min \left(1, \frac{\alpha_b^+}{\beta_b^{max}} \right) \right]^{-1}$ et donc (3.17). ■

Remarque 3.2.4 En observant (3.18) il est immédiat de comprendre la nécessité de la condition $\alpha_b/\beta_b < 0$ afin obtenir la coercivité de A_{coer} : en effet, c'est seulement sous cette condition que les termes d'intégration sur Ω_b constituent, pour \mathbf{v}_b , une norme équivalente à la norme de \mathbf{X}_b . ★

Corollaire 3.2.1 Si $\alpha_b/\beta_b < 0$ et si la condition (3.17) est satisfaite, alors la formulation variationnelle (3.7) est de type coercive plus compacte.

La connaissance du champ vectoriel \mathbf{u}_b solution de (3.7) est suffisante pour reconstruire, aussi bien du point de vue théorique que numérique, le champ scalaire u_b .

En revenant aux paramètres diélectriques et magnétiques d'origine, (3.17) correspond à

$$R_a^\epsilon > c^2 \left[\min \left(1, \frac{1}{\omega^2 \mu_b^{max} \epsilon_b^-} \right) \right]^{-1}, \quad (3.21)$$

où nous rappelons $R_a^\epsilon := \epsilon_b^- / \epsilon_a^{max}$. La condition (3.21) est une condition suffisante, de plus elle implique $R_a^\epsilon > c^2$. Comme nous avons déjà pu constater au § 2.3, si $\epsilon_a \in \mathbb{R}_*^+$ et $\epsilon_b \in \mathbb{R}_*^-$, $R_a^\epsilon = |\kappa_\epsilon|$, ce qui nous permet (à nouveau) de retrouver, en accord avec la littérature, que le problème modèle scalaire est bien posé pour des contrastes suffisamment grands en valeur absolue.

Remarque 3.2.5 Le terme minorant de (3.21) croît comme ω^2 . Pour toute valeur du rapport R_a^ϵ , il existe ω_0 tel que, pour tout $\omega > \omega_0$, la condition (3.21) n'est pas vérifiée.

★

Pour retrouver un résultat analogue à (3.21) pour des grandes valeurs du rapport R_b^ϵ (ce qui correspond, lorsque ϵ_a et ϵ_b sont des constantes, à $|\kappa_\epsilon|$ petit), il est possible de construire, pourvu que $\beta_a < 0$, une formulation variationnelle à deux champs en choisissant cette fois-ci comme inconnue auxiliaire $\mathbf{u}_a = \alpha_a \nabla u_a$. En effectuant ce choix et suivant une approche analogue à celle du § 3.2.1 on obtient la formulation variationnelle à deux champs (équivalente au problème (3.1)) suivante :

trouver $U = (\mathbf{u}_a, u_b) \in \mathbf{X}_a \times H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b)$ t.q.

$$\forall V = (\mathbf{v}_a, v_b) \in \mathbf{X}_a \times H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b), \quad {}_2\tilde{A}(U, V) = {}_2\tilde{L}(V) \quad (3.22)$$

avec

$$\begin{aligned} {}_2\tilde{A}(U, V) := & (|\alpha_b| \nabla u_b, \nabla v_b)_{0,b} + (\beta_b u_b, v_b)_{0,b} + \left(\frac{\mathbf{u}_a}{\alpha_a}, \mathbf{v}_a \right)_{0,a} + \\ & \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{u}_a}{|\beta_a|}, \operatorname{div} \mathbf{v}_a \right)_{0,a} + \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_a}{\alpha_a}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_a}{\alpha_a} \right)_{0,a} - \\ & \langle \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_a, u_b \rangle_\zeta - \langle \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{n}_a, v_b \rangle_\zeta \end{aligned}$$

et

$${}_2\tilde{L}(V) := (f_b, v_b)_{0,b} - \left(\frac{f_a}{|\beta_a|}, \operatorname{div} \mathbf{v}_a \right)_{0,a}.$$

3.2.5 Le cas d'une géométrie particulière

Considérons la même géométrie qu'au § 2.3.1. D'après la proposition A.E.2 et la remarque A.E.1, la constante $c = 1$. Par conséquent, pourvu que $\mu_b < 0$, la formulation variationnelle à deux champs (3.7) est bien posée au sens de Fredholm si

$$R_a^\epsilon > \left[\min \left(1, \frac{1}{\omega^2 \mu_b^{max} \epsilon_b^-} \right) \right]^{-1}.$$

Pour $(\omega^2 \mu_b^{max} \epsilon_b^-) \leq 1$, on retrouve que le problème modèle est bien posé dès que $|\kappa_\epsilon| > 1$.

3.3 Formulation à trois champs

Comme nous venons de voir au paragraphe précédent, le signe négatif du rapport α/β sur au moins un des deux sous-domaines est une condition nécessaire pour que la formulation type deux champs soit de type coercif plus compact. De plus, d'après la remarque 3.2.3, si $\omega = 0$ nous ne pouvons même plus construire une formulation à deux champs équivalente au problème modèle ! Dans le but de pouvoir traiter tous les cas de figure sans limitation a priori, nous introduisons la formulation variationnelle à trois champs dans laquelle l'inconnue vectorielle viendra se rajouter aux deux inconnues scalaires. Grâce à la généralité de cette formulation, nous pourrions considérer β quelconque dans $L^\infty(\Omega)$. Puisque toute condition sur le signe de β a disparu, nous pourrions choisir de façon complètement équivalente $\mathbf{u}_a = \alpha_a \nabla u_a$ ou bien $\mathbf{u}_b = |\alpha_b| \nabla u_b$ comme inconnue supplémentaire. Afin de garder la cohérence de l'exposé, nous poursuivrons en optant pour \mathbf{u}_b . Nous allons suivre la même démarche qu'au § 3.2 : nous commençons par détailler la construction de la formulation. Après en avoir montré l'équivalence avec le problème (3.1) nous terminerons en explicitant les conditions qui en assurent le caractère bien posé au sens de Fredholm.

Remarque 3.3.1 On aimerait, lors de l'étude du caractère bien posé de la formulation à trois champs, aboutir à une condition sur le contraste analogue à (3.21), mais moins contraignante que cette dernière.

★

3.3.1 Construction de la formulation variationnelle

Considérons des fonctions test scalaires $(v_a, v_b) \in \mathcal{K}_\zeta$ et des fonctions test vectorielles $\mathbf{v}_b \in \mathbf{X}_b$.

Prenons le produit scalaire dans $L^2(\Omega_a)$ entre la première équation de (3.1) et v_a , puis intégrons par parties en prenant en compte la quatrième équation de (3.1) (cf. les étapes qui ont porté à l'obtention de (3.4)) :

$$(\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} + \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta - (\beta_a u_a, v_a)_{0,a} = -(f_a, v_a)_{0,a} \quad (3.23)$$

Prenons ensuite le produit scalaire dans $L^2(\Omega_b)$ entre la deuxième équation de (3.1) et la divergence de \mathbf{v}_b , puis, sans intégrer par parties, multiplions l'égalité résultante par un facteur réel $\rho > 0$:

$$\rho(\operatorname{div} \mathbf{u}_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} - \rho(\beta_b u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} = -\rho(f_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b}. \quad (3.24)$$

Considérons les deux identités

$$(|\alpha_b| \nabla u_b, \nabla v_b)_{0,b} + (\operatorname{div}(|\alpha_b| \nabla u_b), v_b)_{0,b} = \langle |\alpha_b| \nabla u_b \cdot \mathbf{n}_b, v_b \rangle_\zeta \quad \text{et}$$

$$(u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} + (\nabla u_b, \mathbf{v}_b)_{0,b} = \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, u_b \rangle_\zeta.$$

D'après la définition de \mathbf{u}_b et l'appartenance de (v_a, v_b) à \mathcal{K}_ζ , ces deux dernières égalités peuvent être respectivement écrites sous la forme (on rappelle que $\mathbf{n}_b|_\zeta = -\mathbf{n}_a|_\zeta$) :

$$(|\alpha_b| \nabla u_b, \nabla v_b)_{0,b} + (\operatorname{div} \mathbf{u}_b, v_b)_{0,b} + \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta = 0, \quad (3.25)$$

$$(u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} + \left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_b \rangle_\zeta = 0. \quad (3.26)$$

Sommons enfin entre elles les équations (3.23), (3.24), (3.25), (3.26) et le terme de régularisation $\left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b}$. Le résultat est la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} &\text{trouver } U = ((u_a, u_b), \mathbf{u}_b) \in \mathcal{K}_\zeta \times \mathbf{X}_b \text{ tels que} \\ &\forall V = ((v_a, v_b), \mathbf{v}_b) \in \mathcal{K}_\zeta \times \mathbf{X}_b, \quad {}_3A^\rho(U, V) = {}_3L^\rho(V), \end{aligned} \quad (3.27)$$

avec

$$\begin{aligned} {}_3A^\rho(U, V) := & \rho(\operatorname{div} \mathbf{u}_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} + \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} + \\ & \left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + (|\alpha_b| \nabla u_b, \nabla v_b)_{0,b} + (\operatorname{div} \mathbf{u}_b, v_b)_{0,b} + \\ & (u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} - \rho(\beta_b u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} + (\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} - \\ & (\beta_a u_a, v_a)_{0,a} + 2 \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_b \rangle_\zeta, \end{aligned} \quad (3.28)$$

et

$${}_3L^\rho(V) := -(f_a, v_a)_{0,a} - \rho(f_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b}. \quad (3.29)$$

Nous rappelons au passage que l'utilisation d'une formulation variationnelle augmentée permet de discrétiser le champ vectoriel par une méthode de Galerkin continue.

Remarque 3.3.2 Dans la définition de la forme bilinéaire ${}_3A^\rho$, les termes d'interface $\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_b \rangle_\zeta$ et $\langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta$ sont homogènes entre eux, indépendamment du choix du paramètre ρ .

★

3.3.2 Équivalence avec le problème de départ

Proposition 3.3.1 La formulation variationnelle (3.27) est équivalente au problème (3.1).

Preuve : Il est immédiat de constater, en accord avec la définition de \mathcal{K}_ζ , que $u_a|_\zeta = u_b|_\zeta$ et $u_i|_{\Gamma_i} = 0$, $i = a, b$.

Montrons ensuite que (3.27) implique $\mathbf{rot}(\mathbf{u}_b/|\alpha_b|) = 0$: la procédure que nous allons suivre est la même que celle exposée au cours de la preuve de la proposition 3.2.1. Choisissons dans (3.27) des fonctions test $(v_a, v_b) = (0, 0)$ et $\mathbf{v}_b = \mathbf{rot}\chi$ (χ étant la solution du problème auxiliaire (3.12), on rappelle que $\frac{\mathbf{rot}\chi}{|\alpha_b|} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = 0$) :

$$\left(\mathbf{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{rot} \frac{\mathbf{rot}\chi}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} + \left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{rot}\chi \right)_{0,b} = 0.$$

Intégrons par parties le terme $\left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{rot}\chi \right)_{0,b}$ afin d'obtenir

$$0 = \left(\mathbf{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{rot} \frac{\mathbf{rot}\chi}{|\alpha_b|} + \chi \right)_{0,b} = \left(\mathbf{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{p} \right)_{0,b}$$

et ainsi retrouver $\mathbf{rot}(\mathbf{u}_b/|\alpha_b|) = 0$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega_b)$.

Pour retrouver la première équation de (3.1) considérons dans (3.27) des fonctions test $v_a \in D(\Omega_a)$, $(v_b, \mathbf{v}_b) = (0, 0)$:

$$\langle \alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a \rangle - \langle \beta_a u_a, v_a \rangle = -\langle f_a, v_a \rangle;$$

différencions ensuite au sens de distributions

$$\langle \operatorname{div}(\alpha_a \nabla u_a) + \beta_a u_a - f_a, v_a \rangle = 0.$$

Les champs scalaires (v_a, v_b) appartiennent à K_ζ , par conséquent nous ne pouvons pas choisir des fonctions test telle que $v_a = 0$ dans Ω_a et $v_b|_\zeta \neq 0$. À cause de cela, nous ne pouvons pas isoler une à une les informations contenues dans (3.27) pour terminer la preuve de façon "séquentielle". Dans la suite pour établir la deuxième équation de (3.1) et l'identité $\mathbf{u}_b = |\alpha_b| \nabla u_b$, nous procéderons d'une façon "simultanée" :

introduisons $\tau := \nabla u_b - \mathbf{u}_b/|\alpha_b|$ et $\eta := -\operatorname{div} \mathbf{u}_b + \beta_b u_b - f_b$. Par construction $\tau \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_b}(\mathbf{rot}; \Omega_b)$, $\mathbf{rot} \tau = 0$ et $\eta \in L^2(\Omega_b)$.

Choisissons dans (3.27) des fonctions test $(v_a, v_b) = (0, 0)$ et $\mathbf{v}_b \in \mathcal{D}(\Omega_b)^3$:

$$\left\langle \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right\rangle + \langle u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \rangle + \rho \langle \operatorname{div} \mathbf{u}_b - \beta_b u_b + f_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \rangle = 0,$$

puis différencions cette dernière égalité au sens des distributions

$$\rho \langle \nabla (-\operatorname{div} \mathbf{u}_b + \beta_b u_b - f_b), \mathbf{v}_b \rangle = \left\langle \nabla u_b - \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right\rangle.$$

Nous obtenons ainsi $\rho \nabla \eta = \tau$ au sens des distributions sur Ω_b ; le champ scalaire η appartient alors à $H^1(\Omega_b)$ et, puisque Γ_b est connexe², $\eta|_{\Gamma_b} = c_b \in \mathbb{R}$.

L'étape suivante consiste à montrer que η est égale à c_b sur tout le bord $\partial\Omega_b$. Pour cela, choisissons dans (3.27) des fonctions test scalaires $(v_a, v_b) = (0, 0)$ et une fonction test vectorielle $\mathbf{v}_b \in \mathbf{X}_b$ telle que $(\operatorname{div} \mathbf{v}_b, 1)_{0,b} = 0$:

$$\left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + (u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} + \rho(\eta, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_b \rangle_\zeta = 0.$$

Grâce aux propriétés du champs test vectoriel, cette dernière équation peut être réécrite sous la forme

$$\left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + (u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} + \rho(\eta - c_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_b \rangle_\zeta = 0.$$

Après intégration par parties nous obtenons

$$\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a + \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, u_b \rangle_\zeta + \rho(\nabla(\eta - c_b), \mathbf{v}_b)_{0,b} - (\tau, \mathbf{v}_b)_{0,b} + \rho \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, (\eta - c_b) \rangle_{\partial\Omega_b} = 0,$$

ce qui conduit naturellement à

$$\forall \mathbf{v}_b \in \mathbf{X}_b \text{ t.q. } (\operatorname{div} \mathbf{v}_b, 1)_{0,b} = 0, \quad \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, (\eta - c_b) \rangle_{\partial\Omega_b} = 0. \quad (3.30)$$

Nous allons alors employer des fonctions test \mathbf{v}_b particulières : pour leur construction considérons la solution du problème (3.14) avec comme données $p = 0$ et $s = c_b - \eta \in L^2(\zeta)$, puis posons $\mathbf{v}_b = |\alpha_b| \nabla \chi$. Par construction $\operatorname{div} \mathbf{v}_b = 0$ et $\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b|_\zeta = c_b - \eta|_\zeta$. Utilisons ces fonctions test *ad hoc* dans (3.30) :

$$\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, \eta - c_b \rangle_{\partial\Omega_b} = \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, \eta - c_b \rangle_\zeta = \|\eta - c_b\|_{L^2(\zeta)}^2.$$

Nous obtenons ainsi $\eta|_{\partial\Omega_b} = c_b$ et, puisque $\tau = \rho \nabla \eta$, le champ vectoriel τ appartient à l'espace $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega_b)$.

Choisissons ensuite dans (3.27) $(v_a, \mathbf{v}_b) = (0, 0)$ et $v_b \in \mathcal{D}(\Omega_b)$:

$$0 = (|\alpha_b| \nabla u_b, \nabla v_b)_{0,b} + (\operatorname{div} \mathbf{u}_b, v_b)_{0,b} = (\operatorname{div}(\mathbf{u}_b - |\alpha_b| \nabla u_b), v_b)_{0,b},$$

par conséquent $\operatorname{div}(|\alpha_b| \tau) = 0$ au sens des distributions sur Ω_b .

Nous rappelons que $\mathbf{rot} \tau$ et $\operatorname{div}(|\alpha_b| \tau)$ sont nuls dans Ω_b alors que la trace tangentielle $\tau \times \mathbf{n}_b$ est nulle sur $\partial\Omega_b$. D'après ces trois relations (cf. [14] théorème 6) τ est nul dans Ω_b et, par conséquence directe, $\mathbf{u}_b = |\alpha_b| \nabla u_b$ et $\eta = c_b$ dans Ω_b .

Pour retrouver la deuxième équation de (3.1) il nous reste à prouver que c_b est nulle. Choisissons à nouveau dans (3.27) $(v_a, v_b) = (0, 0)$ et $\mathbf{v}_b \in \mathbf{X}_b$ pour obtenir

$$\forall \mathbf{v}_b \in \mathbf{X}_b, \quad c_b(1, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} = 0.$$

Comme l'image de \mathbf{X}_b par l'opérateur divergence est exactement $L^2(\Omega_b)$, il en résulte que $c_b = 0$ dans Ω_b .

²Pour le cas où Γ_b n'est pas connexe, nous renvoyons à § 3.2.3

Pour terminer, considérons dans (3.27) $(v_a, v_b) \in \mathcal{K}_\zeta$ et $\mathbf{v}_b = 0$. En prenant en compte les résultats jusqu'ici obtenus, nous aboutissons facilement à la relation

$$\forall v_a \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a), \quad \langle \alpha_a \partial_{\mathbf{n}_a} u_a + |\alpha_b| \partial_{\mathbf{n}_b} u_b, v_a \rangle_\zeta = 0,$$

qui nous permet de retrouver la quatrième équation de (3.1). \square

3.3.3 Caractère bien posé de la formulation variationnelle à trois champs

De façon analogue à la démarche suivie pour la formulation variationnelle à deux champs, nous allons exprimer ${}_3A^\rho$ comme le somme d'un terme ${}_3A_{coer}^\rho$ coercif sous certaines conditions (cf. théorème 3.3.1) et d'un terme ${}_3A_{comp}^\rho$ de perturbation compacte :

$${}_3A^\rho = {}_3A_{comp}^\rho + {}_3A_{coer}^\rho, \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} {}_3A_{comp}^\rho(U, V) := & -(u_b, v_b)_{0,b} - \rho(\beta_b u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} + (u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} \\ & + (\operatorname{div} \mathbf{u}_b, v_b)_{0,b} - ((\beta_a + \alpha_a^{min}) u_a, v_a)_{0,a}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_3A_{coer}^\rho(U, V) := & \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} + \left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \rho (\operatorname{div} \mathbf{u}_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} \\ & + (|\alpha_b| \nabla u_b, \nabla v_b)_{0,b} + (|\alpha_b| u_b, v_b)_{0,b} + (u_b, v_b)_{0,b} \\ & + (\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a) + (\alpha_a u_a, v_a)_{0,a} + \alpha_a^{min} (u_a, v_a)_{0,a} \\ & + 2 \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_b \rangle_\zeta. \end{aligned}$$

Puisque l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, la forme ${}_3A_{comp}^\rho$ est bien assimilable à une perturbation compacte de ${}_3A_{coer}^\rho(U, V)$.

Nous constatons que, à cause des termes d'intégration sur l'interface ζ , nous ne pouvons pas conclure directement quant à la coercivité de la forme ${}_3A_{coer}^\rho$. Avant d'énoncer le théorème 3.3.1, nous fournissons quelques résultats préliminaires, concernant l'estimation de ces termes d'interface :

Nous rappelons que α_b et α_b^{-1} appartiennent à l'espace $L^\infty(\Omega_b)$, par conséquent les deux normes

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\operatorname{div}; \Omega_b)} & := \left[\left(\frac{\cdot}{|\alpha_b|}, \cdot \right)_{0,b} + (\operatorname{div} \cdot, \operatorname{div} \cdot)_{0,b} \right]^{1/2} \\ \|\cdot\|_{\tilde{H}_{\Omega_b}^1} & := [(|\alpha_b| \nabla \cdot, \nabla \cdot)_{0,b} + (\cdot, \cdot)_{0,b}]^{1/2} \end{aligned}$$

sont respectivement équivalentes à la norme $\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_b)$ usuelle et à la norme $H^1(\Omega_b)$ usuelle.

Grâce aux deux normes que nous venons d'introduire, nous allons contrôler le terme $\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, v_b \rangle_\zeta$. En effet, par simple intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, v_b \rangle_\zeta & = (\operatorname{div} \mathbf{v}_b, v_b)_{0,b} + (\mathbf{v}_b, \nabla v_b)_{0,b} \\ & = (\operatorname{div} \mathbf{v}_b, v_b)_{0,b} + \left(\frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|}, |\alpha_b| \nabla v_b \right)_{0,b} \\ & \leq \|\operatorname{div} \mathbf{v}_b\|_{0,b} \|v_b\|_{0,b} + \left(\frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b}^{1/2} (|\alpha_b| \nabla v_b, \nabla v_b)_{0,b}^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Utilisons alors l'inégalité

$$ab + cd \leq (a^2 + d^2)^{1/2}(b^2 + c^2)^{1/2} \quad (\text{pour } a, b, c, d \in \mathbb{R}_*^+) \quad (3.32)$$

et identifions $a = \|\operatorname{div} \mathbf{v}_b\|_{0,b}$, $b = \|v_b\|_{0,b}$, $c = (\mathbf{v}_b/|\alpha_b|, \mathbf{v}_b)_{0,b}^{1/2}$, $d = (|\alpha_b|\nabla v_b, \nabla v_b)_{0,b}^{1/2}$. Nous obtenons ainsi l'estimation

$$|\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, v_b \rangle_\zeta| \leq \|\mathbf{v}_b\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\operatorname{div}; \Omega_b)} \|v_b\|_{\tilde{H}^1(\Omega_b)}. \quad (3.33)$$

Théorème 3.3.1 Si le rapport

$$\frac{\alpha_a^{\min}}{\alpha_b^+} > \frac{5}{4}c^2, \quad (3.34)$$

avec c définie par (3.16), alors, pour tout $\rho \geq \max(1, (\alpha_b^+)^{-1})$, la forme ${}_3A_{coer}^\rho$ est coercive sur $\{\mathcal{K}_\zeta \times \mathbf{X}_b\}^2$.

Preuve : Commençons par calculer ${}_3A_{coer}^\rho(V, V)$, pour $V = ((v_a, v_b), \mathbf{v}_b)$:

$$\begin{aligned} {}_3A_{coer}^\rho(V, V) &= \rho \|\operatorname{div} \mathbf{v}_b\|_{0,b}^2 + \left\| \mathbf{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right\|_{0,b}^2 + \left(\mathbf{v}_b, \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} + \|v_b\|_{0,b}^2 + \\ &\quad (|\alpha_b|\nabla v_b, \nabla v_b)_{0,b} + (\alpha_a \nabla v_a, \nabla v_a)_{0,a} + \alpha_a^{\min} \|v_a\|_{0,a}^2 + \\ &\quad 3 \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta. \end{aligned}$$

En introduisant le paramètre réel $\eta \in [0, 3]$, ${}_3A_{coer}^\rho(V, V)$ peut être borné inférieurement par

$$\begin{aligned} {}_3A_{coer}^\rho(V, V) &\geq \rho \|\operatorname{div} \mathbf{v}_b\|_{0,b}^2 + \left\| \mathbf{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right\|_{0,b}^2 + \left(\mathbf{v}_b, \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} + \|v_b\|_{0,b}^2 + \\ &\quad (|\alpha_b|\nabla v_b, \nabla v_b)_{0,b} + (\alpha_a \nabla v_a, \nabla v_a)_{0,a} + \alpha_a^{\min} \|v_a\|_{0,a}^2 + \\ &\quad - (3 - \eta) |\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta| - \eta |\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_b \rangle_\zeta|. \end{aligned}$$

Le terme $|\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta|$ peut être borné à l'aide de (3.33) alors que pour le terme $|\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_b \rangle_\zeta|$ nous utiliserons (3.16). Introduisons alors β_1 et β_2 deux paramètres réels strictement positifs tels que $\beta_1 + \beta_2 = 1$; nous déduisons

$$\begin{aligned} {}_3A_{coer}^\rho(V, V) &\geq (\beta_1 + \beta_2) \left[\rho \|\operatorname{div} \mathbf{v}_b\|_{0,b}^2 + \left(\mathbf{v}_b, \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} \right] + \\ &\quad \|v_b\|_{\tilde{H}^1(\Omega_b)}^2 + \alpha_a^{\min} \|v_a\|_{1,a}^2 - \\ &\quad (3 - \eta)c \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_b)} \|v_a\|_{1,a} - \eta \|\mathbf{v}_b\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\operatorname{div}; \Omega_b)} \|v_b\|_{\tilde{H}^1(\Omega_b)}; \end{aligned}$$

Puisque $\rho \geq \max(1, (\alpha_b^+)^{-1})$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} {}_3A_{coer}^\rho(V, V) &\geq \frac{\beta_1}{\alpha_b^+} \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_b)}^2 + \beta_2 \|\mathbf{v}_b\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\operatorname{div}; \Omega_b)}^2 + \\ &\quad \|v_b\|_{\tilde{H}^1(\Omega_b)}^2 + \alpha_a^{\min} \|v_a\|_{1,a}^2 - \\ &\quad (3 - \eta)c \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_b)} \|v_a\|_{1,a} - \eta \|\mathbf{v}_b\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\operatorname{div}; \Omega_b)} \|v_b\|_{\tilde{H}^1(\Omega_b)}. \end{aligned}$$

Comme dans le cas du théorème 3.2.1, l'idée pour conclure est de contrôler les termes négatifs à l'aide (d'une fraction) des positifs.

- Premièrement, identifions dans (3.20) $x = \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)}$, $y = \|v_a\|_{1,a}$ et posons

$$m = \frac{\beta_1}{\alpha_b^+ \alpha_a^{\min}}, \quad p = \frac{(3-\eta)c}{2\alpha_a^{\min}};$$

il existe alors une constante λ strictement positive telle que

$$\frac{\beta_1}{\alpha_b^+} x^2 + \alpha_a^{\min} y^2 - (3-\eta)cxy \geq \lambda(x^2 + y^2)$$

si et seulement si $m > p^2$, i.e.

$$\frac{\alpha_a^{\min}}{\alpha_b^+} > \frac{c^2(3-\eta)^3}{4\beta_1}. \quad (3.35)$$

- Deuxièmement, identifions dans (3.20) $x = \|\mathbf{v}_b\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\text{div};\Omega_b)}$, $y = \|v_b\|_{\tilde{H}^1(\Omega_a)}$ et posons $m = \beta_2$, $p = \eta/2$; il existe alors une constante σ strictement positive telle que $\beta_2 x^2 + y^2 - \eta xy \geq \sigma(x^2 + y^2)$ si et seulement si $m > p^2$, i.e.

$$\beta_2 > \frac{\eta^2}{4}. \quad (3.36)$$

Le paramètre β_2 étant plus petit que 1, nous considérons dorénavant $\eta \in [0, 2]$. D'après les deux points précédents ${}_3A_{coer}^\rho$ est coercive dès lors que les deux conditions (3.35) et (3.36) sont vérifiées en même temps.

Puisque $\beta_1 + \beta_2 = 1$, la condition (3.36) est équivalente à $\beta_1^{-1} > (1 - \eta^2/4)^{-1}$. La condition (3.35) est alors satisfaite pour un $\beta_1(\eta)$ convenable (dépendant ici de η) si

$$\frac{\alpha_1^{\min}}{\alpha_b^+} > c^2 \frac{(3-\eta)^2}{4-\eta^2}. \quad (3.37)$$

Nous constatons que la fonction $f \mapsto (3-\eta)^2/(4-\eta^2)$ atteint sa valeur minimale pour $\eta = 4/3$ et $f(4/3) = 5/4$. Pour cette valeur optimale la condition (3.37) se ramène à (3.34). ■

Corollaire 3.3.1 Supposons que la condition (3.34) soit vérifiée. Alors la formulation variationnelle (3.27) est de type coercif plus compact pour $\rho \geq \max(1, (\alpha_b^+)^{-1})$.

Dans le sous-domaine Ω_b la solution est sur-déterminée, en effet les champs u_b et \mathbf{u}_b sont simultanément utilisés.

En revenant aux paramètres diélectrique et magnétique d'origine, la condition (3.34) correspond à

$$R_a^\epsilon > \frac{5}{4}c^2. \quad (3.38)$$

Nous retrouvons ainsi (une fois de plus) que le problème modèle scalaire est bien posé pour des contrastes suffisamment grands en valeur absolue. Pour retrouver un résultat analogue pour des grandes valeurs du rapport R_b^ϵ (ce qui correspond, lorsque ϵ_a et ϵ_b sont des constantes, à $|\kappa_\epsilon|$ petit) il suffit de construire une formulation variationnelle à trois champs en choisissant

comme inconnue supplémentaire $u_a = \alpha_a \nabla u_a$ et en utilisant des champs test vectoriels dans \mathbf{X}_a . En effectuant ce choix et en suivant une approche analogue à celle du § 3.3.1, nous obtenons la formulation variationnelle suivante (équivalente au problème (3.1)) :

trouver $U = ((u_a, u_b), \mathbf{u}_a) \in \mathcal{K}_\zeta \times \mathbf{X}_a$ t.q.

$$\forall V = ((v_a, v_b), \mathbf{v}_a) \in \mathcal{K}_\zeta \times \mathbf{X}_a, \quad {}_3\tilde{A}^\rho(U, V) = {}_3\tilde{L}^\rho(V), \quad (3.39)$$

avec

$$\begin{aligned} {}_3\tilde{A}^\rho(U, V) := & (|\alpha_b| \nabla u_b, \nabla v_b)_{0,b} + (\beta_b u_b, v_b)_{0,b} + (\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a) + \\ & (u_a, \operatorname{div} \mathbf{v}_a)_{0,a} + (\operatorname{div} \mathbf{u}_a, v_a)_{0,a} + \rho(\beta_a u_a, \operatorname{div} \mathbf{v}_a)_{0,a} + \\ & \left(\frac{\mathbf{u}_a}{\alpha_a}, \mathbf{v}_a \right)_{0,a} + \rho(\operatorname{div} \mathbf{u}_a, \operatorname{div} \mathbf{v}_a)_{0,a} + \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_a}{\alpha_a}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_a}{\alpha_a} \right)_{0,a} \\ & - 2\langle \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta - \langle \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_\zeta \end{aligned}$$

et

$${}_3\tilde{L}^\rho(V) := (f_b, v_b)_{0,b} + \rho(f_a, \operatorname{div} \mathbf{v}_a)_{0,a}.$$

3.3.4 Le cas d'une géométrie particulière

Considérons la même géométrie qu'au § 2.3.1. Comme nous avons déjà remarqué au § 3.2.5, dans cette configuration la constante $c = 1$. La formulation variationnelle à trois champs (3.27) est bien posée au sens de Fredholm si $R_a^c > 5/4$. En nous basant sur la formulation variationnelle (3.27), nous ne pouvons donc pas retrouver que le problème modèle est bien posé dès que $|\kappa_\epsilon| > 1$.

3.4 Formulations enrichies et singularités géométriques

Le grand nombre d'articles et d'ouvrages consacrés à l'étude de problèmes vectoriels dans des domaines non convexes dont le bord est non-régulier (on citera à titre d'exemple [16, 26, 17, 20, 4, 8, 5, 2, 3]) nous suggère une grande prudence pour la discrétisation par éléments finis des formulations variationnelles qui font intervenir des champs vectoriels appartenant à l'espace $\mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega_b) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_b)$. Nous rappelons en effet que, si le domaine Ω_b n'est pas convexe avec $\partial\Omega_b$ non-régulier, l'espace

$$\mathbf{H}_{0,\times}^1(\Omega_b) := \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d \text{ t.q. } \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega_b=0} \}, \quad d = 2, 3,$$

est un sous-espace fermé strictement inclus³ dans $\mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega_b) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_b)$. Il en résulte que, si Ω_b n'est pas convexe et $\partial\Omega_b$ n'est pas régulier, il n'est pas possible d'utiliser des éléments finis de Lagrange vectoriels pour discrétiser de façon conforme un champ vectoriel φ appartenant à $\mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega_b) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_b)$: les éléments finis de Lagrange étant conformes dans $\mathbf{H}^1(\Omega_b)$, l'interpolation nodale de φ appartient à $\mathbf{H}_{0,\times}^1(\Omega_b)$ et, comme

³Dans le cas où Ω_b est convexe, $\mathbf{H}_{0,\times}^1(\Omega_b)$ coïncide avec $\mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega_b) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_b)$.

nous venons de le rappeler, cet espace fonctionnel n'est pas dense dans $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega_b) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega_b)$.

Comment cela va-t-il se répercuter sur la discrétisation des formulations à deux et trois champs ? Nous remarquons que le champ vectoriel introduit au sein des formulations enrichies appartient bien à l'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_b) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega_b)$, cependant, la condition de trace tangentielle nulle est imposée uniquement sur Γ_b alors que sur ζ aucune condition forte n'est imposée. Par conséquent, lorsque Ω_b est non convexe et Γ_b comporte des coins (ou des arrêtes) rentrants, l'espace

$$\mathbf{H}_{0,\Gamma_b,\times}^1(\Omega_b) := \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d \text{ t.q. } \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = 0\}, \quad d = 2, 3,$$

est fermé dans $\mathbf{H}_{0,\Gamma_b}(\mathbf{rot}; \Omega_b) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega_b)$ et on est confronté à des problèmes de densité analogues à ceux que nous venons de rappeler. Cependant, si Γ_b est régulier, l'espace $\mathbf{H}_{0,\Gamma_b,\times}^1(\Omega_b)$ est dense dans $\mathbf{H}_{0,\Gamma_b}(\mathbf{rot}; \Omega_b) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega_b)$, même si l'interface ζ comporte des coins (ou des arrêtes) rentrants. En d'autres termes les singularités géométriques de l'interface ζ ne font jamais intervenir des difficultés de discrétisation particulières.

Ainsi, dans toutes les configurations géométriques pour lesquelles Γ_b ne comporte pas de coins (ou des arrêtes) rentrants, nous pourrions discrétiser les formulations enrichies en utilisant des éléments finis de Lagrange, scalaires pour les champs u_a, u_b et vectoriels pour le champ auxiliaire \mathbf{u}_b .

3.5 Quelques généralisations des formulations enrichies

L'introduction de la variable vectorielle supplémentaire au sein des formulations enrichies peut se révéler coûteuse lors d'une mise en œuvre numérique. Ce phénomène s'accroît lorsqu'on considère des géométries tridimensionnelles ou des domaines, même bidimensionnels, pour lesquels Ω_b soit très étendu. Pour cela, nous allons partiellement modifier les formulations enrichies de sorte que l'inconnue vectorielle supplémentaire soit introduite uniquement dans une "petite" bande à proximité de l'interface ζ . Nous allons alors bi-partitionner le sous-domaine Ω_b en deux sous-domaines $\Omega_{\underline{b}}, \Omega_c$ de sorte que $\partial\Omega_c \cap \zeta = \emptyset$ et $\partial\Omega_{\underline{b}} \cap \zeta = \zeta$. Le but est alors d'introduire la variable supplémentaire uniquement sur $\Omega_{\underline{b}}$.

Nous supposons ainsi les trois sous-domaines $\Omega_a, \Omega_{\underline{b}}, \Omega_c$ simplement connexes à bord lipschitzien tels que

- $\Omega = \overline{\Omega_a} \cup \overline{\Omega_{\underline{b}}} \cup \overline{\Omega_c}$,
- $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, avec $i = a, \underline{b}, c$ et $j = a, \underline{b}, c, i \neq j$.

Nous noterons $\zeta_{a\underline{b}} = \partial\Omega_a \cap \partial\Omega_{\underline{b}}$, $\zeta_{\underline{b}c} = \partial\Omega_c \cap \partial\Omega_{\underline{b}}$ et $\Gamma_a = \partial\Omega_a \setminus \zeta_{a\underline{b}}$, $\Gamma_c = \partial\Omega_c \setminus \zeta_{\underline{b}c}$, $\Gamma_{\underline{b}} = \partial\Omega_{\underline{b}} \setminus (\zeta_{a\underline{b}} \cup \zeta_{\underline{b}c})$.

Dans une géométrie bidimensionnelle, la coupure du domaine Ω_b entraîne automatiquement la non-connexité du bord $\Gamma_{\underline{b}}$ (cf. figure 3.1). Dans ce cas, d'après les résultats que nous avons rappelés au § 3.2.3 l'espace $\mathbb{H}_{\Gamma_{\underline{b}}}$ est de

dimension finie. Notons alors

$$\mathbf{X}_{\underline{b},\perp} := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\underline{b}} \text{ t.q. } \mathbf{v} \in \mathbb{H}_{\Gamma_{\underline{b}}}^\perp \right\}.$$

L'orthogonalité est considérée au sens du produit scalaire $\left(\frac{\cdot}{|\alpha_{\underline{b}}|}, \cdot \right)_0 + (\mathbf{rot} \cdot, \mathbf{rot} \cdot)_0 + (\text{div} \cdot, \text{div} \cdot)_0$. Notons en particulier que tout élément de $\mathbb{H}_{\Gamma_{\underline{b}}}$ est à divergence et à rotationnel nuls : le seul terme non nul dans ce dernier produit scalaire est $\left(\frac{\cdot}{|\alpha_{\underline{b}}|}, \cdot \right)_0$. Dans ce cas, pour tout élément $v \in H_{0,\Gamma_{\underline{b}}}^1(\Omega_{\underline{b}})$, nous avons (cf. § 3.2.3) $|\alpha_{\underline{b}}| \nabla v \in \mathbb{H}_{\Gamma_{\underline{b}}}^\perp$.

Dans la suite, les champs vectoriels que nous introduirons pour la construction des formulations enrichies avec bande appartiendront à l'espace $\mathbf{X}_{\underline{b},\perp}$.

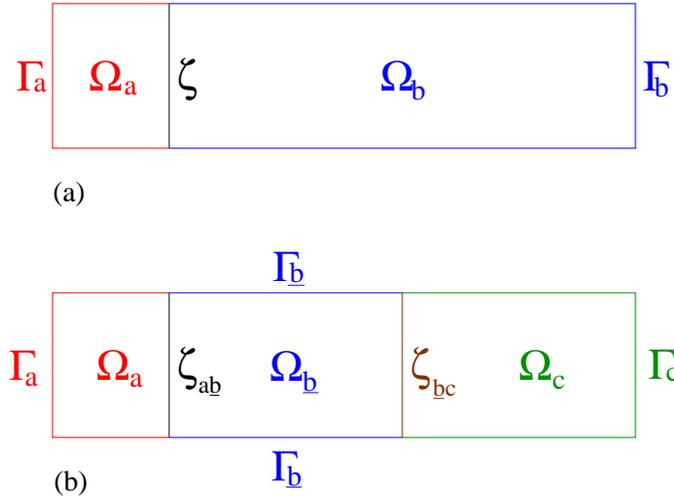


FIG. 3.1 – Le domaine Ω représenté en (a) est divisé en trois sous-domaines lorsqu'on bi-partitionne le domaine Ω_b comme il est représenté en (b). Le bord $\Gamma_{\underline{b}}$ est alors non connexe.

Par les mêmes considérations qui ont amené à l'écriture de (1.27), il est aisé de vérifier que le problème (1.24) est équivalent à (nous rappelons $\alpha_{\underline{b}}|_{\zeta_{\underline{b}c}} = \alpha_c|_{\zeta_{\underline{b}c}}$) :

trouver $(u_a, u_{\underline{b}}, u_c) \in H^1(\Omega_a) \times H^1(\Omega_{\underline{b}}) \times H^1(\Omega_c)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\alpha_a \nabla u_a) + \beta_a u_a = f_a, \text{ dans } \Omega_a \\ -\text{div}(|\alpha_{\underline{b}}| \nabla u_{\underline{b}}) + \beta_{\underline{b}} u_{\underline{b}} = f_{\underline{b}}, \text{ dans } \Omega_{\underline{b}} \\ -\text{div}(|\alpha_c| \nabla u_c) + \beta_c u_c = f_c, \text{ dans } \Omega_c \\ u_a|_{\zeta_{a\underline{b}}} = u_{\underline{b}}|_{\zeta_{a\underline{b}}}, \\ u_{\underline{b}}|_{\zeta_{\underline{b}c}} = u_c|_{\zeta_{\underline{b}c}}, \\ (\alpha_a \partial_{\mathbf{n}_a} u_a + |\alpha_{\underline{b}}| \partial_{\mathbf{n}_a} u_{\underline{b}})|_{\zeta_{a\underline{b}}} = 0 \\ (\alpha_{\underline{b}} \partial_{\mathbf{n}_c} - \alpha_c \partial_{\mathbf{n}_c} u_c)|_{\zeta_{\underline{b}c}} = 0 \\ u_i|_{\Gamma_i} = 0, \quad i = a, \underline{b}, c \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Les nouvelles formulations variationnelles pour lesquelles l'inconnue vectorielle est introduite uniquement sur Ω_b seront construites en partant de ce dernier système.

3.5.1 Méthode bande pour la formulation deux champs

L'extension de la formulation variationnelle deux champs que nous nous apprêtons à exposer présente les mêmes inconvénients que la formulation (3.7) : la formulation peut être construite uniquement si $\beta_b \neq 0$ et elle peut rentrer dans le cadre des problèmes coercifs plus compacts uniquement si $\alpha_k/\beta_k < 0$, $k = a$ ou b . Ici, pour la cohérence de l'exposé, nous continuons à supposer $\alpha_b/\beta_b < 0$; nous poserons alors $\mathbf{u}_b := |\alpha_b| \nabla u_b$. On rappelle (cf. § 3.5) que par construction $\mathbf{u}_b \in \mathbb{H}_{\Gamma_b}^\perp$.

Construction de la formulation

Pour obtenir la formulation à deux champs avec bande :

- prenons le produit scalaire dans $L^2(\Omega_a)$ entre la première équation de (3.40) et une fonction test $v_a \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a)$, puis intégrons par parties et utilisons l'égalité des traces fournie par la sixième équation de (3.40) :

$$(\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} - (\beta_a u_a, v_a)_{0,a} + \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_{\zeta_{ab}} = -(f_a, v_a)_{0,a}. \quad (3.41)$$

- prenons le produit scalaire dans $L^2(\Omega_c)$ entre la troisième équation de (3.40) et une fonction test $v_c \in H_{0,\Gamma_c}^1(\Omega_c)$, puis intégrons par parties et utilisons la septième équation de (3.40) :

$$(|\alpha_c| \nabla u_c, \nabla v_c)_{0,c} + (\beta_c u_c, v_c)_{0,c} + \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_b, v_c \rangle_{\zeta_{bc}} = (f_c, v_c)_{0,c}. \quad (3.42)$$

- divisons la deuxième équation de (3.40) par β_b et prenons le produit scalaire dans $L^2(\Omega_b)$ entre le résultat de l'opération précédente et la divergence d'une fonction test vectorielle $\mathbf{v}_b \in \mathbf{X}_{b,\perp}$. Intégrons alors par parties et utilisons l'identité $u_a|_{\zeta_{ab}} = u_b|_{\zeta_{ab}}$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{u}_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \\ & \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_{\zeta_{ab}} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_c, u_c \rangle_{\zeta_{bc}} = - \left(\frac{f_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} \end{aligned} \quad (3.43)$$

- sommons les résultats des trois premiers points.

Puisque $\operatorname{rot}(\mathbf{u}_b/|\alpha_b|) = 0$, nous pouvons rajouter le terme $\left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b}$ afin d'obtenir une formulation variationnelle augmentée. Le résultat final est alors le suivant :

trouver $U = (u_a, u_c, \mathbf{u}_b) \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times H_{0,\Gamma_c}^1(\Omega_c) \times \mathbf{X}_{b,\perp}$ t.q.

$$\begin{aligned} \forall V = (v_a, v_c, \mathbf{v}_b) \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times H_{0,\Gamma_c}^1(\Omega_c) \times \mathbf{X}_{b,\perp}, \\ {}_2\mathbf{A}(U, V) = {}_2\mathbf{L}(V), \end{aligned} \quad (3.44)$$

avec

$$\begin{aligned} {}_2\mathbf{A}(U, V) := & (\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} - (\beta_a u_a, v_a)_{0,a} + \\ & (|\alpha_c| \nabla u_c, \nabla v_c)_{0,c} + (\beta_c u_c, v_c)_{0,c} + \\ & \left(\frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{u}_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right)_{0,b} \\ & + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_{\zeta_{ab}} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_c, u_c \rangle_{\zeta_{bc}} + \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_{\zeta_{ab}} + \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_b, v_c \rangle_{\zeta_{bc}} \end{aligned}$$

et

$${}_2\mathbf{L}(V) := (f_c, v_c)_{0,c} - (f_a, v_a)_{0,a} - \left(\frac{f_b}{|\beta_b|}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b}.$$

Équivalence avec le problème de départ

Proposition 3.5.1 La formulation variationnelle (3.44) est équivalente au problème (3.40).

Preuve : Commençons par montrer que $\operatorname{rot}(\mathbf{u}_b/|\alpha_b|) = 0$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega_b)$. Pour une donnée $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega_b)$ considérons le problème auxiliaire (3.45) :

trouver $\chi \in \mathbf{H}_{0,\zeta_{ab}}(\operatorname{rot}; \Omega_b) \cap \mathbf{H}_{0,\zeta_{bc}}(\operatorname{rot}; \Omega_b)$ t.q.

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathbf{H}_{0,\zeta_{ab}}(\operatorname{rot}; \Omega_b) \cap \mathbf{H}_{0,\zeta_{bc}}(\operatorname{rot}; \Omega_b), \\ (\chi, \varphi)_{0,b} + \left(\frac{\operatorname{rot} \chi}{|\alpha_b|}, \operatorname{rot} \varphi \right)_{0,b} = (\mathbf{f}, \varphi)_{0,b}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Par construction (cf. § 3.2.3) $\operatorname{rot} \chi \in \mathbb{H}_{\Gamma_b}^\perp$. Nous pouvons alors choisir dans (3.44) $(v_a, v_c) = (0, 0)$ et $\mathbf{v}_b = \operatorname{rot} \chi$. Intégrons par parties pour obtenir le résultat recherché :

$$\left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{f} \right)_{0,b} = 0.$$

Puisque $\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_b}{|\alpha_b|} = 0$ dans Ω_b et $\mathbf{u}_b \in \mathbf{X}_{b,\perp}$, il existe un champ scalaire

$u_b \in H^1(\Omega_b)$ tel que

- $|\alpha_b| \nabla u_b = \mathbf{u}_b$,
- sur toutes les composantes connexes de Γ_b , u_b est égale à une *unique* constante que nous choisirons égale à zéro.

Choisissons alors dans (3.44) $(v_a, v_c) = (0, 0)$, $\mathbf{v}_b \in \mathbf{X}_{b,\perp}$ et intégrons par parties :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\operatorname{div}(|\alpha_b| \nabla u_b)}{\beta_b} - u_b - \frac{f_b}{\beta_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \\ \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, u_a - u_b \rangle_{\zeta_{ab}} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_c, u_c - u_b \rangle_{\zeta_{bc}} = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Nous voulons utiliser dans (3.46) des fonctions test \mathbf{v}_b *ad hoc*. Pour des données $(p, s_{ab}, s_{bc}) \in L^2(\Omega_b) \times (H_{00}^{1/2}(\zeta_{ab}))' \times (H_{00}^{1/2}(\zeta_{bc}))'$ considérons le problème auxiliaire :

trouver $\chi \in H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b)$ t.q.

$$\forall z \in H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b), \quad (|\alpha_b| \nabla \chi, \nabla z)_{0,b} = (p, z)_{0,b} + \langle s_{ab}, z \rangle_{\zeta_{ab}} + \langle s_{bc}, z \rangle_{\zeta_{bc}}. \quad (3.47)$$

Le problème (3.47) est bien posé et sa solution χ vérifie $\operatorname{div} |\alpha_{\underline{b}}| \nabla \chi = -p$, $|\alpha_{\underline{b}}| \nabla \chi \cdot \mathbf{n}_{\underline{b}}|_{\zeta_{a\bar{b}}} = s_{a\bar{b}}$ et $|\alpha_{\underline{b}}| \nabla \chi \cdot \mathbf{n}_{\underline{b}}|_{\zeta_{b\bar{c}}} = s_{b\bar{c}}$. Nous rappelons que $\nabla H_{0,\Gamma_{\underline{b}}}^1(\Omega_{\underline{b}}) \perp \mathbb{H}_{\Gamma_{\underline{b}}}$ et par conséquent nous pouvons choisir dans (3.46) $\mathbf{v}_{\underline{b}} = |\alpha_{\underline{b}}| \nabla \chi$. Dans un premier temps prenons $(s_{a\bar{b}}, s_{b\bar{c}}) = (0, 0)$ pour retrouver la deuxième équation de (3.40). Choisissons $s_{a\bar{b}} = 0$ pour retrouver $u_{\underline{b}}|_{\zeta_{b\bar{c}}} = u_c|_{\zeta_{b\bar{c}}}$ et $s_{b\bar{c}} = 0$ pour retrouver $u_{\underline{b}}|_{\zeta_{a\bar{b}}} = u_a|_{\zeta_{a\bar{b}}}$.

La première et la sixième équation de (3.40) sont retrouvées en choisissant dans (3.44) $(v_c, \mathbf{v}_{\underline{b}}) = (0, 0)$ et en considérant successivement des fonctions test $v_a \in \mathcal{D}(\Omega_a)$ et $v_a \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a)$.

De la même façon la troisième et la septième équation de (3.40) sont retrouvées en choisissant dans (3.44) $(v_a, \mathbf{v}_{\underline{b}}) = (0, 0)$ et en considérant successivement des fonctions test $v_c \in \mathcal{D}(\Omega_c)$ et $v_c \in H_{0,\Gamma_c}^1(\Omega_c)$.

Caractère bien posé de la formulation (3.44)

Comme nous avons fait à plusieurs reprises, nous allons récrire ${}_2\mathbf{A}$ comme la somme d'une forme ${}_2\mathbf{A}_{coer}$ et d'une forme ${}_2\mathbf{A}_{comp}$:

$$\begin{aligned} {}_2\mathbf{A} &= {}_2\mathbf{A}_{coer} + {}_2\mathbf{A}_{comp}, \text{ avec} \\ {}_2\mathbf{A}_{coer}(U, V) &= \alpha_a^{min}(u_a, v_a)_{0,a} + (\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} + \\ &\quad \alpha_c^+(u_c, v_c)_{0,c} + (|\alpha_c| \nabla u_c, \nabla v_c)_{0,c} + \\ &\quad \left(\frac{\mathbf{u}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|}, \mathbf{v}_{\underline{b}} \right)_{0,\underline{b}} + \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{u}_{\underline{b}}}{\beta_{\underline{b}}}, \operatorname{div} \mathbf{v}_{\underline{b}} \right)_{0,\underline{b}} + \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|} \right)_{0,\underline{b}} \\ &\quad + \langle \mathbf{u}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_{\zeta_{a\bar{b}}} + \langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_{\zeta_{a\bar{b}}} + \langle \mathbf{u}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_b, v_c \rangle_{\zeta_{b\bar{c}}} + \langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_c, u_c \rangle_{\zeta_{b\bar{c}}}, \\ {}_2\mathbf{A}_{comp}(U, V) &= -((\alpha_a^{min} + \beta_a)u_a, v_a)_{0,a} - ((\alpha_c^+ - \beta_c)u_c, v_c)_{0,c}. \end{aligned}$$

L'injection de $H^1(\Omega_i)$ dans $L^2(\Omega_i)$ ($i = a, c$) étant compacte, ${}_2\mathbf{A}_{comp}$ est un terme de perturbation compacte par rapport ${}_2\mathbf{A}_{coer}(U, V)$.

Avant de nous occuper de la coercivité éventuelle de ${}_2\mathbf{A}_{coer}$, introduisons l'inégalité (3.48) qui dans la suite jouera le rôle de (3.16) au cours de § 3.2 et de § 3.3 :

soit la constante $c_B \in \mathbb{R}_*^+$ telle que

$$\begin{aligned} \forall (v_a, \mathbf{v}_{\underline{b}}) \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times \mathbf{X}_{\underline{b},\perp}, \\ |\langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_{\zeta_{a\bar{b}}}| \leq c_B \|\mathbf{v}_{\underline{b}}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_{\underline{b}})} \|v_a\|_{H^1(\Omega_a)} \end{aligned} \quad (3.48)$$

soit vérifiée de façon optimale.

Remarque 3.5.1 Nous observons que, d'après le résultat de la proposition A.E.3, plus la bande est fine, plus la constante c_B est grande et, par voie de conséquence, plus les conditions sur le contraste que nous allons introduire au sein du théorème suivant et du théorème 3.5.2 sont strictes.

★

Théorème 3.5.1 Si le rapport

$$\frac{\alpha_a^{min}}{\alpha_{\underline{b}}^+} > c_B^2 \max \left[1, \frac{\beta_{\underline{b}}^{max}}{\alpha_{\underline{b}}^+} \right] \quad (3.49)$$

alors la forme ${}_2\mathbf{A}_{coer}$ est coercive sur $\{H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times H_{0,\Gamma_c}^1(\Omega_c) \times \mathbf{X}_{\underline{b}}\}^2$.

Preuve : Calculons ${}_2\mathbf{A}_{coer}(V, V)$ pour $V = (v_a, v_c, \mathbf{v}_{\underline{b}}) \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times H_{0,\Gamma_c}^1(\Omega_c) \times \mathbf{X}_{\underline{b},\perp}$:

$$\begin{aligned} {}_2\mathbf{A}_{coer}(V, V) = & \alpha_a^{min}(v_a, v_a)_{0,a} + (\alpha_a \nabla v_a, \nabla v_a)_{0,a} + \\ & \alpha_c^+(v_c, v_c)_{0,c} + (|\alpha_c| \nabla v_c, \nabla v_c)_{0,c} + 2\langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_{\zeta_{a\bar{b}}} + \\ & \left(\frac{\mathbf{v}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|}, \mathbf{v}_{\underline{b}} \right)_{0,\bar{b}} + \left(\frac{\text{div } \mathbf{v}_{\underline{b}}}{\beta_{\underline{b}}}, \text{div } \mathbf{v}_{\underline{b}} \right)_{0,\bar{b}} + \left(\text{rot } \frac{\mathbf{u}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|}, \text{rot } \frac{\mathbf{v}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|} \right)_{0,\bar{b}} ; \end{aligned} \quad (3.50)$$

Les termes $(|\alpha_c| \nabla v_c, \nabla v_c)_{0,c} + \alpha_c^+(v_c, v_c)_{0,c}$ constituent une norme sur $H_{0,\Gamma_c}^1(\Omega_c)$. En utilisant alors l'inégalité (3.48) (à la place de l'inégalité (3.16)) pour estimer les termes d'interface restants, la démonstration se termine de la même façon que pour le théorème 3.2.1. ■

3.5.2 Méthode bande pour la formulation trois champs

Nous avons vu au § 3.3 que la formulation trois champs est plus générale et robuste que la formulation deux champs. Il est donc intéressant d'étendre à la première l'approche illustrée au § 3.5.1 pour cette dernière.

Construction de la formulation

Introduisons l'espace fonctionnel

$$\mathcal{K}_{\zeta_{a\bar{b}}, \zeta_{bc}} := \left\{ (p, q, r) \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times H_{0,\Gamma_{\bar{b}}}^1(\Omega_{\bar{b}}) \times H_{0,\Gamma_c}^1(\Omega_c), \text{ t.q. } \right. \\ \left. p|_{\zeta_{a\bar{b}}} = q|_{\zeta_{a\bar{b}}}, \quad q|_{\zeta_{bc}} = r|_{\zeta_{bc}} \right\}.$$

Pour obtenir la formulation à trois champs avec bande, considérons des fonctions test $((v_a, v_{\bar{b}}, v_c), \mathbf{v}_{\underline{b}}) \in \mathcal{K}_{\zeta_{a\bar{b}}, \zeta_{bc}} \times \mathbf{X}_{\underline{b},\perp}$ puis

- prenons le produit scalaire dans $L^2(\Omega_a)$ entre la première équation de (3.40) et v_a , intégrons par parties et utilisons la sixième équation de (3.40) :

$$(\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} - (\beta_a u_a, v_a)_{0,a} + \langle \mathbf{u}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_{\zeta_{a\bar{b}}} = -(f_a, v_a)_{0,a}; \quad (3.51)$$

- prenons le produit scalaire dans $L^2(\Omega_c)$ entre la troisième équation de (3.40) et v_c , intégrons ensuite par parties en utilisant la septième équation de (3.40); multiplions ce résultat par 2 :

$$2(|\alpha_c| \nabla u_c, \nabla v_c)_{0,c} + 2(\beta_c u_c, v_c)_{0,c} + 2\langle \mathbf{u}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_{\bar{b}}, v_c \rangle_{\zeta_{bc}} = 2(f_c, v_c)_{0,c} \quad (3.52)$$

- prenons le produit scalaire dans $L^2(\Omega_{\bar{b}})$ entre la divergence de $\mathbf{v}_{\underline{b}}$ et la deuxième équation de (3.40) et multiplions ce résultat par un facteur $\rho > 0$:

$$\rho(\text{div } \mathbf{u}_{\underline{b}}, \text{div } \mathbf{v}_{\underline{b}})_{0,\bar{b}} - \rho(\beta_{\bar{b}} u_{\bar{b}}, \text{div } \mathbf{v}_{\underline{b}})_{0,\bar{b}} = -\rho(f_{\bar{b}}, \text{div } \mathbf{v}_{\underline{b}})_{0,\bar{b}} \quad (3.53)$$

– considérons les deux identités (on rappelle $\mathbf{u}_{\underline{b}} = |\alpha_{\underline{b}}| \nabla u_{\underline{b}}$)

$$(\operatorname{div} \mathbf{u}_{\underline{b}}, v_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} + (|\alpha_{\underline{b}}| \nabla u_{\underline{b}}, \nabla v_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} + \langle \mathbf{u}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_{\zeta_{a\bar{b}}} + \langle \mathbf{u}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_c, v_c \rangle_{\zeta_{bc}} = 0 \quad (3.54)$$

$$\left(\frac{\mathbf{u}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|}, \mathbf{v}_{\underline{b}} \right)_{0,\underline{b}} + (u_{\underline{b}}, \operatorname{div} \mathbf{v}_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} + \langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_{\zeta_{a\bar{b}}} + \langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_c, u_c \rangle_{\zeta_{bc}} = 0 \quad (3.55)$$

Enfin, sommons entre eux les résultats de ces quatre derniers points et rajoutons le terme $\left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|} \right)_{0,\underline{b}}$ afin d'obtenir la formulation variationnelle augmentée suivante :

trouver $U = ((u_a, u_{\underline{b}}, u_c), \mathbf{u}_{\underline{b}}) \in \mathcal{K}_{\zeta_{a\bar{b}}, \zeta_{bc}} \times \mathbf{X}_{\underline{b}, \perp}$ t.q.

$$\forall V = ((v_a, v_{\underline{b}}, v_c), \mathbf{v}_{\underline{b}}) \in \mathcal{K}_{\zeta_{a\bar{b}}, \zeta_{bc}} \times \mathbf{X}_{\underline{b}, \perp}, \quad (3.56)$$

$${}_3\mathbf{A}^\rho(U, V) = {}_3\mathbf{L}^\rho(V),$$

avec

$$\begin{aligned} {}_3\mathbf{A}^\rho(U, V) := & (\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} - (\beta_a u_a, v_a)_{0,a} + 2 \langle \mathbf{u}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_{\zeta_{a\bar{b}}} + \\ & 2(|\alpha_c| \nabla u_c, \nabla v_c)_{0,c} + 2(\beta_c u_c, v_c)_{0,c} + 2 \langle \mathbf{u}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_c, v_c \rangle_{\zeta_{bc}} + \\ & \left(\frac{\mathbf{u}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|}, \mathbf{v}_{\underline{b}} \right)_{0,\underline{b}} + \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|} \right)_{0,\underline{b}} + \rho (\operatorname{div} \mathbf{u}_{\underline{b}}, \operatorname{div} \mathbf{v}_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} + \\ & (|\alpha_{\underline{b}}| \nabla u_{\underline{b}}, \nabla v_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} + (\operatorname{div} \mathbf{v}_{\underline{b}}, u_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} - \rho(\beta_{\underline{b}} u_{\underline{b}}, \operatorname{div} \mathbf{v}_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} + \\ & (\operatorname{div} \mathbf{u}_{\underline{b}}, v_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} + \langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_{\zeta_{a\bar{b}}} + \\ & \langle \mathbf{u}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_c, v_c \rangle_{\zeta_{bc}} + \langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_c, u_c \rangle_{\zeta_{bc}} \end{aligned}$$

et

$${}_3\mathbf{L}(V) := 2(f_c, v_c)_{0,c} - (f_a, v_a)_{0,a} - \rho(f_{\underline{b}}, \operatorname{div} \mathbf{v}_{\underline{b}})_{0,\underline{b}}.$$

Équivalence avec le problème de départ

Proposition 3.5.2 La formulation variationnelle (3.56) est équivalente au problème (3.40).

Preuve : Pour obtenir la première (respectivement la troisième) équation de (3.40) considérons $(v_{\underline{b}}, v_c, \mathbf{v}_{\underline{b}}) = (0, 0, 0)$ et $v_a \in \mathcal{D}(\Omega_a)$ (respectivement $(v_a, v_{\underline{b}}, \mathbf{v}_{\underline{b}}) = (0, 0, 0)$ et $v_c \in \mathcal{D}(\Omega_c)$) et différencions au sens des distributions.

Pour retrouver $\operatorname{rot}(\mathbf{u}_{\underline{b}}/|\alpha_{\underline{b}}|) = 0$ nous suivons la même démarche qu'à la proposition 3.5.1 en prenant dans (3.56) $(v_a, v_{\underline{b}}, v_c) = (0, 0, 0)$ et $\mathbf{v}_{\underline{b}} = \operatorname{rot} \chi$. (Nous rappelons que χ est la solution du problème (3.45)).

Posons ensuite $\eta = -\operatorname{div} \mathbf{u}_{\underline{b}} + \beta_{\underline{b}} u_{\underline{b}} - f_{\underline{b}}$ et $\tau = \nabla u_{\underline{b}} - \frac{\mathbf{u}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|}$; par construction $\eta \in L^2(\Omega_{\underline{b}})$, $\operatorname{rot} \tau = 0$ dans $\Omega_{\underline{b}}$, $\tau \times \mathbf{n}|_{\Gamma_{\underline{b}}} = 0$ et $\tau \in \mathbb{H}_{\Gamma_{\underline{b}}}^1$ (en effet, on rappelle $\nabla H_{0,\Gamma_{\underline{b}}}^1 \perp \mathbb{H}_{\Gamma_{\underline{b}}}$ et $\mathbf{u}_{\underline{b}} \in \mathbf{X}_{\underline{b}, \perp}$).

Choisissons alors dans (3.56) des fonctions test $(v_a, v_{\underline{b}}, v_c) = (0, 0, 0)$ et $\mathbf{v}_{\underline{b}} \in \mathcal{D}(\Omega_{\underline{b}})^d$, puis différencions au sens des distributions pour obtenir $\rho \nabla \eta = \tau$. Par conséquent $\eta \in H^1(\Omega_{\underline{b}})$ et η est égale, sur toutes les composantes connexes de $\Gamma_{\underline{b}}$, à une unique constante réelle $c_{\underline{b}}$ (cf. § 3.2.3).

Montrons alors que η est égale à $c_{\underline{b}}$ sur tout le bord $\partial\Omega_{\underline{b}}$. Pour cela prenons dans (3.56) des fonctions test scalaires $(v_a, v_b, v_c) = 0$ et une fonction test vectorielle $\mathbf{v}_{\underline{b}} \in \mathbf{X}_{\underline{b},\perp}$ telle que $(\operatorname{div} \mathbf{v}_b, 1)_{0,\underline{b}} = 0$, puis intégrons par parties pour obtenir

$$\forall \mathbf{v}_{\underline{b}} \in \mathbf{X}_{\underline{b},\perp} \text{ t.q. } (\operatorname{div} \mathbf{v}_b, 1)_{0,\underline{b}} = 0, \quad \langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_{\underline{b}}, \eta - c_{\underline{b}} \rangle_{\partial\Omega_{\underline{b}}} = 0. \quad (3.57)$$

Considérons à présent des fonctions test $\mathbf{v}_{\underline{b}}$ construites de la façon suivante : résolvons le problème (3.47) avec $p = 0$, $s_{a\underline{b}} = c_{\underline{b}} - \eta$, $s_{\underline{b}c} = c_{\underline{b}} - \eta$ et posons $\mathbf{v}_{\underline{b}} = |\alpha_{\underline{b}}| \nabla \chi$. Par construction $\mathbf{v}_{\underline{b}} \in \mathbb{H}_{\Gamma_{\underline{b}}}^{\perp}$, $\operatorname{div} \mathbf{v}_{\underline{b}} = 0$ dans $\Omega_{\underline{b}}$, $\mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}|_{\zeta_{a\underline{b}}} = c_{\underline{b}} - \eta$ et $\mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}|_{\zeta_{\underline{b}c}} = c_{\underline{b}} - \eta$. Choisissons alors ce $\mathbf{v}_{\underline{b}}$ particulier dans (3.57) pour obtenir

$$0 = \langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_{\underline{b}}, \eta - c_{\underline{b}} \rangle_{\partial\Omega_{\underline{b}}} = \langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_{\underline{b}}, \eta - c_{\underline{b}} \rangle_{\zeta_{a\underline{b}}} + \langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_{\underline{b}}, \eta - c_{\underline{b}} \rangle_{\zeta_{\underline{b}c}} = -\|\eta - c_{\underline{b}}\|_{\zeta_{a\underline{b}}}^2 - \|\eta - c_{\underline{b}}\|_{\zeta_{\underline{b}c}}^2.$$

À partir de ce moment la suite de la démonstration est identique à celle de la proposition 3.3.1. \square

Caractère bien posé de la formulation (3.56)

Comme nous en avons désormais l'habitude, exprimons ${}_3\mathbf{A}^{\rho}$ comme une somme des termes ${}_3\mathbf{A}_{coer}^{\rho}$ et ${}_3\mathbf{A}_{comp}^{\rho}$, ce dernier terme étant une perturbation compacte du premier :

$$\begin{aligned} {}_3\mathbf{A}^{\rho} &= A_{coer}^{\rho} + A_{comp}^{\rho}, \text{ avec} \\ {}_3\mathbf{A}_{coer}^{\rho}(U, V) &:= \alpha_a^{min}(u_a, v_a)_{0,a} + (\alpha_a \nabla u_a, \nabla v_a)_{0,a} + \\ &\quad 2\alpha_c^-(u_c, v_c)_{0,c} + 2(|\alpha_c| \nabla u_c, \nabla v_c)_{0,c} + \\ &\quad (u_{\underline{b}}, v_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} + (|\alpha_{\underline{b}}| \nabla u_{\underline{b}}, \nabla v_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} + \\ &\quad \left(\frac{\mathbf{u}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|}, \mathbf{v}_{\underline{b}} \right)_{0,\underline{b}} + \rho(\operatorname{div} \mathbf{u}_{\underline{b}}, \operatorname{div} \mathbf{v}_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} + \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|}, \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}_{\underline{b}}}{|\alpha_{\underline{b}}|} \right)_{0,\underline{b}} + \\ &\quad 2\langle \mathbf{u}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_{\zeta_{a\underline{b}}} + 2\langle \mathbf{u}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_{\underline{b}}, v_c \rangle_{\zeta_{\underline{b}c}} + \langle \mathbf{u}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_c, v_c \rangle_{\zeta_{\underline{b}c}} + \\ &\quad \langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_{\zeta_{a\underline{b}}} + \langle \mathbf{v}_{\underline{b}} \cdot \mathbf{n}_c, u_c \rangle_{\zeta_{\underline{b}c}}, \\ {}_3\mathbf{A}_{comp}^{\rho}(U, V) &:= -((\alpha_a^{min} + \beta_a)u_a, v_a)_{0,a} - 2((\alpha_c^- - \beta_c)u_c, v_c)_{0,c} - \\ &\quad (u_{\underline{b}}, v_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} + (\operatorname{div} \mathbf{v}_{\underline{b}}, u_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} + \\ &\quad (\operatorname{div} \mathbf{u}_{\underline{b}}, v_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} - \rho(\beta_{\underline{b}}u_{\underline{b}}, \operatorname{div} \mathbf{v}_{\underline{b}})_{0,\underline{b}} \end{aligned}$$

Théorème 3.5.2 Supposons le rapport

$$\frac{\alpha_a^{min}}{\alpha_{\underline{b}}^+} > \frac{5}{4} c_B^2$$

avec c_B définie dans (3.48). Alors, pour $\rho > \max[1, (\alpha_{\underline{b}}^+)^{-1}]$ la forme ${}_3\mathbf{A}_{coer}^{\rho}$ est coercive sur $\{\mathcal{K}_{\zeta_{a\underline{b}}\zeta_{\underline{b}c}} \times \mathbf{X}_{\underline{b},\perp}\}^2$.

Preuve : Évaluons ${}_3\mathbf{A}_{coer}^\rho(V, V)$ pour $V = ((v_a, v_b, v_c), \mathbf{v}_b) \in \mathcal{K}_{\zeta_{ab}\zeta_{bc}} \times \mathbf{X}_{b,\perp}$; la somme des termes $\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, v_c \rangle_{\zeta_{bc}}$ et $\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_c, v_c \rangle_{\zeta_{bc}}$ étant nulle nous avons

$$\begin{aligned} {}_3\mathbf{A}_{coer}^\rho(V, V) &= \alpha_a^{min} \|v_a\|_{0,a}^2 + (\alpha_a \nabla v_a, \nabla v_a)_{0,a} + \\ & 2\alpha_c^- \|v_c\|_{0,c}^2 + 2(|\alpha_c| \nabla v_c, \nabla v_c)_{0,c} + \\ & \|v_b\|_{0,b}^2 + (|\alpha_b| \nabla v_b, \nabla v_b)_{0,b} + \\ & \left(\frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|}, \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + \left\| \mathbf{rot} \frac{\mathbf{v}_b}{|\alpha_b|} \right\|_{0,b}^2 + \rho \|\operatorname{div} \mathbf{v}_b\|_{0,b}^2 + \\ & 3\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_{\zeta_{ab}}. \end{aligned}$$

Les termes $2(|\alpha_c| \nabla v_c, \nabla v_c)_{0,c} + 2\alpha_c^- \|v_c\|_{0,c}^2$ constituant une norme sur $H_{0,\Gamma_c}^1(\Omega_c)$, l'utilisation de (3.48) à la place de (3.16) pour l'estimation des termes d'interface permet de conclure de la même façon qu'au théorème 3.3.1.

Validations numériques des F.V. pour le problème modèle

4.1 Introduction

Au cours de ce chapitre nous nous proposons de vérifier numériquement la validité des formulations variationnelles que nous avons construites pour résoudre le problème modèle (1.24). Nous commencerons par considérer un cas simple pour lequel la solution de (1.27) est connue analytiquement : nous pourrons alors étudier les écarts entre les solutions calculées en discrétisant les formulations variationnelles et la solution analytique. Après cette première vérification, nous pourrons considérer des cas de figure plus complexes pour lesquels la solution analytique n'est plus accessible : nous pourrons alors étudier les écarts entre les différents résultats fournis d'une part par la formulation naturelle et d'autre part par les deux formulations enrichies à deux et trois champs.

Les résultats numériques que nous allons présenter ont été obtenus à l'aide du code MÉLINA. Il s'agit d'une bibliothèque de procédures écrites en Fortran 77¹ qui permettent de résoudre, par la méthode des éléments finis, des problèmes aux limites gouvernés par des équations aux dérivées partielles à deux ou trois dimensions d'espace. MÉLINA, développé conjointement à l'université de Rennes et à l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA sous la direction de Daniel Martin, est essentiellement un code de recherche et il est distribué sous licence GPL.

4.2 Erreur par rapport à une solution analytique

Nous considérons une géométrie très simple de sorte que la solution du problème modèle scalaire puisse être calculée aisément : soit $\Omega_a = [0, 1] \times [0, 1]$ et $\Omega_b = [1, 4] \times [0, 1]$ (cf. figure 4.1). Pour simplifier ultérieurement le traitement nous supposons tout au long de ce chapitre α_i, β_i constants sur Ω_i ($i = a, b$). Il est aisé de vérifier que pour une donnée f telle que

$$f_i(x, y) = \left(-\alpha_i \pi^2 \left(\gamma^2 + \frac{1}{4} \right) + \beta_i \right) \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \sin(\gamma \pi y), \quad \forall x, y \in \Omega_i, \quad \gamma \in \mathbb{R}_*^+$$

la solution exacte du problème modèle scalaire est

$$u_{ex}(x, y) := \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \sin(\gamma \pi y), \quad \forall x, y \in \Omega.$$

¹MÉLINA++, une version en C++ de MÉLINA est actuellement en cours de développement.



FIG. 4.1 – Représentation du domaine Ω tel que $\Omega_a = [0, 1] \times [0, 1]$ et $\Omega_b = [1, 4] \times [0, 1]$.

Nous choisissons d'utiliser des éléments finis nodaux pour discrétiser les formulations (2.1), (3.7) et (3.27). De plus, pour tous les champs d'une même formulation, nous choisissons le même degré d'interpolation.

Nous remarquons au passage que, à cause des contraintes liées à la formulation à deux champs (3.7), nous devons choisir $\beta_b > 0$ (cf. la preuve du théorème 3.2.1).

Pour ces trois formulations nous choisissons cette donnée volumique *ad hoc* de sorte que les solutions discrétisées soient des approximation de u_{ex} .

Pour nos expériences numérique nous allons considérer une famille de triangulations uniformes du domaine Ω respectant la partition (tout triangle est soit inclus dans Ω_a , soit inclus dans Ω_b).

Chaque élément de la famille est caractérisé par le pas du maillage h . Ainsi, pour chaque maillage retenu, nous pouvons calculer l'erreur relative : notons u_h^N (resp. u_h^{2ch} et u_h^{3ch}) la solution obtenue en discrétisant la formulation naturelle (resp. la formulation à deux champs et la formulation à trois champs). Nous posons

$$e_l := \frac{\|u_{ex} - u_h^l\|_{H^1(\Omega)}}{\|u_{ex}\|_{H^1(\Omega)}}, \text{ pour } l \in \{N, 2ch, 3ch\}.$$

Sur la figure 4.2 et sur la figure 4.3 nous traçons le comportement de $\log(e_l)$ en fonction du logarithme du pas du maillage h , respectivement dans le cas d'une interpolation $P1$ et dans le cas d'interpolation $P2$. Les valeurs reportés sur les courbes ont été obtenues pour $\kappa_\epsilon = 4$ ($\epsilon_a = 4, \epsilon_b = -1$), $\beta_a = \beta_b = 1$ et $\gamma = 5$. Dans le cas des interpolations $P1$ les pentes des droites sont proches de 1, alors qu'elles sont proches de 2 pour les interpolations $P2$. En ce qui concerne les formulations enrichies, ce résultat est en accord avec la théorie standard des éléments finis. Dans le cas de la formulation naturelle, nous retrouvons là une confirmation expérimentale de l'estimation établie au § 2.4.

Remarque 4.2.1 Lorsqu'on s'intéresse aux erreurs

$$e_{l,i} := \frac{\|u_{ex} - u_h^l\|_{1,i}}{\|u_{ex}\|_{1,i}}, \quad l \in \{N, 2ch, 3ch\}, \quad i = a, b,$$

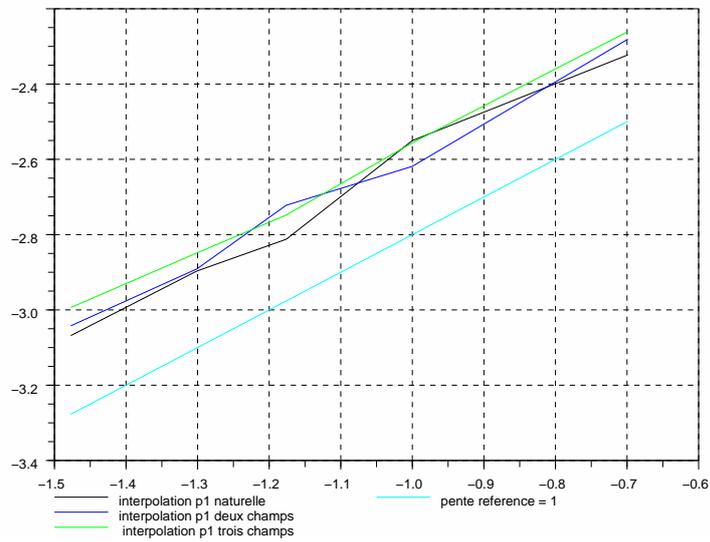


FIG. 4.2 – Évolution de $\log e_l$ ($l \in \{N, 2ch, 3ch\}$) en fonction de $\log(h)$ dans le cas d'une interpolation linéaire.

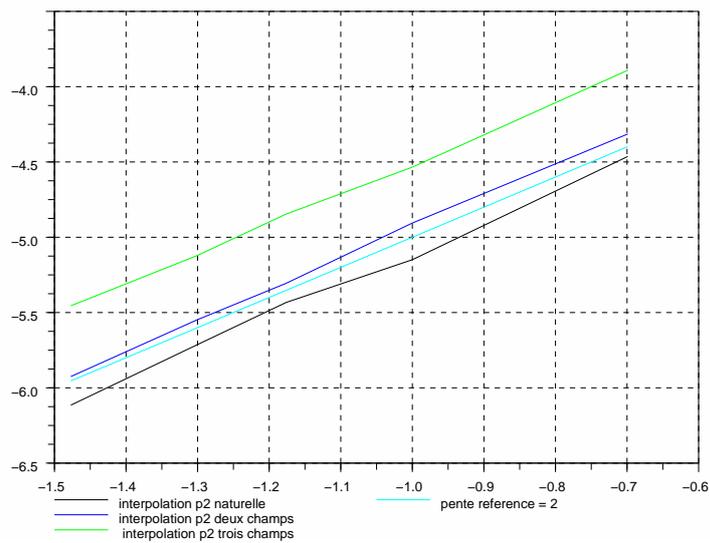


FIG. 4.3 – Évolution de $\log e_l$ ($l \in \{N, 2ch, 3ch\}$) en fonction de $\log(h)$ dans le cas d'une interpolation quadratique.

on retrouve pour les interpolations $P1$ et $P2$ un comportement analogue à celui des figures 4.2 et 4.3.

★

Nous constatons avec surprise que la formulation variationnelle naturelle, qui est la moins coûteuse, est la plus précise alors que la formulation la moins précise est celle à trois champs, pour laquelle la solution est sur-déterminée.

Nous nous proposons aussi de suivre, à maillage fixé, l'évolution de l'erreur relative en fonction du contraste κ_ϵ : sur les figures 4.4-4.7 nous traçons, pour les deux maillages caractérisés par $h = 1/5$ et $h = 1/20$, le comportement de $\log e_l$ en fonction du rapport $|\kappa_\epsilon| = \alpha_a/|\alpha_b|$. Les solutions approchées sont calculées en utilisant les interpolations $P1$ et $P2$. Sur ces figures nous notons immédiatement que les trois erreurs relatives e_N , e_{2ch} et e_{3ch} ont un comportement analogue : la qualité des solutions approchées dégénère lorsque le rapport κ_ϵ tend vers -1 et ce phénomène paraît plus accentué pour les interpolations linéaires. Nous pouvons de plus vérifier que, comme on s'y attendait et pour toute valeur du contraste κ_ϵ , les interpolations $P2$ sont plus précises que les $P1$.

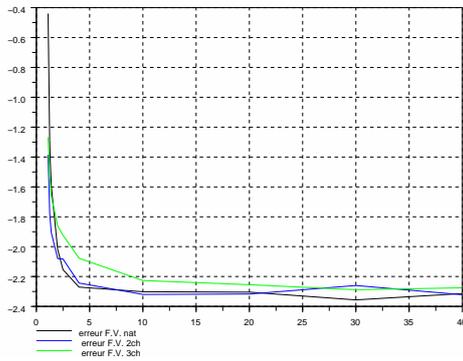


FIG. 4.4 – $\log e_l$ en fonction de $|\kappa_\epsilon|$, interpolation $P1$, $h = 1/5$

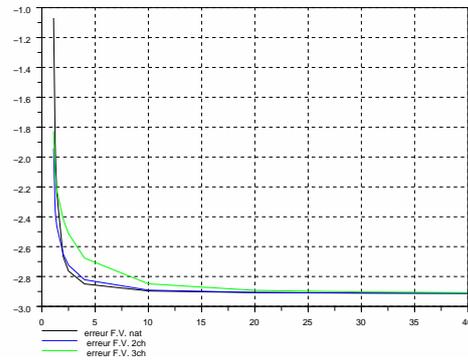


FIG. 4.5 – $\log e_l$ en fonction de $|\kappa_\epsilon|$, interpolation $P1$, $h = 1/20$

4.3 Comparaisons entre les différentes formulations

La solution u_{ex} qui a été approchée au cours du paragraphe précédent est telle que $\partial_{\mathbf{n}} u_{ex}|_{\zeta} = 0$, ce qui pourrait, du point de vue numérique, cacher la difficulté liée à la condition de transmission non coercive. Nous souhaitons vérifier la validité des formulations variationnelles dans une configuration plus générale où la trace normale de la solution du problème modèle ne s'annule a priori pas sur ζ : nous fournissons une donnée volumique f telle que $f_a = -x$, $f_b = x$. Pour cette donnée nous ne disposons pas de solution

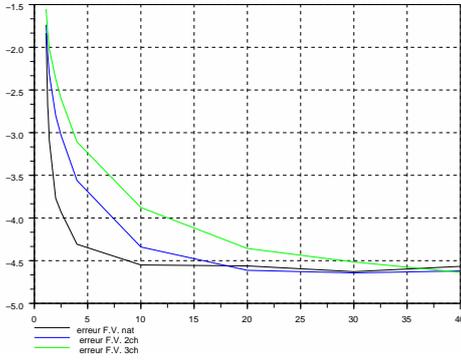


FIG. 4.6 – $-\log e_l$ en fonction de $|\kappa_\epsilon|$, interpolation P2, $h = 1/5$

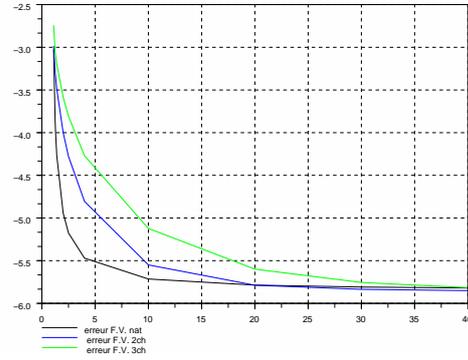


FIG. 4.7 – $-\log e_l$ en fonction de $|\kappa_\epsilon|$, interpolation P2, $h = 1/20$

exacte et, par conséquent, nous ne pouvons pas effectuer le même traitement qu'au paragraphe précédent. Nous pouvons cependant comparer entre eux les résultats fournis par les différentes formulations variationnelles.

À cause des conditions sur le contraste assurant le caractère bien posé des formulations enrichies, il faudra utiliser (3.7) et (3.27) pour les cas où $|\kappa_\epsilon| > 1$. Pour les cas où $|\kappa_\epsilon| < 1$ on choisira plutôt les formulations (3.22) et (3.39). De plus, à cause des contraintes liées aux formulations à deux champs (cf. la preuve du théorème 3.2.1), dans la suite de nos expériences nous choisirons

- (i) $\omega = \mu_a = \mu_b = 1$ (donc $\beta_a = \beta_b = 1$), pour $|\kappa_\epsilon| > 1$,
- (ii) $\omega = 1, \mu_a = \mu_b = -1$ (donc $\beta_a = \beta_b = -1$), pour $|\kappa_\epsilon| < 1$.

Nous rappelons que la norme de l'opérateur \mathcal{R} (introduit au § 2.3) est égale à 1 (cf. la proposition A.D.1). Par conséquent, d'après le théorème 2.3.1, la formulation variationnelle naturelle (2.1) est bien posée si $|\kappa_\epsilon| > C_{b \leftarrow a}^2$.

Pour les valeurs particulières du cas (i) on remarque que

- d'après le corollaire 3.2.1 et la proposition A.E.1, la formulation variationnelle à deux champs (3.7) est bien posée si $|\kappa_\epsilon| > C_{b \leftarrow a}^2$;
- d'après le corollaire 3.3.1 et la proposition A.E.1, la formulation variationnelle à trois champs (3.27) est bien posée si $|\kappa_\epsilon| > 5/4 C_{b \leftarrow a}^2$.

De façon analogue, pour les valeurs particulières du cas (ii)

- la formulation variationnelle à deux champs (3.22) est bien posée si $|\kappa_\epsilon|^{-1} > C_{a \leftarrow b}^2$;
- la formulation variationnelle à trois champs (3.39) est bien posée si $|\kappa_\epsilon|^{-1} > 5/4 C_{a \leftarrow b}^2$.

4.3.1 Cas d'une interface plane

Considérons la même géométrie rectangulaire qu'au paragraphe précédent : pour la mise en oeuvre numérique nous utilisons le maillage uniforme caractérisé par $h = 1/20$ (constitué de 3200 éléments et 1700 sommets). Dans le cas de cette géométrie $C_{b \leftarrow a} = 1$ (cf. le corollaire A.E.1) et $C_{a \leftarrow b} = \sqrt{3}$ (cf. la proposition A.E.3).

Nous allons estimer les écarts $\|u_h^N - u_h^{3ch}\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|u_h^N - u_h^{2ch}\|_{H^1(\Omega)}$ pour différentes valeurs du contraste. L'évolution du logarithme décimal de ces écarts en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|)$ est reportée sur la figure 4.8. Sur les figures

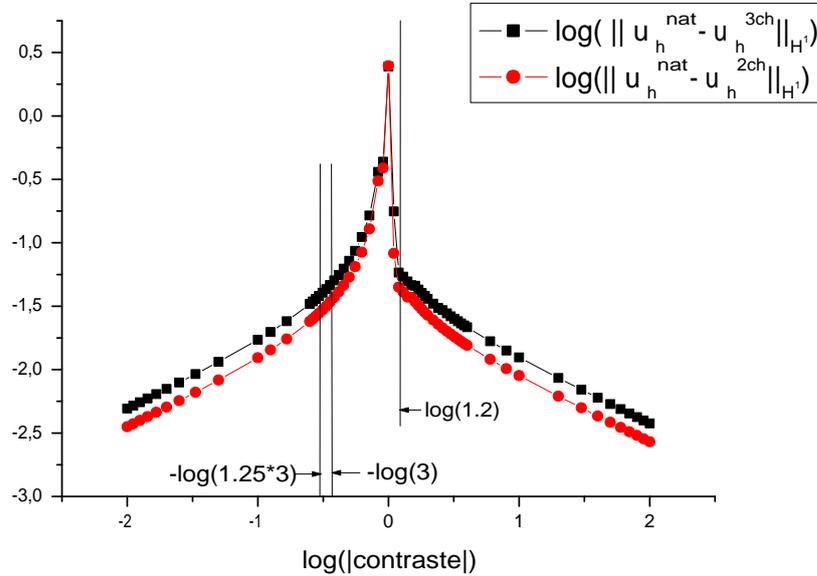


FIG. 4.8 – Évolution de $\log(\|u_h^N - u_h^{3ch}\|_{H^1(\Omega)})$ et $\log(\|u_h^N - u_h^{2ch}\|_{H^1(\Omega)})$, calculés dans la géométrie rectangulaire pour $f_a = -x$, $f_b = x$, en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|)$.

4.9, 4.10, 4.11 nous représentons la solution calculée respectivement par la formulation naturelle, par la formulation à deux champs et par la formulation à trois champs dans le cas où le contraste $\kappa_\epsilon = -4$. De façon analogue, sur les figures 4.12, 4.13, 4.14 nous représentons la solution calculée respectivement par la formulation naturelle, par la formulation à deux champs et par la formulation à trois champs dans le cas où le rapport $\kappa_\epsilon = -1.1$. Nous pouvons remarquer que, à part pour les valeurs du contraste proches de la valeur critique -1 , les résultats obtenus par les trois formulations sont très proches entre eux et leurs écarts tendent à diminuer quand la valeur absolue du contraste augmente ($|\kappa_\epsilon| \gg 1$) ou diminue ($|\kappa_\epsilon| \ll 1$). Le comportement que nous venons de mettre en évidence est donc compatible avec les prévisions théoriques.

4.3.2 Cas d'une interface curviligne

Considérons la géométrie reporté sur la figure 4.15.a pour laquelle l'interface ζ est curviligne. Ce domaine est maillé comme reporté sur la figure 4.15.b. Nous allons effectuer le même traitement qu'au § 4.3.1 : les évolutions des grandeurs $\log(\|u_h^N - u_h^{3ch}\|_{H^1(\Omega)})$ et $\log(\|u_h^N - u_h^{2ch}\|_{H^1(\Omega)})$ en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|)$ sont tracées sur la figure 4.16. Sur les figures 4.17, 4.18, 4.19 nous représentons la solution calculée respectivement par la formula-

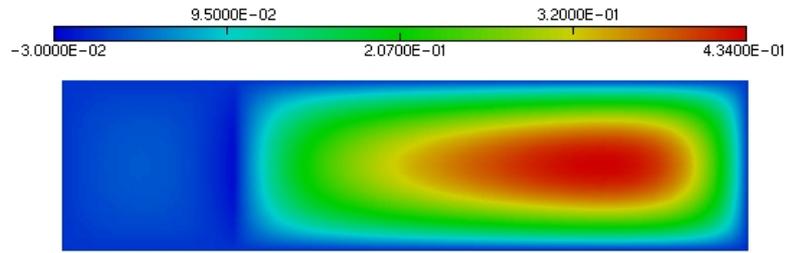


FIG. 4.9 – Solution u_h^N calculée pour $\alpha_a = 4$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

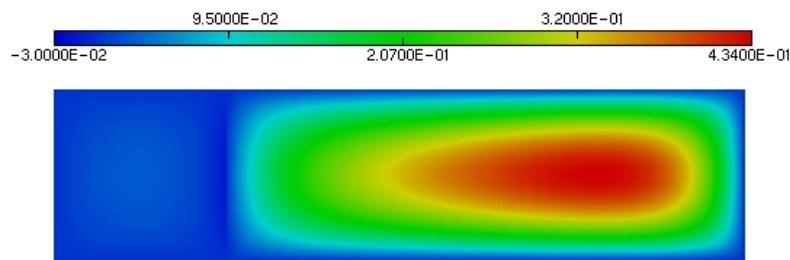


FIG. 4.10 – Solution u_h^{2ch} calculée pour $\alpha_a = 4$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

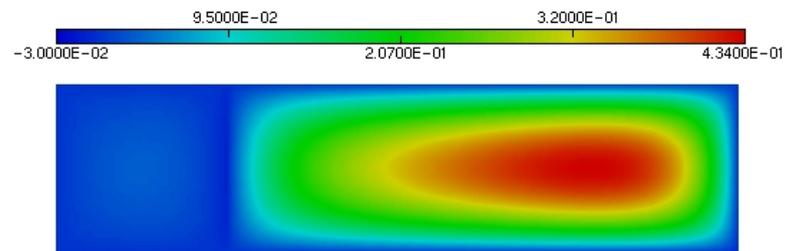


FIG. 4.11 – Solution u_h^{3ch} calculée pour $\alpha_a = 4$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

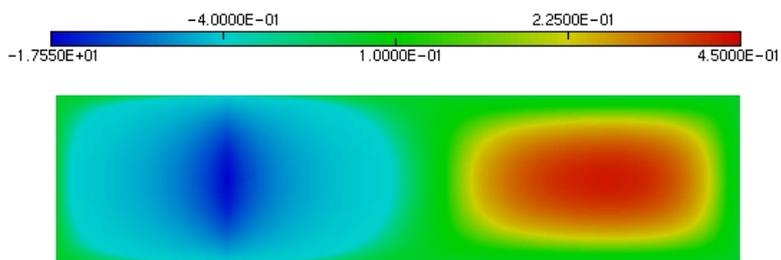


FIG. 4.12 – Solution u_h^N calculée pour $\alpha_a = 1.1$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

4. VALIDATIONS NUMÉRIQUES DES F.V. POUR LE PROBLÈME MODÈLE 76

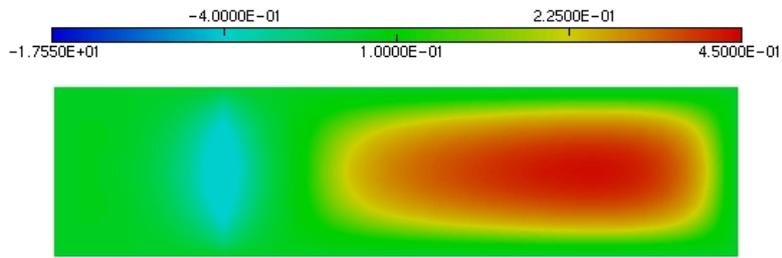


FIG. 4.13 – Solution u_h^{2ch} calculée pour $\alpha_a = 1.1$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

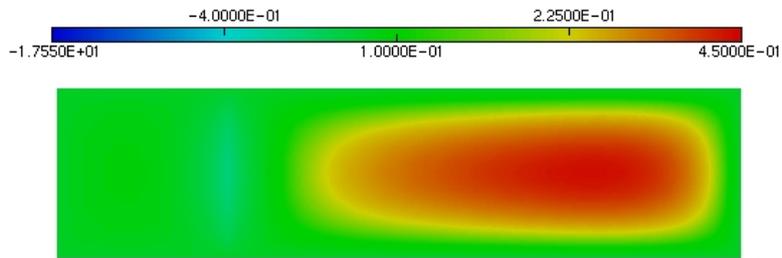


FIG. 4.14 – Solution u_h^{3ch} calculée pour $\alpha_a = 1.1$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = +x$.

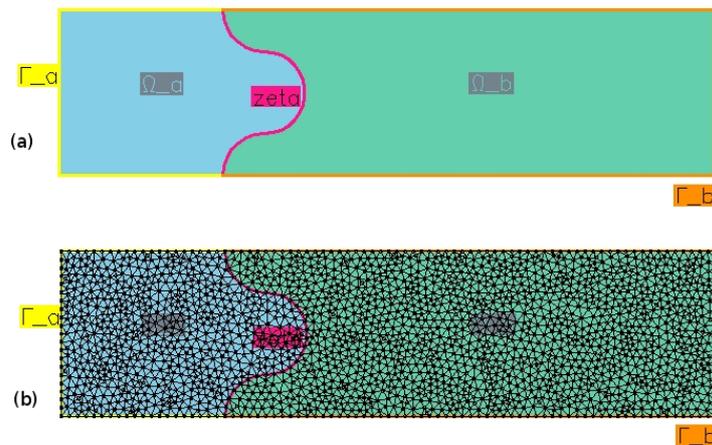


FIG. 4.15 – En (a), représentation du domaine Ω considéré. Ce domaine est maillé comme reporté en (b). Ce maillage est caractérisé par 3852 éléments et 2027 sommets.

tion naturelle, par la formulation à deux champs et par la formulation à trois champs dans le cas où $\kappa_\epsilon = -20$. De façon analogue, sur les figures 4.20, 4.21, 4.22 nous représentons la solution calculée respectivement par la formulation naturelle, par la formulation à deux champs et par la formulation à trois champs dans le cas où le rapport $\kappa_\epsilon = -4$.

Nous observons que les écarts entre les différentes formulations peuvent être importants même pour des valeurs de κ_ϵ éloignées de la valeur critique $\kappa_\epsilon = -1$: les conditions sur le contraste sont donc plus strictes que dans le cas de l'interface rectiligne. Ce comportement nous suggère que, pour cette géométrie, la constante c intervenant dans l'inégalité (3.16) ($c = \mathcal{C}_{b-a}$, cf. le corollaire A.E.1) est plus grande que 1.

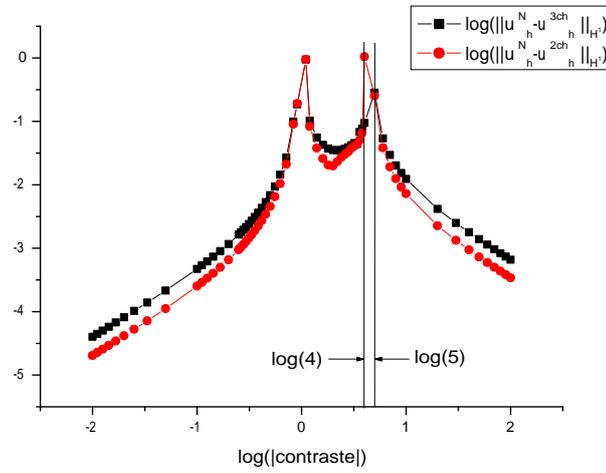


FIG. 4.16 – Évolution de $\log(\|u_h^N - u_h^{3ch}\|_{H^1(\Omega)})$ et $\log(\|u_h^N - u_h^{2ch}\|_{H^1(\Omega)})$, calculés dans la géométrie explicité dans la figure 4.15.a, pour $f_a = -x$, $f_b = x$, en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|)$.

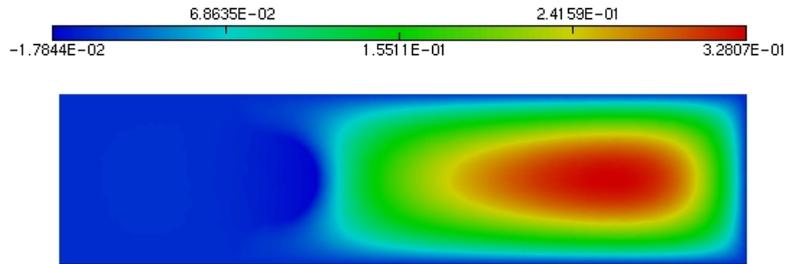


FIG. 4.17 – Solution u_h^N calculée pour $\alpha_a = 20$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

4.3.3 Cas d'une interface à coin

Nous allons suivre la même démarche qu'aux § 4.3.1 et § 4.3.2, dans le cas d'un domaine Ω dont l'interface ζ présente un coin : soient $\Omega_b := [1, 2] \times [1, 2]$ et $\Omega_a := [0, 2] \times [0, 2] \setminus \Omega_b$. Ce domaine est maillé comme représenté sur la

4. VALIDATIONS NUMÉRIQUES DES F.V. POUR LE PROBLÈME MODÈLE 78

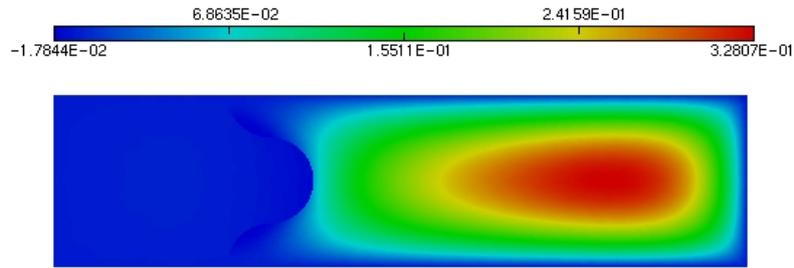


FIG. 4.18 – Solution u_h^{2ch} calculée pour $\alpha_a = 20$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

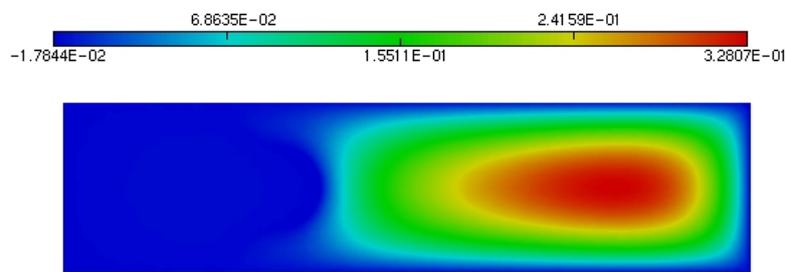


FIG. 4.19 – Solution u_h^{3ch} calculée pour $\alpha_a = 20$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

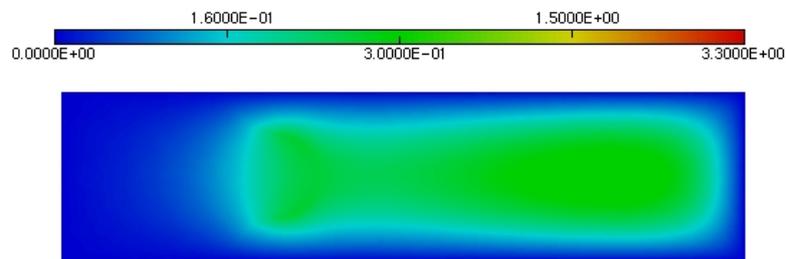


FIG. 4.20 – Solution u_h^N calculée pour $\alpha_a = 4$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

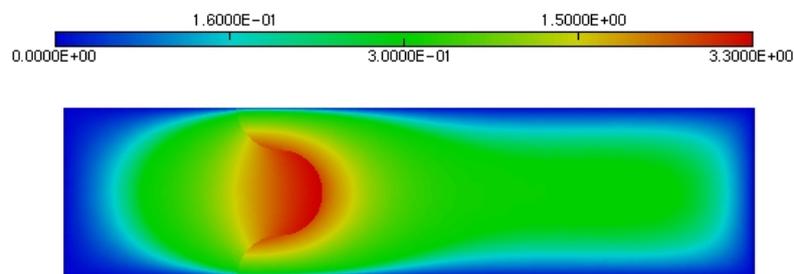


FIG. 4.21 – Solution u_h^{2ch} calculée pour $\alpha_a = 4$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

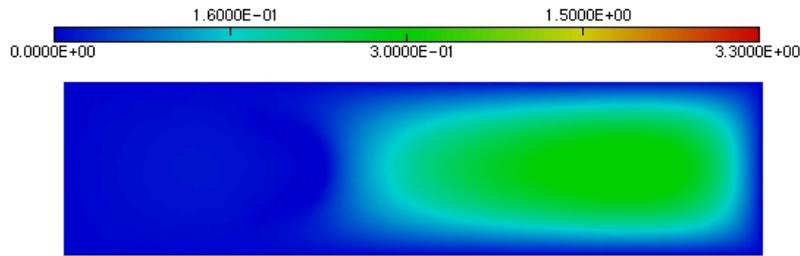


FIG. 4.22 – Solution u_h^{3ch} calculée pour $\alpha_a = 4$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

figure 4.23.

On rappelle (cf. § 1.10.3) que dans cette géométrie particulière le problème

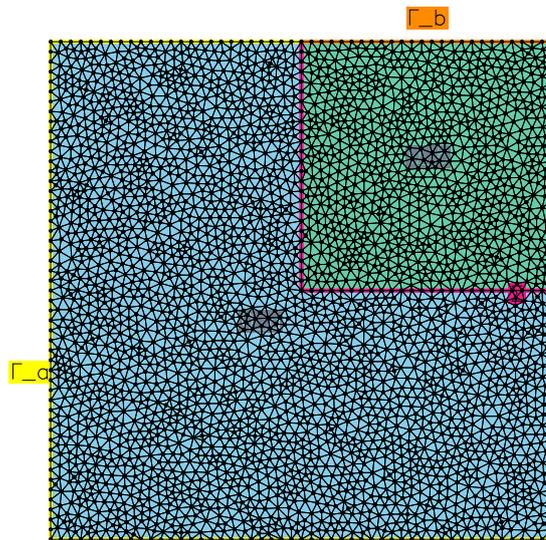


FIG. 4.23 – Triangulation et bipartition considérées pour le domaine $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$. Ce maillage est constitué de 6146 éléments et 3176 sommets.

(1.24) est mal posé si $\kappa_\epsilon \in [-3, -1/3]$.

Sur la figure 4.24 nous reportons l'évolution de $\log(\|u_h^N - u_h^{3ch}\|_{H^1(\Omega)})$ et $\log(\|u_h^N - u_h^{2ch}\|_{H^1(\Omega)})$ en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|)$.

Sur les figures 4.25, 4.26, 4.27 nous représentons u_h^N , u_h^{2ch} , u_h^{3ch} calculés pour $\kappa_\epsilon = -4$ alors que sur les figures 4.28, 4.29, 4.30 nous représentons ces trois mêmes solutions approchées, calculées pour $\kappa_\epsilon = (-1/3 + 1/93)$.

Les résultats que nous présentons sont en accord avec la théorie : sur la figure 4.24 nous retrouvons en effet, à un petit décalage numérique près, les valeurs limites $\kappa_\epsilon = -3$ et $\kappa_\epsilon = -1/3$ attendues : entre ces deux valeurs les différentes formulations peuvent présenter des écarts importants alors que,

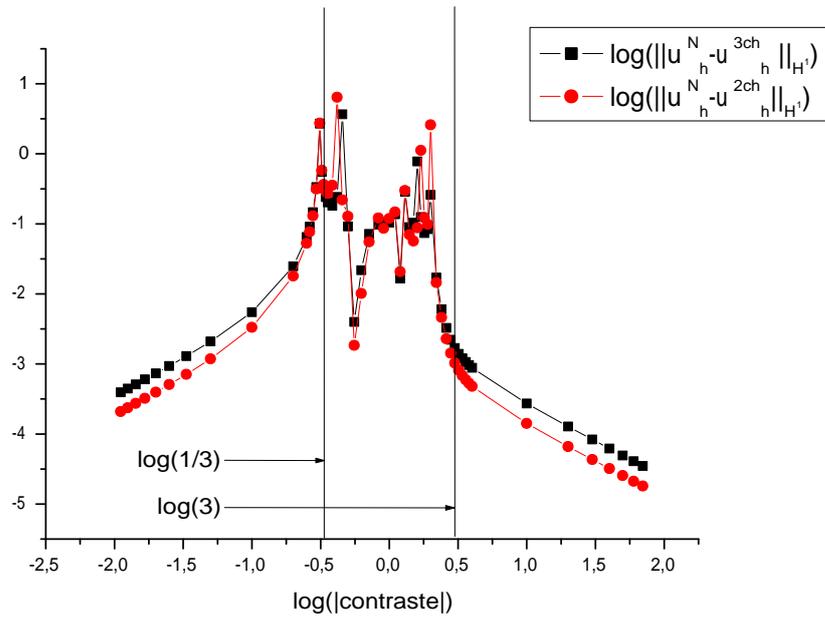


FIG. 4.24 – Évolution de $\log(\|u_h^N - u_h^{3ch}\|_{H^1(\Omega)})$ et $\log(\|u_h^N - u_h^{2ch}\|_{H^1(\Omega)})$, calculés dans la géométrie reportée sur la figure 4.23 pour $f_a = -x$, $f_b = x$, en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|)$.

en dehors de cet intervalle, les écarts deviennent rapidement petits.

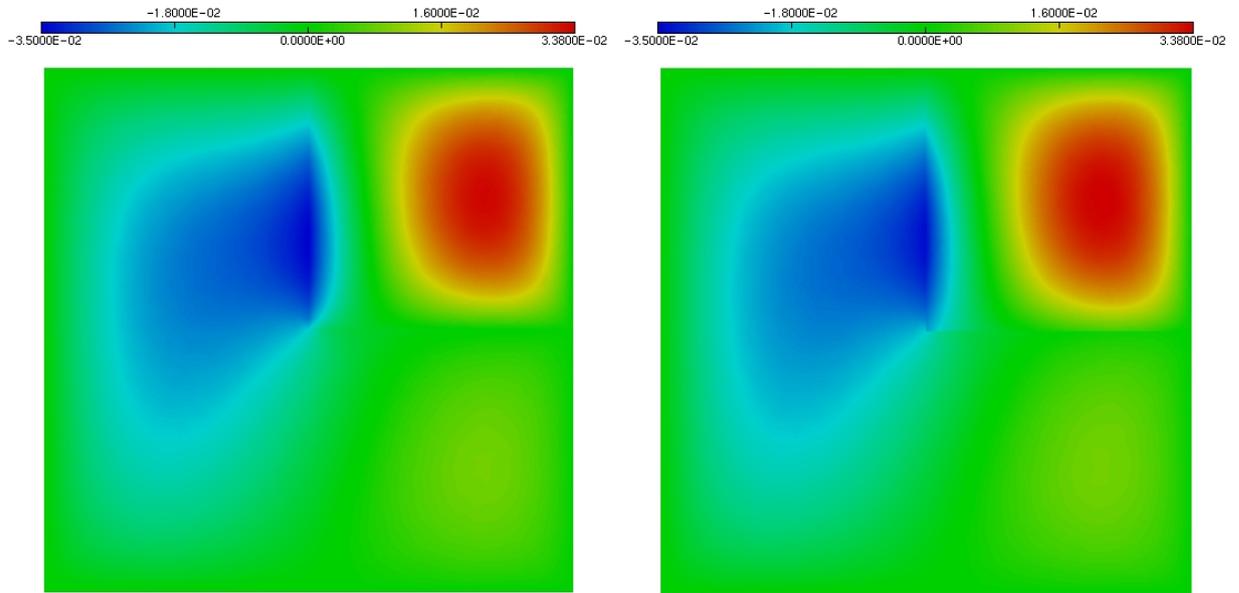


FIG. 4.25 – Solution u_h^N calculée pour $\alpha_a = 4$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

FIG. 4.26 – Solution u_h^{2ch} calculée pour $\alpha_a = 4$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

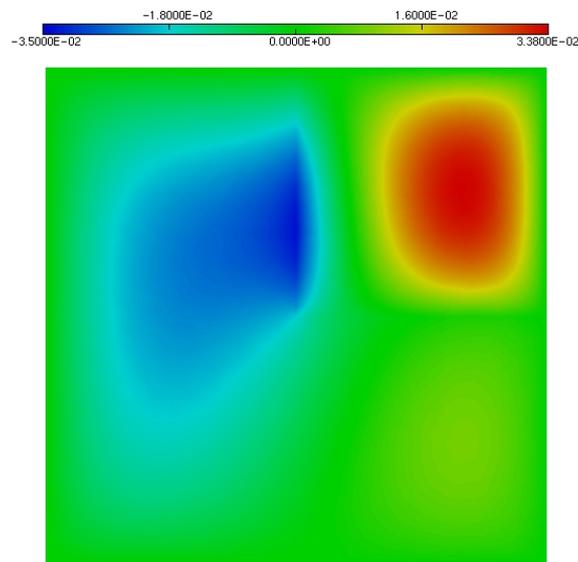


FIG. 4.27 – Solution u_h^{3ch} calculée pour $\alpha_a = 4$, $\alpha_b = -1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

4. VALIDATIONS NUMÉRIQUES DES F.V. POUR LE PROBLÈME MODÈLE 82

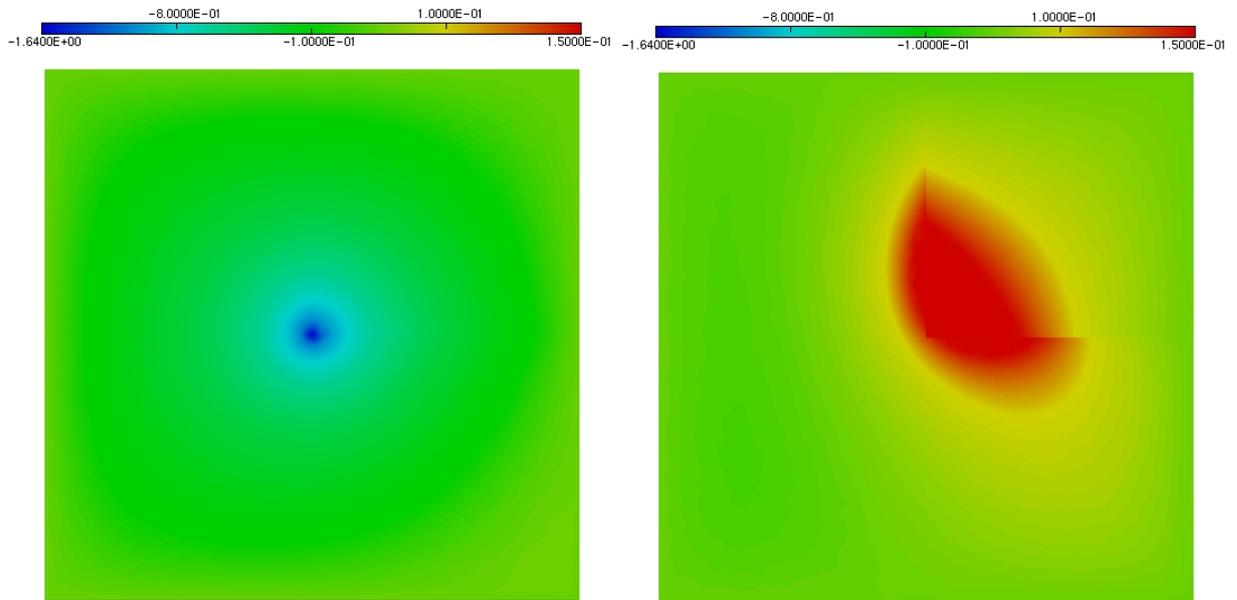


FIG. 4.28 – Solution u_h^N calculée pour $\alpha_a = 1$, $\alpha_b = -3.1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

FIG. 4.29 – Solution u_h^{2ch} calculée pour $\alpha_a = 1$, $\alpha_b = -3.1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

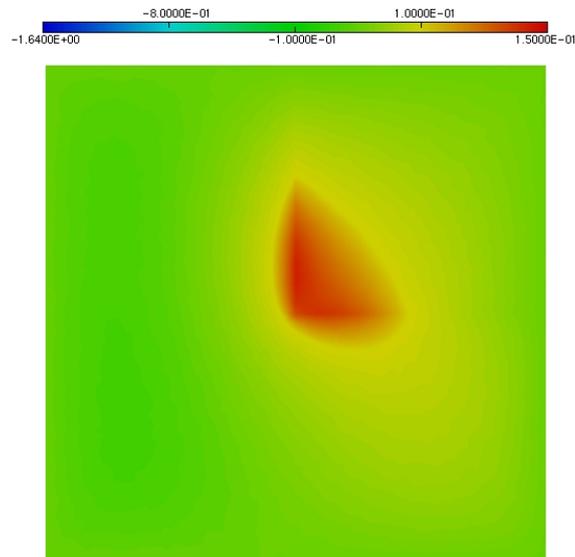


FIG. 4.30 – Solution u_h^{3ch} calculée pour $\alpha_a = 1$, $\alpha_b = -3.1$ et une donnée $f_a = -x$, $f_b = x$.

Étude d'une cavité résonante

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux modes propres du problème modèle scalaire (1.24) dans une cavité résonante. Après avoir rappelé quelques résultats théoriques généraux, nous continuerons par le traitement d'une cavité de géométrie simple, pour laquelle on pourra effectuer les calculs analytiquement. Les résultats ainsi obtenus seront utilisés pour évaluer la fiabilité des méthodes de calcul des modes propres basées sur la discrétisation par éléments finis de la formulation variationnelle naturelle et des formulations enrichies. Au cours de cette comparaison entre résultats théoriques et numériques, on se restreindra au cas où uniquement la permittivité ϵ change de signe sur Ω . L'étude du cas où ϵ et μ changent de signe sera effectuée numériquement et conclura le chapitre.

Au cours de ce chapitre nous utiliserons des espaces fonctionnels constitués de fonctions à valeurs complexes. Pour définir les versions complexes des espaces de Sobolev réels introduits jusqu'à présent, il suffit de considérer dans les définitions de ces derniers la norme L^2 induite par le produit scalaire hermitien. (Nous garderons la même notation pour la version complexe et la version réelle d'un espace fonctionnel donné). Nous noterons $(\cdot, \cdot)_{i,j}$ et $\|\cdot\|_{i,j}$ respectivement le produit scalaire hermitien et la norme induite par ce produit scalaire sur l'espace complexe $H^j(\Omega_i)$.

Dans la suite, pour simplifier les écritures, nous posons $\lambda = \omega^2$.

5.2 Aspects théoriques généraux

Le problème spectral associé au problème modèle est : trouver des couples $(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{C}$, $u \neq 0$, solutions de

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla u \right) + \lambda \mu u = 0. \quad (5.1)$$

La formulation variationnelle (naturelle) équivalente à ce dernier problème est la suivante :

trouver $(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{C}$ t.q. $u \neq 0$ et

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla u, \nabla v \right)_0 - \lambda (\mu u, v)_0 = 0. \quad (5.2)$$

Nous introduisons l'opérateur $\mathcal{S} : D(\mathcal{S}) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ défini par

$$\begin{cases} D(\mathcal{S}) = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \text{ t.q. } \operatorname{div} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla v \right) \in L^2(\Omega) \right\} \\ \mathcal{S}v = -\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla v \right) \end{cases}. \quad (5.3)$$

Nous pouvons donc réécrire le problème (5.2) sous la forme suivante : trouver des couples $(u, \lambda) \in D(\mathcal{S}) \times \mathbb{C}$ t.q. $u \neq 0$ et

$$\mathcal{S}u = \lambda u.$$

D'après les théorèmes 2.3.1 et 3.3.1, si un des deux contrastes R_a^ϵ ou R_b^ϵ est suffisamment grand, l'opérateur \mathcal{S} est inversible. Nous avons alors $\mathcal{S}^{-1}u = \lambda^{-1}u$. De plus, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, l'opérateur \mathcal{S}^{-1} est compact. Les valeurs propres λ^{-1} constituent dans ce cas une suite tendant en module vers 0. Les valeurs propres λ de (5.2) constituent donc une suite tendant en module vers $+\infty$.

L'étude du problème (5.2) est relativement simple si uniquement une des deux constantes électromagnétiques change de signe : l'idée à la base du traitement est d'utiliser le paramètre électromagnétique qui ne change pas de signe pour définir des produits scalaires (et donc des normes) à poids.

Par exemple, lorsque ϵ seul change de signe, $(\mu \cdot, \cdot)_0$ constitue un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$, qui sera noté par la suite $(\cdot, \cdot)_{L_\mu^2(\Omega)}$. Le problème (5.2) peut alors être reformulé comme il suit :

trouver des couples $(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{C}$ t.q. $u \neq 0$ et

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (\mathcal{S}u, v)_{L_\mu^2(\Omega)} - \lambda(u, v)_{L_\mu^2(\Omega)} = 0.$$

Sur l'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(\mu \cdot, \cdot)_0$, l'opérateur \mathcal{S} est autoadjoint car il est surjectif et symétrique. Son spectre est alors constitué de deux suites de valeurs propres *réelles*, positives et négatives, tendant vers $+\infty$ et $-\infty$.

L'étude du cas où μ seul change de signe a été réalisée dans [31]. Si ϵ est de signe constant, $(|\epsilon|^{-1} \nabla \cdot, \nabla \cdot)_0$ constitue un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$, qui sera noté par la suite $(\cdot, \cdot)_{\tilde{H}_0^1(\Omega)}$. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique opérateur $\mathcal{T} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $(\mathcal{T}u, v)_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} = (\mu u, v)_0$. Le problème (5.2) devient alors :

trouver des couples $(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{C}$ t.q. $u \neq 0$ et

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (\mathcal{T}u, v)_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} = \frac{1}{\lambda} (u, v)_{\tilde{H}_0^1(\Omega)}.$$

L'opérateur \mathcal{T} étant autoadjoint compact, les valeurs propres λ constituent deux suites λ_n réelles, positives et négatives, qui tendent en module vers $+\infty$.

Lorsque ϵ et μ changent de signe tous les deux, nous ne pouvons pas utiliser ces derniers pour définir des produits scalaires à poids et, par conséquent, les approches que nous venons d'exposer ne sont pas praticables.

L'opérateur \mathcal{S} n'étant pas symétrique, il n'est pas autoadjoint pour le produit scalaire canonique de $L^2(\Omega)$. Nous ne pouvons donc pas affirmer que toutes ses valeurs propres λ sont réelles et, d'autre part, nous ne sommes

pas en mesure de montrer l'existence de valeurs propres complexes. L'existence de ces dernières demeure une question ouverte (à laquelle on amènera au cours du § 5.6 quelques éléments de réponse, basés sur des expériences numériques).

La proposition suivante énonce une propriété simple des modes propres associés à d'éventuelles valeurs propres complexes :

Proposition 5.2.1 Soit (u, λ) un couple mode-valeur propre de (5.2). Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ alors le champ u est tel que

$$\left(\frac{1}{\epsilon} \nabla u, \nabla u \right)_0 = (\mu u, u)_0 = 0 \quad (5.4)$$

Preuve : Choisissons dans (5.2) $v = u$:

$$\left(\frac{1}{\epsilon} \nabla u, \nabla u \right)_0 = \lambda (\mu u, u)_0. \quad (5.5)$$

Les termes $\left(\frac{1}{\epsilon} \nabla u, \nabla u \right)_0$ et $(\mu u, u)_0$ étant réels et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, lorsqu'on considère la partie imaginaire de (5.5) on obtient $(\mu u, u)_0 = 0$ et, par conséquent $\left(\frac{1}{\epsilon} \nabla u, \nabla u \right)_0 = 0$. □

Remarque 5.2.1 Si ϵ ou μ ne changent pas de signe alors $\lambda \notin \mathbb{R}$ implique, d'après (5.4), $u = 0$. Nous retrouvons donc que toutes les valeurs propres λ du problème (5.1) sont réelles. ★

5.3 Approximations des valeurs propres

5.3.1 Formulations variationnelles

Nous nous proposons d'utiliser la formulation variationnelle naturelle et les formulations enrichies, introduites respectivement au cours du chapitre 2 et 3, pour déterminer numériquement les modes propres des cavités.

Nous remarquons que, à cause des conditions sur le contraste κ_ϵ qui assurent le caractère bien posé des formulations enrichies, lorsqu'on voudra calculer, via ces dernières, les résonances pour des contrastes petits en valeur absolue, il faudra se baser sur (3.22) et (3.39). Symétriquement, lorsqu'on voudra utiliser les formulations enrichies pour calculer les modes propres pour des contrastes grands en valeur absolue, il faudra se baser sur (3.7) et (3.27).

Nous nous proposons d'adapter les formulations variationnelles du problème modèle de sorte que les résonances λ puissent être calculées, après discrétisation par éléments finis de Lagrange, en résolvant un problème d'algèbre linéaire de la forme $\mathbb{A}U = \lambda \mathbb{B}U$, c'est à dire un problème aux valeurs propres généralisé. Bien que des méthodes basées sur (3.22) et (3.39) seront aussi employées dans la suite, nous allons expliciter la procédure d'adaptation des

formulation enrichies uniquement pour (3.7) et (3.27). En effet, pour (3.22) et (3.39) on peut procéder de façon analogue. De plus, tous les résultats qui seront établis par la suite seront aussi valables pour les adaptations de ces deux dernières formulations enrichies.

Il est immédiat d'adapter la formulation naturelle et la formulation à trois champs :

- Il suffit de considérer la “version complexe” de (2.1) avec une donnée f identiquement nulle (on rappelle $\beta = \lambda\mu$) pour obtenir la formulation naturelle du problème (5.1) :
trouver $(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{C}$ t.q.

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad {}_1\mathbb{A}(u, v) = \lambda B(u, v). \quad (5.6)$$

avec

$${}_1\mathbb{A}(u, v) = \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla u, \nabla v \right)_0 \quad \text{et} \quad {}_1\mathbb{B}(u, v) = (\mu u, v)_0.$$

- Il suffit de considérer la “version complexe” de (3.16) avec une donnée $f_a = f_b = 0$ pour obtenir la formulation à trois champs du problème (5.1) :
trouver $(U, \lambda) \in (\mathcal{K}_\zeta \times \mathbf{X}_b) \times \mathbb{C}$ t.q.

$$\forall V \in \mathcal{K}_\zeta \times \mathbf{X}_b, \quad {}_3\mathbb{A}^\rho(U, V) = \lambda \mathbb{B}(U, V) \quad (5.7)$$

avec

$$\begin{aligned} {}_3\mathbb{A}^\rho(U, V) := & \rho (\operatorname{div} \mathbf{u}_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} + (\mathbf{rot}(|\epsilon_b| \mathbf{u}_b), \mathbf{rot}(|\epsilon_b| \mathbf{v}_b))_{0,b} \\ & + (|\epsilon_b| \mathbf{u}_b, \mathbf{v}_b)_{0,b} + \left(\frac{\nabla u_b}{|\epsilon_b|}, \nabla v_b \right)_{0,b} \\ & + (\operatorname{div} \mathbf{u}_b, v_b)_{0,b} + (u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b} \\ & + \left(\frac{1}{\epsilon_a} \nabla u_a, \nabla v_a \right)_{0,a} + 2 \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, \overline{v_a} \rangle_\zeta + \langle \overline{\mathbf{v}_b} \cdot \mathbf{n}_a, u_b \rangle_\zeta, \end{aligned}$$

et

$${}_3\mathbb{B}(U, V) := (\mu_a u_a, v_a)_{0,a} + \rho (\mu_b u_b, \operatorname{div} \mathbf{v}_b)_{0,b}.$$

Pour la formulation variationnelle à deux champs, le traitement nécessite une attention particulière. En effet, une démarche analogue à celle que nous venons d'effectuer aux deux points précédents, nous conduit au problème :
trouver $(U, \lambda) \in (H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times \mathbf{X}_b) \times \mathbb{C}$ t.q.

$$\begin{aligned} \forall V \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times \mathbf{X}_b, \\ (|\epsilon_b| \mathbf{u}_b, \mathbf{v}_b)_{0,b} + (\mathbf{rot}(|\epsilon_b| \mathbf{u}_b), \mathbf{rot}(|\epsilon_b| \mathbf{v}_b))_{0,b} + \\ \langle \overline{\mathbf{v}_b} \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_\zeta + \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, \overline{v_a} \rangle_\zeta + \left(\frac{1}{\epsilon_a} \nabla u_a, \nabla v_a \right) = \\ -\lambda (\mu_a u_a, v_a) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{u}_b}{\mu_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Nous remarquons que, dans le deuxième membre de (5.8), un terme est multiplié par λ alors qu'un autre est divisé par cette dernière quantité. Cela

nous empêche évidemment de calculer de façon simple les valeurs de λ . Pour contourner cette difficulté, nous pouvons partiellement modifier la formulation variationnelle à deux champs de sorte que λ apparaisse uniquement comme facteur multiplicatif de certains termes : dans l'étape de construction qui nous a permis d'aboutir à (3.5), au lieu de normaliser la deuxième équation de (3.1) en divisant par $\beta_b = \lambda\mu_b$, normalisons en divisant cette deuxième équation de (3.1) par μ_b . Pour compléter la construction de la formulation modifiée, il suffira de reprendre la méthode décrite au § 3.2.1.

Remarque 5.3.1 Si on reprend pour cette formulation à deux champs modifiée la démarche suivie au § 3.2.4, on trouve que la condition (type (3.21)) qui en assure le caractère bien posé est la suivante :

$$R_a^\epsilon > \frac{c^2 \lambda}{2} \left[\min \left(1, \frac{1}{\mu_b^{\max} \epsilon_b^-} \right) \right]^{-1}. \quad (5.9)$$

Le membre de droite de (5.9) croît donc comme λ : pour toute valeur du rapport R_a^ϵ , $\exists \lambda_0$ tel que, $\forall \lambda > \lambda_0$ la condition (5.9) n'est pas vérifiée. À cause de cette dépendance en λ , la formulation variationnelle à deux champs pourrait se révéler inadaptée pour l'approximation des valeurs propres du problèmes (5.1) (cf. la remarque 5.5.1).

★

En considérant les données f_a et f_b identiquement nulles, nous obtenons la formulation variationnelle à deux champs (modifiée) du problème (5.1) : trouver $(U, \lambda) \in (H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times \mathbf{X}_b) \times \mathbb{C}$ t.q.

$$\forall V \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times \mathbf{X}_b, \quad {}_2\mathbb{A}(U, V) = \lambda {}_2B(U, V), \quad (5.10)$$

avec

$$\begin{aligned} {}_2\mathbb{A}(U, V) := & \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{u}_b}{\mu_b}, \operatorname{div} \mathbf{v}_b \right)_{0,b} + (\mathbf{rot}(|\epsilon_b| \mathbf{u}_b), \mathbf{rot}(|\epsilon_b| \mathbf{v}_b))_{0,b} \\ & + \left(\frac{1}{\epsilon_a} \nabla u_a, \nabla v_a \right)_{0,a} + \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, \overline{v_a} \rangle_\zeta, \end{aligned}$$

et

$${}_2\mathbb{B}(U, V) := (\mu_a u_a, v_a)_{0,a} - (|\epsilon_b| \mathbf{u}_b, \mathbf{v}_b)_{0,b} - \langle \overline{\mathbf{v}_b} \cdot \mathbf{n}_a, u_a \rangle_\zeta.$$

Nous remarquons qu'à cause de la nouvelle normalisation que nous avons été obligés d'introduire, le terme d'interface $\langle \overline{\mathbf{v}_b} \cdot \mathbf{n}_a, u_b \rangle_\zeta$ est multiplié par λ , contrairement à l'autre intégrale d'interface $\langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_a, \overline{v_a} \rangle_\zeta$.

5.3.2 Analyse numérique

Rappelons à présent quelques résultats classiques de la théorie d'approximation spectrale pour les problèmes aux valeurs propres formulés sous forme variationnelle. Nous reprenons [6] : soit V un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ deux formes sesquilinéaires continues sur V . Introduisons alors le

problème aux valeurs propres (5.11), posé sous forme variationnelle :
trouver $(\mathcal{U}, \lambda) \in V \times \mathbb{C}$, t.q. $\mathcal{U} \neq 0$ et

$$\forall \mathcal{V} \in V, \quad a(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \lambda b(\mathcal{U}, \mathcal{V}). \quad (5.11)$$

Si les formes $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ satisfont les deux conditions

$$\forall \mathcal{U} \in V, \quad \sup_{\mathcal{V} \in V} \frac{|a(\mathcal{U}, \mathcal{V})|}{\|\mathcal{U}\|_V \|\mathcal{V}\|_V} \geq \gamma > 0, \quad (5.12)$$

$$\forall \mathcal{U}, \mathcal{V} \in V, \quad |b(\mathcal{U}, \mathcal{V})| \leq \|\mathcal{U}\|_H \|\mathcal{V}\|_V, \quad (5.13)$$

($V \subset H$, V dense dans H et l'injection $V \rightarrow H$ est compacte) alors les valeurs propres approchées numériquement par une discrétisation par éléments finis du problème (5.11) convergent vers les valeurs propres du problème continu.

Nous notons que, lorsqu'on considère la formulation (5.7) les formes a , b et l'espace V sont respectivement à identifier à ${}_3\mathbb{A}$, ${}_3\mathbb{B}$ et $\mathcal{K}_\zeta \times \mathbf{X}_b$. Dans le cas de la formulation (5.8), a , b et V sont à identifier respectivement à ${}_2\mathbb{A}$, ${}_2\mathbb{B}$ et $H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times \mathbf{X}_b$. Puisque l'injection de l'espace \mathbf{X}_b dans $\mathbf{L}^2(\Omega_b)$ n'est pas compacte, les formes ${}_3\mathbb{B}$ et ${}_2\mathbb{B}$ ne peuvent pas vérifier la condition (5.13). Nous ne disposons pas, par conséquent, d'un cadre théorique nous assurant que les valeurs propres calculées en discrétisant (5.8) et (5.10) convergeront vers les valeurs propres du problème (5.1).

Pour la formulation (5.6) les conditions sont différentes : les formes a et b et l'espace V sont à identifier respectivement à ${}_1\mathbb{A}$, ${}_1\mathbb{B}$ et $H_0^1(\Omega)$. L'injection de ce dernier espace dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, la condition (5.13) est satisfaite par ${}_1\mathbb{B}$. D'autre part, d'après le corollaire 2.3.1, si le rapport $|\epsilon_b|/\epsilon_a$ est suffisamment petit (ou grand), la forme ${}_1\mathbb{A}$ est \mathbb{T}_2 -coercive sur $H_0^1(\Omega)$ et, par conséquent,

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{|{}_1\mathbb{A}(u, \mathbb{T}_2 u)|}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\mathbb{T}_2 u\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \gamma > 0.$$

La forme ${}_1\mathbb{A}$ vérifie alors la condition (5.12). Il en résulte que, sous les mêmes hypothèses du corollaire 2.3.1, les valeurs propres calculées en discrétisant la formulation naturelle (5.6) vont converger vers les valeurs propres du problème (5.1).

Au sein du § 5.5 nous proposerons une validation numériquement de ce dernier résultat théorique. Par la même occasion, bien qu'en l'absence d'un cadre théorique bien défini, nous calculerons les valeurs propres "numériques" des formulations (5.8) et (5.10) afin de les comparer à celles du problème continu.

Suite aux travaux de Costabel et Dauge portant sur la résolution numérique des équations de Maxwell harmoniques [18], [19], les formulations variationnelles augmentées sont souvent associées à la notion de valeurs propres parasites. Ces dernières correspondent à des fréquences pour lesquelles il n'y a pas d'équivalence entre les formulations augmentées et le problème de

départ.

Dans notre cas cependant, les formulations variationnelles (2.1), (3.7) et (3.16) sont inconditionnellement équivalentes au problème (1.24) (fermé par des conditions au bord de Dirichlet homogènes), ce qui implique directement que les formulations (5.6), (5.7), (5.10) sont inconditionnellement équivalentes à (5.1), comme dans [14].

Cette dernière propriété est extrêmement importante pour le calcul des modes propres : puisque (5.7) et (5.10) impliquent toujours $\mathbf{u}_b = |\epsilon_b| \nabla u_b$, le terme de régularisation $(\mathbf{rot}(|\epsilon_b| \mathbf{u}_b), \mathbf{rot}(|\epsilon_b| \mathbf{v}_b))_{0,b}$ est nul et, par conséquent, ne peut pas être responsable de l'apparition de modes propres parasites.

5.4 Étude théorique pour une cavité rectangulaire

Afin de disposer d'une référence exacte qui nous permettra d'évaluer la qualité des approximations numériques, nous nous proposons à présent de résoudre complètement le problème (5.1).

Afin de pouvoir effectuer les calculs analytiques aisément nous considérons un domaine Ω de forme rectangulaire : pour $a, b, h \in \mathbb{R}_x^+$, soient $\Omega_a = [0, a] \times [0, h]$ et $\Omega_b = [a, b] \times [0, h]$. Nous allons de plus supposer que les constantes électromagnétiques ϵ et μ dépendent uniquement de la variable d'espace x .

La cavité considérée étant rectangulaire, nous pouvons chercher les solutions de (5.1) en séparant les variables d'espaces : $u(x, y) = f(x)g(y)$. Les fonctions f et g vérifient la relation

$$\frac{\epsilon}{f} \left(\frac{1}{\epsilon} f' \right)' + \lambda \mu \epsilon + \frac{1}{g} g'' = 0. \quad (5.14)$$

Les deux premiers termes de (5.14) ne dépendent que de x alors que le dernier terme ne dépend que de y . Nous en déduisons que g'' est égale à une constante que nous notons c_g . En prenant en compte les conditions aux limites, il est aisé de vérifier que g satisfait le système

$$\begin{cases} g'' - c_g g = 0 \\ g(0) = 0 \\ g(h) = 0 \end{cases}. \quad (5.15)$$

Posons alors $\vartheta := c_g^{1/2}$; les solutions de (5.15) sont de la forme

$$g(y) = A \exp(\vartheta y) + B \exp(-\vartheta y), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

En explicitant la condition $g(0) = 0$, nous obtenons $B = -A$, soit $g(y) = A \sinh(\vartheta y)$. La condition $g(h) = 0$ permet d'établir $\vartheta = i \frac{n\pi}{h}$, $n \in \mathbb{N}$, soit

finalement $c_g = -\frac{n^2 \pi^2}{h^2}$.

L'inconnue f vérifie le système

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\epsilon} f' \right)' + \lambda \mu f + \frac{c_g}{\epsilon} f = 0 \\ f(0) = f(b) = 0 \end{cases}. \quad (5.16)$$

Pour simplifier ultérieurement le traitement, nous allons considérer dans la suite $\epsilon_a \in \mathbb{R}_*^+$ et $\epsilon_b \in \mathbb{R}_*^-$. Le traitement que nous proposons sera valable uniquement si

- seulement ϵ présente un saut de signe, et μ est une constante réelle sur Ω .
- ϵ et μ changent de signe en même temps, de sorte que Ω_a coïncide avec Ω_1 ou Ω_2 (en d'autres termes ζ coïncide avec Σ).

Dans ces conditions particulières, en partant de la première équation de (5.16), nous obtenons (pour $i = a, b$)

$$-\lambda = \frac{1}{\epsilon_i \mu_i} \left(\frac{f_i''}{f_i} + c_g \right). \quad (5.17)$$

Le rapport f_i''/f_i est donc égal à une constante ($-\lambda \epsilon_i \mu_i - c_g$) que nous notons c_i dans la suite. En prenant en compte les conditions aux limites et les conditions de raccord à l'interface ζ , il est immédiat de vérifier que la fonction f satisfait le système

$$\begin{cases} f_a'' - c_a f_a = 0 \\ f_b'' - c_b f_b = 0 \\ f_a(0) = f_b(b) = 0 \\ f_a(a) = f_b(a) \\ \left(\frac{1}{\epsilon_a} f_a' - \frac{1}{\epsilon_b} f_b' \right) \Big|_{x=a} = 0 \end{cases}. \quad (5.18)$$

Les constantes c_i et c_g , qui interviennent dans les systèmes (5.15) et (5.18), sont liées par la relation (obtenue trivialement de (5.17))

$$-\lambda = \frac{c_{a,f} + c_g}{\epsilon_a \mu_a} = \frac{c_{b,f} + c_g}{\epsilon_b \mu_b}. \quad (5.19)$$

Suivons pour (5.18) le même procédé utilisé pour résoudre le système (5.15) : posons $\omega_i = c_i^{1/2}$. Les solutions f_i de (5.18) sont de la forme

$$f_i(x) = A_i \exp(\omega_i x) + B_i \exp(-\omega_i x), \quad A_i, B_i \in \mathbb{R}.$$

Les conditions $f_a(0) = 0$ et $f_b(b) = 0$ nous permettent d'obtenir

$$f_a(x) = A_a \sinh(\omega_a x), \quad (5.20)$$

$$f_b(x) = A_b \exp(b \omega_b) \sinh(\omega_b(x - b)). \quad (5.21)$$

En explicitant pour f_a et f_b les conditions de raccord à l'interface (la quatrième et la cinquième équation de (5.18)), nous obtenons

$$A_a \sinh(\omega_a a) = A_b \exp(b \omega_b) \sinh(\omega_b(a - b)), \quad (5.22)$$

$$\frac{1}{\epsilon_a} \omega_a A_a \cosh(\omega_a a) = \frac{1}{\epsilon_b} \omega_b \exp(b \omega_b) \cosh(\omega_b(a - b)). \quad (5.23)$$

Le quotient de (5.22) par (5.23) nous fournit la relation de dispersion vérifiée par ω_a et ω_b :

$$\frac{\tanh(\omega_a a)}{\tanh(\omega_b(a - b))} = \frac{\epsilon_b \omega_a}{\epsilon_a \omega_b}. \quad (5.24)$$

Nous nous proposons d'exprimer ω_b en fonction de ω_a pour obtenir de (5.24) une équation à une seule inconnue. Pour cela partons de (5.19); vus les résultats jusqu'ici obtenus (on rappelle $c_g = -(n\pi/h)^2$), nous obtenons

$$\frac{\omega_a^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}{\epsilon_a \mu_a} = \frac{\omega_b^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}{\epsilon_b \mu_b}, \quad \text{soit}$$

$$\omega_b = \left[\frac{\epsilon_b \mu_b}{\epsilon_a \mu_a} \left(\omega_a^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \right) + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.25)$$

Injectons enfin cette dernière équation dans (5.24) :

$$\frac{\tanh(\omega_a a)}{\tanh \left(\left[\frac{\epsilon_b \mu_b}{\epsilon_a \mu_a} \left(\omega_a^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \right) + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \right]^{1/2} (a-b) \right)} = \frac{\epsilon_b}{\epsilon_a} \frac{\omega_a}{\left[\frac{\epsilon_b \mu_b}{\epsilon_a \mu_a} \left(\omega_a^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \right) + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (5.26)$$

La solution de cette équation de dispersion nous permet finalement de résoudre le problème aux valeurs propres (5.1) : les ω_a solutions de (5.26) nous permettent en effet de calculer

$$\lambda(n, \omega_a) = \frac{\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 - \omega_a^2}{\epsilon_a \mu_a}, \quad (5.27)$$

de déduire les ω_b et, grâce à (5.20) et (5.21), de remonter aux expressions de f_a et f_b .

Proposition 5.4.1 Si $\lambda(n, \omega_a)$ est une valeur propre du problème (5.1) (posé dans le domaine Ω rectangulaire que nous sommes en train de considérer au cours de ce paragraphe), alors $\bar{\lambda}(n, \omega_a)$ est aussi valeur propre de ce problème.

Preuve : Soit $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction

$$f_n : z \mapsto \frac{\tanh(za)}{\tanh \left(\left[\frac{\epsilon_b \mu_b}{\epsilon_a \mu_a} \left(z^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \right) + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \right]^{1/2} (a-b) \right)} \frac{\epsilon_b}{z} \frac{1}{\epsilon_a \left[\frac{\epsilon_b \mu_b}{\epsilon_a \mu_a} \left(z^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \right) + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \right]^{1/2}}.$$

Il est immédiat de constater que toute racine de f_n est solution de (5.26) et, réciproquement, toute solution de (5.26) est une racine de f_n .

Nous notons que $\overline{f_n(z)} = f_n(\bar{z})$, par conséquent si un certain ω_a est solution de l'équation de dispersion, $\bar{\omega}_a$ est aussi une solution.

Pour conclure la preuve il suffit de remarquer que $\lambda(n, \bar{\omega}_a) = \bar{\lambda}(n, \omega_a)$. \square

Remarque 5.4.1 Des modes à haute fréquence verticale (n grand) et à haute fréquence horizontale (ω_a grand) peuvent être associés à des faibles fréquences de résonance. Cette propriété découle naturellement du fait que λ est une fonction de la différence $(n\pi/h)^2 - \omega_a$ (cf. (5.27)).

★

Remarque 5.4.2 Introduisons quatre paramètres réels strictement positifs p, q, r, s et considérons les deux cas de figure :

(i) Pour lequel $\epsilon_a > 0, \mu_a > 0; \epsilon_b < 0, \mu_b < 0$ (ce qui est réalisé pour $\Omega_a = \Omega_1$ et $\Omega_b = \Omega_2$) et $\epsilon_a = p, \mu_a = q, |\epsilon_b| = r$ et $|\mu_b| = s$.

(ii) Pour lequel $\epsilon_a > 0, \mu_a < 0; \epsilon_b < 0, \mu_b > 0$ (ce qui est réalisé pour $\Omega_a = \Omega_2$ et $\Omega_b = \Omega_1$) et $\epsilon_a = p, |\mu_a| = q, |\epsilon_b| = r$ et $\mu_b = s$.

En observant le problème (5.1) il est immédiat de constater que les valeurs propres λ du cas (i) (nous les noterons à la suite λ_i) sont opposées aux valeurs propres λ_{ii} du cas (ii). Nous pouvons retrouver ce résultat par le traitement que nous venons d'effectuer : puisque dans les deux cas la quantité $\frac{\epsilon_b \mu_b}{\epsilon_a \mu_a} = \frac{pq}{rs}$, les solutions ω_a de (5.26) sont les mêmes pour (i) et (ii). Par application de (5.27) cette dernière propriété assure l'égalité $\lambda_i(n, \omega_a) = -\lambda_{ii}(n, \omega_a)$.

★

Remarque 5.4.3 Dans le cas critique où $\kappa_\epsilon = -1$ et $\mu_2/\mu_1 = -1$, d'après (5.25), nous avons $\omega_a = \omega_b$. Si de plus $b = 2a$, l'équation (5.26) est vérifiée pour tout $\omega_a \in \mathbb{C}$, par conséquent, λ peut prendre toute valeur complexe.

★

5.4.1 Sur la solution de l'équation de dispersion

L'équation de dispersion (5.26) que nous venons d'établir, à cause de sa complexité, ne peut pas être résolue analytiquement. Nous devons alors avoir recours à des approximations numériques.

Cependant, pour la solution numérique de l'équation de dispersion, nous sommes confrontés à un certain nombre d'obstacles : comme nous avons vu au § 5.2, lorsque ϵ et μ changent de signe, les valeurs propres peuvent être complexes. Les solutions de l'équation de dispersion sont donc à chercher dans le plan complexe. Il en résulte que, pour chaque valeur de n qui sera considérée, nous devrions approcher les racines d'une fonction à valeurs complexes. De plus, d'après la remarque (5.4.1), des modes horizontaux et verticaux à hautes fréquences peuvent être associés à des valeurs propres petites. Cela implique que, pour capturer numériquement une petite valeur propre, on puisse être obligés de considérer des valeurs de n assez élevées et d'élargir (plus n augmente) les portions du plan complexe sur lesquelles on effectue la recherche des racines approchées.

Dans un souci de simplification, nous nous proposons par la suite de considérer plus dans le détail le cas où uniquement ϵ change de signe. D'après les résultats que nous avons rappelés au § 5.2, la perméabilité magnétique étant de signe constant, toutes les valeurs propres λ de (5.1) sont réelles. Nous déduisons alors de (5.27) que les solutions ω_a de l'équation

de dispersion sont soit réelles, soit imaginaires pures.

Comme nous avons pu voir au cours de la preuve de la proposition 5.2.1, résoudre l'équation (5.26) est équivalent à chercher les zéros de f_n . La fonction f_n étant impaire et $z = 0$ constituant la solution triviale, nous pouvons limiter à \mathbb{R}_*^+ et $i\mathbb{R}_*^+$ le domaine de recherche de ses racines.

Nous avons choisi d'adopter une technique de dichotomie pour résoudre l'équation $f_n(z) = 0$. Nous avons alors pu constater que la résolution numérique de l'équation de dispersion est particulièrement délicate lorsqu'on considère $\epsilon_a < 1$. Pour ces valeurs nous sommes dans la configuration décrite par la remarque 5.4.1 et pour capturer numériquement une petite valeur propre on peut être amené à considérer des valeurs de n assez élevées et élargir (plus n augmente) les intervalles sur lesquels on effectue la dichotomie.

Pour $\epsilon_a > 1$ la solution est plus aisée. Dans cette configuration nous avons remarqué que plus les fréquences verticales et horizontales sont grandes, plus la valeur propre globale associée est grande.

Dans la suite de ce paragraphe nous allons considérer une configuration spécifique pour laquelle nous présentons, à titre d'exemple, quelques valeurs (et vecteurs) propres du problème (5.1) obtenues en résolvant l'équation (5.26) par la méthode numérique que nous venons de proposer. En ce qui concerne les caractéristiques géométriques du rectangle, nous fixons $a = h = 1$, $b = 3$. Pour les constantes électromagnétiques nous choisissons $\epsilon_a = 2$, $\epsilon_b = -1$, $\mu_1 = \mu_2 = 3$.

Sur le tableau 5.1 nous reportons, pour les dix premières valeurs propres positives, la valeur $\lambda(n, \omega_a)$, ainsi que la valeur de n et la valeur ω_a solution de l'équation de dispersion qui, par application de (5.27), en ont permis le calcul. Le tableau 5.2 est dressé en effectuant la même démarche pour les dix valeurs propres négatives de plus petit module. Comme nous pouvons ob-

$\lambda(n, \omega_a)$	n	ω_a
3.6954	1	3.5075 i
8.4463	2	3.3465 i
9.3233	1	6.7875 i
13.9181	2	6.6355 i
16.5969	3	3.2795 i
18.2467	1	9.9805 i
21.9341	3	6.5405 i
22.8110	2	9.8685 i
28.0745	4	3.2455 i
30.4457	1	13.1455 i

TAB. 5.1 – Les dix premières valeurs propres positives pour $\epsilon_a = 2$ et $\epsilon_b = -1$.

$\lambda(n, \omega_a)$	n	ω_a
-1.6444	1	4.4425
-4.4243	1	6.0345
-6.5790	2	8.8855
-7.4263	1	7.3775
-12.0825	1	9.0755
-14.1463	2	11.1515
-14.8038	3	13.3285
-17.0160	2	11.8985
-18.3735	1	10.9595
-21.6325	2	13.0105

TAB. 5.2 – Les dix premières valeurs propres négatives pour $\epsilon_a = 2$ et $\epsilon_b = -1$.

server sur ces deux tableaux nous retrouvons bien les résultats prévus par la théorie : les valeurs propres positives et les négatives constituent deux suites tendant en module vers l'infini. Sur les figures 5.1 et 5.2 nous représentons

les vecteurs propres associés aux deux premières valeurs propres positives, alors que sur les figures 5.3 et 5.4 nous représentons les vecteurs propres associés aux deux premières valeurs propres négatives. Sur ces figures nous pouvons noter que l'énergie des modes associés aux valeurs propres positives (respectivement négatives) tend à être confinée dans la région où ϵ est positif (resp. négatif).

Dans la suite, lorsque nous ferons référence aux valeurs et vecteurs propres

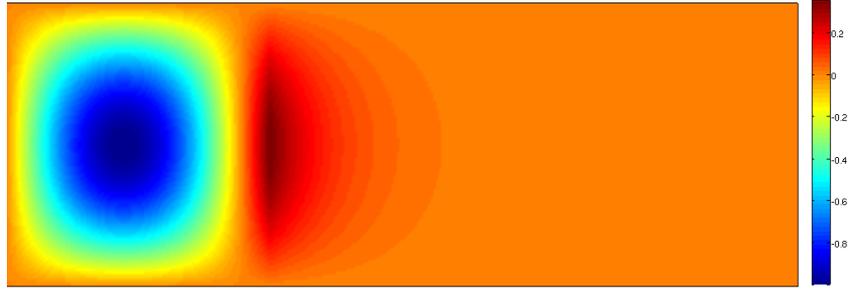


FIG. 5.1 – Vecteur propre associé à $\lambda = 3.6954$, obtenu pour $(n = 1, \omega = 3.5075 i)$.

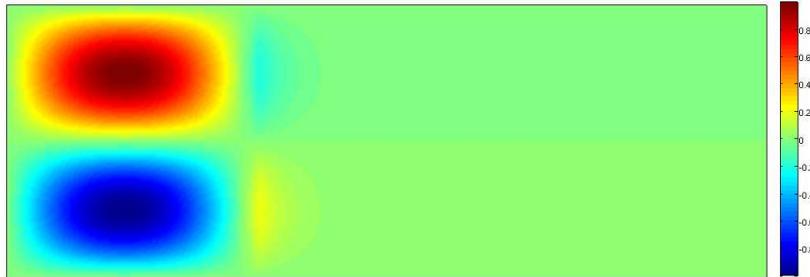


FIG. 5.2 – Vecteur propre associé à $\lambda = 8.4463$, obtenu pour $(n = 2, \omega = 3.3465 i)$.

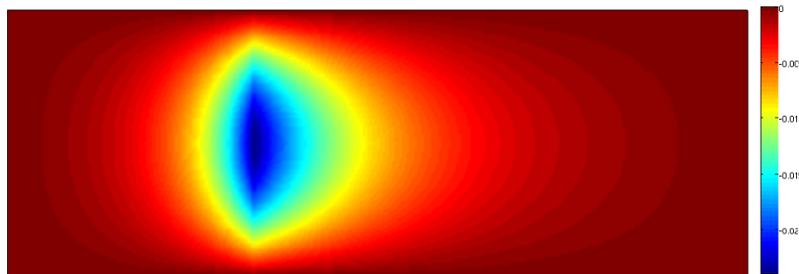


FIG. 5.3 – Vecteur propre associé à $\lambda = -1.6444$, obtenu pour $(n = 1, \omega = 4.4425)$.

calculés par la méthode que nous venons d'exposer, nous parlerons de valeurs et vecteurs propres *théoriques*. Il s'agit là d'un abus de langage, en effet, les solutions de (5.26) étant approchées numériquement il faudrait plutôt dire *pseudo théoriques*.

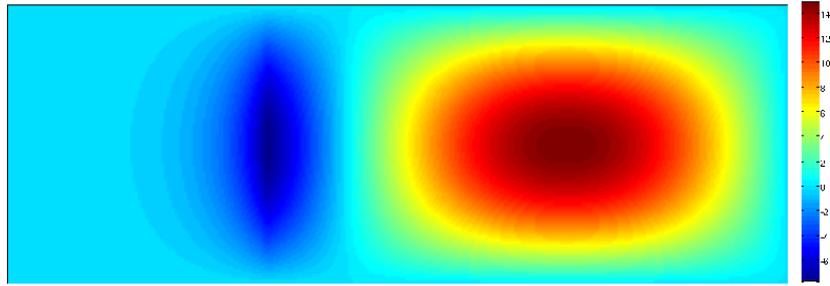


FIG. 5.4 – Vecteur propre associé à $\lambda = -4.4243$, obtenu pour $(n = 1, \omega = 6.0345)$.

5.5 Comparaisons théorique-numérique pour une cavité rectangulaire

Comme nous avons constaté au § 5.3.1, si le rapport ϵ_b/ϵ_a est suffisamment grand (ou suffisamment petit), les valeurs propres, calculés en discrétisant par éléments finis la formulation (5.6), vont converger vers les valeurs propres du problème (5.1). Un des objectifs de ce paragraphe est la validation, par l’expérience numérique, de ce dernier résultat.

Nous rappelons d’autre part que les formulations enrichies introduite au § 5.3.1 ont été obtenues par modification des formulations enrichies du problème scalaire avec second membre. Ainsi, bien qu’en l’absence d’un cadre théorique pour la convergence de valeur propres “numérique”, il nous paraît intéressant de vérifier expérimentalement si, dans les conditions assurant le caractère bien posé des formulations à deux et trois champs du problème 2.1, les valeurs propres “numérique”, obtenues en discrétisant les formulations enrichies du problème (5.1), se rapprochent de celles du problème continu.

Remarque 5.5.1 (L’exception de la formulation à deux champs)

On rappelle (cf. la remarque 5.3.1) que pour une valeur du contraste donnée, la condition assurant le caractère bien posé de la formulation à deux champs du problème (2.1) n’est pas vérifiée pour des valeurs de λ trop grandes. Les valeurs propres positives du problème (5.1) tendant vers $+\infty$, il existe une infinité de valeurs λ pour lesquelles on ne peut pas montrer le caractère bien posé de la formulation à deux champs. On s’attend, par conséquent, à ce que les méthodes basées sur cette approche ne puissent pas approcher correctement le problème spectral (5.1). Cela a été confirmé par l’expériences numériques : lors de nos tests, nous nous sommes rendus compte que les valeurs propres calculées à partir de la formulation variationnelle (5.10) sont très éloignées des valeurs théoriques ou des valeurs obtenues par les autres formulations variationnelles. Nous avons en particulier remarqué un grand nombre de résonances très proches de la fréquence nulle et qui n’avaient aucune correspondance avec nos valeurs de référence.

Cette anomalie a été constatée même après plusieurs vérifications et pour

toutes les valeurs du contraste κ_ϵ considérées.

L'expérience a donc confirmé que cette formulation à deux champs ne convient pas à l'étude du problème spectral.

Dans la suite nous allons par conséquent considérer uniquement les familles de valeurs propres numériques issues de la formulations naturelle et de la formulation à trois champs : nous abandonnerons donc les méthodes de calcul basées sur la formulation à deux champs.

★

Tout au long du présent paragraphe, nous allons considérer la même cavité rectangulaire étudié au cours du précédent (on rappelle $a = h = 1$, $b = 3$) et maintenir $\mu_a = \mu_b = 3$, $\epsilon_b = -1$. Le seul paramètre susceptible de varier sera ϵ_a .

Dans la suite nous proposons, pour différentes valeurs du contraste κ_ϵ , une comparaison entre les valeurs propres théoriques et les valeurs propres numériques du problème (5.1). Les premières ont été obtenues comme il a été suggéré au paragraphe précédent tandis que les deuxièmes ont été calculées en résolvant les problèmes aux valeurs propres généralisés obtenus en discrétisant, par éléments finis $P1$, la formulation variationnelle naturelle et la formulation variationnelle à trois champs construite au paragraphe § 5.3.1 (le maillage utilisé est reporté sur la figure 5.5).

Nous disposons par conséquent de deux familles de valeurs propres

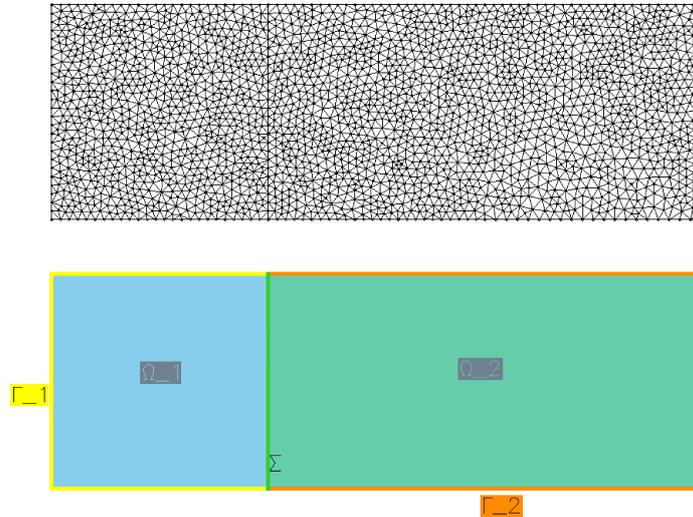


FIG. 5.5 – Maillage utilisé pour le calcul numérique des valeurs propres. Il est constitué 2300 points et de 4403 éléments.

numériques, chacune liée à la formulation variationnelle à partir de laquelle elle a été calculée.

L'abandon des méthodes basées sur la formulation à deux champs nous libère d'un certain nombre de contraintes intrinsèquement liées à cette dernière : pour les formulations à trois champs aucune condition n'est requise sur la

valeur du rapport ϵ/μ . Nous pourrions utiliser la méthode basée sur (5.7) pour le calcul des modes propres dans le cas des grands contrastes. D'autre part, pour le calcul des valeurs propres dans le cas des petites valeurs du contraste, nous pourrions utiliser la formulation obtenue en partant de (3.39) et en suivant la démarche décrite au § 5.3.1.

Dans la suite nous allons nous concentrer sur le cas des petits contrastes. En effet, comme nous avons pu constater au § 5.4.1, la solution de l'équation de dispersion est très coûteuse pour $\epsilon_a < 1$ alors qu'elle est aisée pour $\epsilon_a > 1$: en fixant la valeur de ϵ_b à -1 et en choisissant $\epsilon_a > 1$, nous pourrions, grâce au plus faible coût de solution de l'équation de dispersion, traiter un plus grand nombre de valeurs du contraste.

Dans la suite, nous différencierons notre étude en considérant successivement les valeurs propres positives puis les négatives.

5.5.1 Comparaison pour les valeurs propres positives

Commençons par nous intéresser aux valeurs propres λ positives : nous noterons

- vp_i^{th} la $i^{\text{ème}}$ valeur propre positive calculée via l'équation de dispersion (5.26),
- vp_i^N la $i^{\text{ème}}$ valeur propre positive calculée via la formulation naturelle,
- vp_i^{3ch} la $i^{\text{ème}}$ valeur propre positive calculée via la formulation à trois champs.

Afin d'estimer les erreurs entre les valeurs propres obtenues numériquement et les valeurs propres théoriques, nous allons calculer, pour toute valeur retenue de l'indice i , les quantités

$$err_i^N := \left| \frac{vp_i^{th} - vp_i^N}{vp_i^{th}} \right|, \quad err_i^{3ch} := \left| \frac{vp_i^{th} - vp_i^{3ch}}{vp_i^{th}} \right|.$$

Sur le tableau 5.3 nous reportons à titre d'exemple les cinq premières valeurs propres positives vp_i^{th} , vp_i^N , vp_i^{3ch} ainsi que les erreurs relatives err_i^N , err_i^{3ch} obtenues dans le cas d'un contraste $\kappa_\epsilon = -1/2$: nous pouvons ainsi constater que les approximations numériques sont très satisfaisantes. Comme nous

i	vp_i^{th}	vp_i^N	vp_i^{3ch}	err_i^N	err_i^{3ch}
1	3,6954	3,7039	3,7012	0,00232	0,00159
2	8,4463	8,4928	8,4663	0,00551	0,00238
3	9,3233	9,3767	9,4186	0,00572	0,01022
4	13,9181	14,0446	13,9909	0,00909	0,00523
5	16,5969	16,7760	16,8345	0,01079	0,01431

TAB. 5.3 – Les six premières valeurs propres positives pour $\epsilon_a = 2$ et $\epsilon_b = -1$.

l'avons proposé, faisons varier le contraste et suivons l'évolution des erreurs err_i^N et err_i^{3ch} : sur la figure 5.6 nous traçons $\log(err_1^N)$ et $\log(err_1^{3ch})$ en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|^{-1})$ (on rappelle $|\kappa_\epsilon|^{-1} = \epsilon_a$) alors que sur la figure 5.7 nous traçons, en fonction de ce dernier paramètre, les valeurs de $\log(err_2^N)$

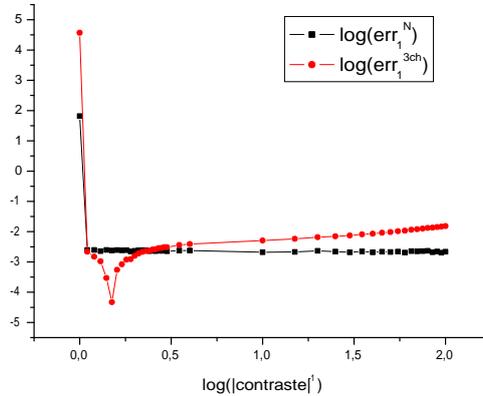


FIG. 5.6 – Évolution des logarithmes décimaux des erreurs relatives err_1^N et err_1^{3ch} en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|^{-1})$.

et $\log(err_2^{3ch})$ (Les erreurs obtenues étant petites et l'intervalle de variation de ϵ_a étant très grand, nous avons décidé de représenter les logarithmes afin d'augmenter la lisibilité des représentations graphiques). Nous pouvons remarquer que, à l'exception du cas critique où $\kappa_\epsilon = -1$, les deux approximations sont très satisfaisantes. L'erreur liée à la formulation naturelle apparaît indépendante du contraste tandis que l'erreur liée à la formulation à trois champs augmente (tout en restant petite) quand $|\kappa_\epsilon|$ diminue : bien qu'un contraste petit en valeur absolue soit nécessaire pour que la formulation à trois champs considérée soit bien posée, il est possible de rencontrer quelques problèmes lorsque $|\kappa_\epsilon|$ est très petit. Nous rappelons en effet que, dans les formulations à trois champs, les conditions de saut à l'interface sont prises en compte de façon directe. Plus le paramètre $|\kappa_\epsilon|$ est petit, plus le saut de la dérivée normale à l'interface est important : son approximation numérique peut s'avérer délicate, ce qui expliquerait la perte de précision observée. Comme nous avons déjà remarqué, ce phénomène n'affecte pas l'approximation obtenue par la formulation naturelle. Cela pourrait s'expliquer par le fait que, dans cette dernière, la condition de raccord pour la trace normale n'est prise en compte que faiblement.

N.B. L'évolution des erreurs liées aux autres valeurs propres positives (lors de nos expériences nous les avons considérées jusqu'à la dixième) présente essentiellement le même comportement que celui des deux valeurs propres que nous venons d'étudier. Pour cette raison, afin de ne pas surcharger inutilement l'exposé, nous l'avons volontairement limité aux deux premières valeurs propres positives.

5.5.2 Comparaison pour les valeurs propres négatives

L'analyse des valeurs propres négatives se révèle plus délicate que celle des valeurs propres positives, à cause d'une anomalie sur les résultats

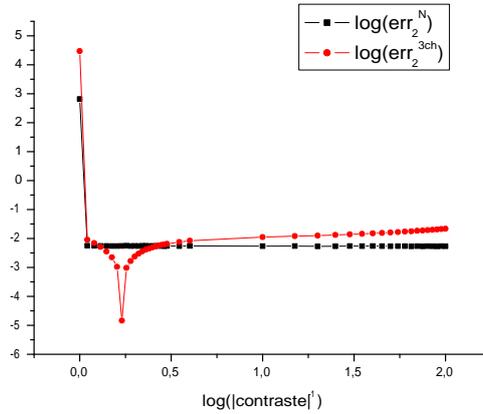


FIG. 5.7 – Évolution des logarithmes décimaux des erreurs relatives err_2^N et err_2^{3ch} en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|^{-1})$.

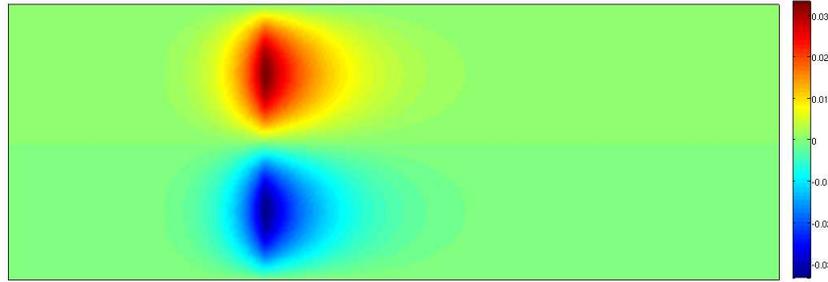
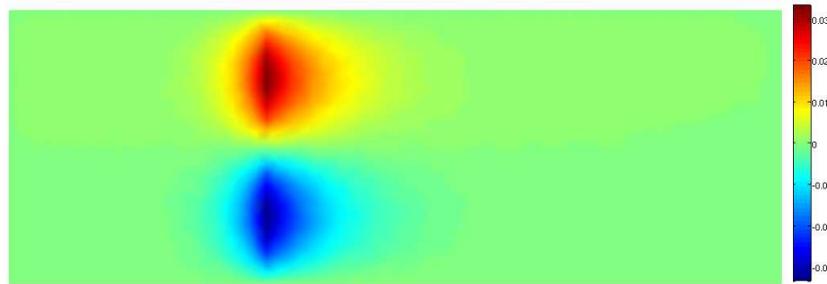
obtenus à partir de la formulation à trois champs : en nous intéressant aux premières valeurs propres négatives (celle de module plus petit), nous avons pu constater que, pour toutes les valeurs du contraste considérées, une des valeurs attendue théoriquement était capturée uniquement par la formulation naturelle. De plus, la formulation à trois champs nous fournit une valeur qui n'était pas prévue théoriquement. Sur le tableau 5.4 nous fournissons un exemple de nos observations, en reportant les valeurs propres négatives obtenues dans le cas où $\epsilon_a = 2$. Nous pouvons observer

v.p. théorique	v.p. naturelle	v.p. 3 champs
-1.6444	-1.64482	-1.7478
-4.4243	-4.4314	-4.4465
-6.5790	-6.5747	valeur propre non capturée
-7.4263	-7.4443	-7.4760
		-10.3715
-12.0825	-12.1286	-12.1765

TAB. 5.4 – Les cinq premières valeurs propres négatives pour $\epsilon_a = 2$, $\epsilon_b = -1$

que la troisième valeur propre négative égale à -6.57 est bien capturée par la formulation naturelle alors qu'elle n'a pas pu être obtenue via la formulation à trois champs. Cette dernière est par ailleurs la seule à nous fournir la valeur propre égale à -10.37 .

Pour chercher d'élucider ces phénomènes, nous allons nous intéresser aux vecteurs propres associés à ces valeurs propres particulières : sur les figures 5.8 et 5.9 nous avons respectivement représenté le vecteur propre calculé théoriquement associé à la valeur propre -6.57 et le vecteur propre calculé par la formulation naturelle associé à cette même valeur propre. Le vecteur

FIG. 5.8 – Vecteur propre calculé analytiquement associé à la valeur propre vp_{-3}^{th} FIG. 5.9 – Vecteur propre calculé par la formulation naturelle et associé à la valeur propre vp_{-3}^N

représenté sur la figure 5.9 est une excellente approximation du vecteur propre analytique. Il s'agit d'un mode qu'on qualifié de *mode d'interface* : la plupart de l'énergie est concentrée dans un voisinage de l'interface, alors que, dès que on en s'éloigne, l'intensité du champ devient négligeable. Comme il apparaît clairement sur la figure 5.8 et comme nous pouvons le voir sur le tableau 5.4 la valeur de n associée à ce mode d'interface est égale à deux.

(En considérant des valeurs propres négatives de module de plus en plus grand nous pourrions mettre en évidence les modes d'interface associés à $n = 3, 4, \dots$. Dans la suite, lorsqu'on parlera de mode d'interface nous ferons référence à ce mode d'interface caractérisé par $n = 2$).

Nous allons suivre une démarche analogue pour la valeur propre égale à -10.37 qui est capturée uniquement par la formulation à trois champs : sur la figure 5.10 nous représentons le vecteur propre calculé par la formulation à trois champs et associé à cette valeur propre. Nous remarquons qu'il s'agit essentiellement du même vecteur propre (bien que légèrement altéré) que celui représenté sur la figure 5.8. Lors du calcul des valeurs propres basé sur la formulation à trois champs, ce mode particulier a subi un décalage au sein du spectre. Ce décalage rend compte à la fois des deux exceptions mises en évidence au sein de la troisième colonne du tableau 5.4. L'explication de cette anomalie ne paraît pas évidente : les conditions qui assurent du point de vue théorique le caractère bien posé de la formulation

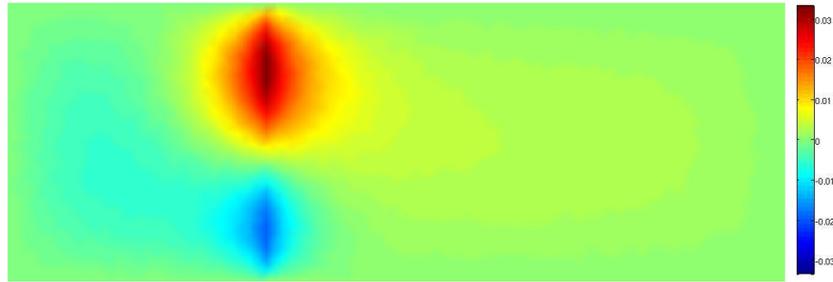


FIG. 5.10 – Vecteur propre calculé par la formulation à trois champs et associé à la valeur propre $\lambda = -10.37$

à trois champs (3.39) sont satisfaites¹ et c'est à partir de cette dernière formulation qu'est obtenue notre méthode de calcul des valeurs propres.

Pour trouver les raisons de ce décalage, il faut rappeler que le point clef pour la détermination du caractère bien posé de la formulation à trois champs est le contrôle des termes d'interface par des intégrales volumiques. Dans le cas des modes d'interface (et par leur nature même) ce contrôle peut se révéler extrêmement délicat, et des conditions plus strictes sur le contraste, ainsi que sur le pas du maillage au voisinage de l'interface, pourraient être nécessaires pour une approximation satisfaisante.

Dans la suite immédiate nous allons étudier comment le raffinement du maillage et la valeur du contraste κ_ϵ peuvent influencer sur l'approximation de ce mode particulier. Nous remarquons au passage que, si on fait varier le contraste, nous ne pourrions pas systématiquement identifier le mode d'interface au mode associé à la troisième valeur propre négative ou encore à la valeur propre égale à -6.57 : les variations de κ_ϵ entraînent en effet certains décalages au sein du spectre, de sorte que le mode d'interface ne correspondra pas toujours à la troisième valeur propre négative et ne sera pas toujours égale à -6.57 . Nous noterons alors vp_{int}^{th} (resp. vp_{int}^{3ch}) la valeur propre associée au mode d'interface calculée théoriquement (resp. capturée par la méthode à trois champs).

Influence du raffinement du maillage sur l'approximation par la formulation à trois champs du mode d'interface

Nous allons considérer une famille de triangulations du domaine Ω respectant la partition (en Ω_a et Ω_b) et présentant un fort raffinement au voisinage de l'interface. Nous noterons dans la suite h_{int} la pas du maillage local, au voisinage de l'interface. Sur la figure 5.11 nous représentons à titre d'exemple le maillage le plus grossier parmi ceux que nous allons utiliser. Ce premier maillage est constitué de 1808 points et 3438 éléments alors que le maillage le plus fin que nous utiliserons est constitué de 7098 points et 13842 éléments. À cause des limitations des machines de calcul à notre disposition,

¹La valeur absolue de κ_ϵ est suffisamment petite pour que la condition $\epsilon_a/|\epsilon_b| > 5/4c^2$ soit vérifiée, avec ici $c = \sqrt{2}$ (cf. proposition A.E.3).

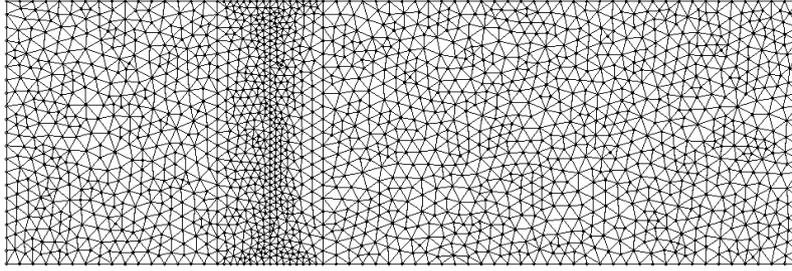


FIG. 5.11 – Exemple de maillage raffiné à l'interface. Maillage constitué de 1808 points et 3438 éléments.

nous n'avons pas pu adopter des maillages plus fins que ce dernier.

Les données qui nous ont permis de dresser le tableau 5.5 ont été obtenues en maintenant à des valeurs fixes les paramètres électromagnétiques (on rappelle $\epsilon_a = 2$, $\epsilon_b = -1$, $\mu_1 = \mu_2 = 3$) et en suivant, en fonction des caractéristiques des différents maillages, l'évolution de la valeur propre vp_{int}^{3ch} et de l'erreur $err_{int}^{3ch} = |(vp_{int}^N - vp_{int}^{3ch})/vp_{int}^N|$. Afin de mieux visualiser

h_{int}	nbr. de points	nbr. d'éléments	vp_{int}^{3ch}	err_{int}^{3ch}
1/40	1808	3438	-9,5968	$4,5871 \cdot 10^{-1}$
1/50	2755	5300	-8,8600	$3,4672 \cdot 10^{-1}$
1/60	4018	7770	-8,2708	$2,5716 \cdot 10^{-1}$
1/70	4494	8706	-7,9062	$2,0174 \cdot 10^{-1}$
1/80	7098	13842	-7,6250	$1,5899 \cdot 10^{-1}$

TAB. 5.5 – Influence du raffinement du maillage sur l'approximation de la valeur propre vp_{int}^{3ch} , pour $\epsilon_a = 2$, $\epsilon_b = -1$.

l'amélioration due au raffinement du maillage, sur la figure 5.12 nous représentons l'évolution de l'erreur relative err_{int}^{3ch} en fonction de h_{int}^{-1} . Nous remarquons ainsi que plus le pas est fin, plus la valeur propre vp_{int}^{3ch} est proche de la valeur propre théorique vp_{int}^{th} . La convergence que nous venons de mettre en évidence est cependant très lente et une approximation satisfaisante de ce mode d'interface par la formulation à trois champs peut se révéler extrêmement coûteuse en terme de calculs.

Influence du contraste κ_ϵ sur l'approximation par la formulation à trois champs du mode d'interface

Nous allons à présent nous intéresser à l'influence du contraste sur la qualité de l'approximation de la valeur propre associée au mode d'interface. Dans la suite de nos expériences, nous utiliserons uniquement le maillage qui est reporté sur la figure 5.5.

L'identification de ce mode particulier, pour toute valeur du contraste considérée, est assez aisée. Il suffit en effet d'observer quelle valeur propre attendue théoriquement n'est pas capturée par la méthode à trois champs et, symétriquement, quelle est la valeur propre obtenue uniquement par cette

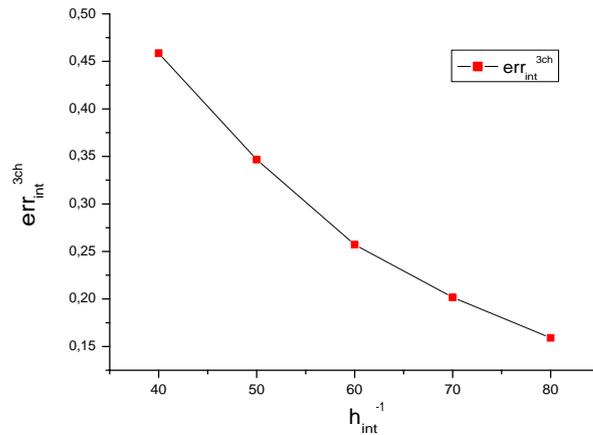


FIG. 5.12 – Évolution de l'erreur relative err_{int}^{3ch} en fonction du nombre d'éléments du maillage adopté.

dernière méthode. Pour s'assurer de la validité de cette étape, nous vérifions que les vecteurs propres associés aux valeurs propres ainsi repérées correspondent bien au mode d'interface.

Sur la figure 5.13 nous traçons l'évolution du logarithme décimal de l'erreur relative err_{int}^{3ch} en fonction de la valeur de $\log(|\kappa_\epsilon|^{-1})$ (i.e. en fonction de $\log(\epsilon_a)$). Sur ce dernier graphique nous observons que, plus la valeur de ϵ_a

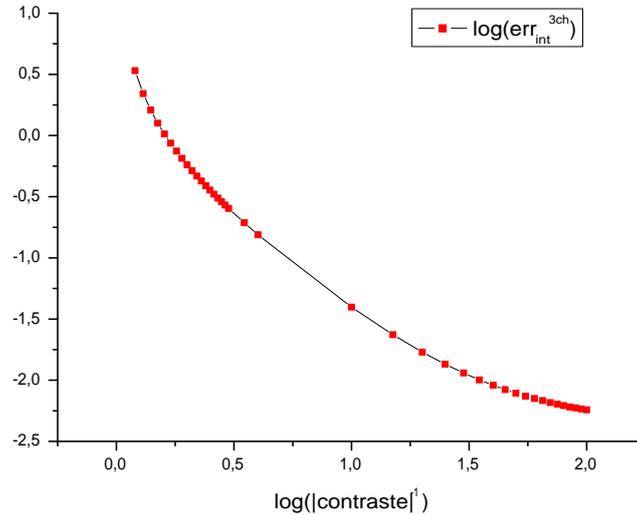


FIG. 5.13 – Évolution du logarithme décimal de l'erreur relative err_{int}^{3ch} en fonction de la valeur $\log(|\kappa_\epsilon|^{-1})$. On rappelle $|\kappa_\epsilon|^{-1} = \epsilon_a$.

est grande, mieux la valeur propre associée au mode d'interface est approchée par la méthode à trois champs. Cela peut être expliqué de deux façons différentes (et complémentaires) :

D'une part, certains termes volumiques qui au sein de la formulation à trois champs sont utilisés pour contrôler les termes d'interface, sont multipliés par ϵ_a alors que les termes d'interface sont sans dimension et ne font pas intervenir la constante diélectrique. Par conséquent, bien que dans le cas du mode d'interface la plupart de l'énergie soit concentrée au voisinage de ζ , pour des ϵ_a suffisamment grands, les termes volumiques parviennent à contrôler convenablement les contributions négatives des termes d'interface. De l'autre, comme nous pouvons le voir en confrontant le vecteur propre reporté sur la figure 5.14 avec le vecteur propre de la figure 5.8, plus ϵ_a est grand, moins l'énergie du mode d'interface est confinée autour de ζ . Dans ce cas les termes volumiques sont de plus en plus grands et peuvent parvenir à contrôler les termes d'interface.

Nous terminons cette partie dédiée à l'influence du contraste κ_ϵ sur l'ap-

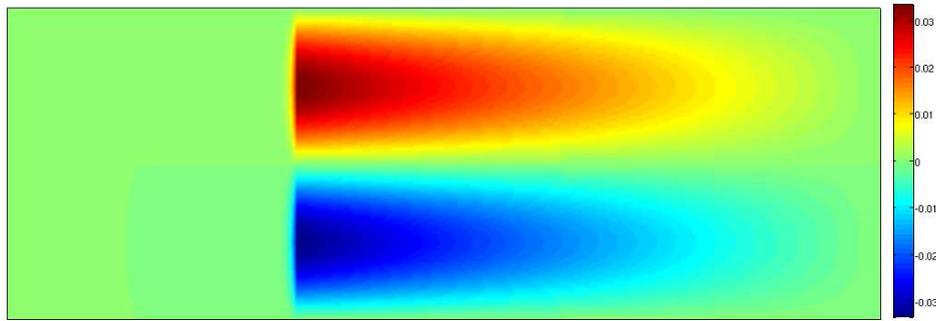


FIG. 5.14 – Mode d'interface calculé théoriquement pour $\epsilon_a = 100$, $\epsilon_b = -1$: $\lambda = 13.0911$, $n = 2$, $\omega_a = 62.9825$.

proximation par la formulation à trois champs du mode d'interface en nous intéressant, à titre comparatif, à l'approximation de ce dernier par la formulation variationnelle naturelle : sur la figure 5.15 nous reportons l'évolution du logarithme décimal de l'erreur $err_{int}^N := |(vp_{int}^{th} - vp_{int}^N)/vp_{int}^{th}|$ en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|^{-1})$. Il est alors immédiat de constater sur cette dernière figure que l'approximation du mode d'interface par la formulation variationnelle naturelle ne se heurte à aucune difficulté.

Traitement des autres valeurs propres négatives

Remarque 5.5.2 (Sur les autres modes d'interface) Par la méthode des éléments finis il n'est pas possible de capturer des détails plus fins que le pas du maillage. Il en résulte que les valeurs propres associées aux modes fortement oscillants sont moins bien approchées. Ainsi, plus $|\lambda|$ est grand, plus les valeurs propres calculées numériquement sont loin des prévisions théoriques. Ce phénomène bien connu concerne indistinctement toutes les valeurs propres et rend coûteuse l'étude des autres modes d'interface : les valeurs propres associées aux modes d'interface caractérisées par des valeurs de n supérieures à 2 sont négatives et assez éloignées dans le spectre. Nous avons pu constater que la formulation variationnelle à trois champs n'arrive pas à les capturer correctement. Cependant, à cause du nombre

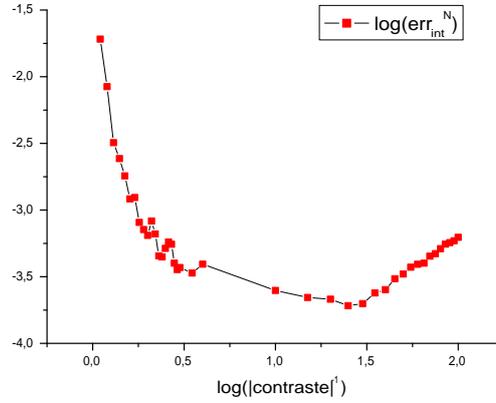


FIG. 5.15 – Évolution du logarithme décimal de l'erreur relative err_{int}^N en fonction de la valeur $\log(|\kappa_\epsilon|^{-1})$. On rappelle $|\kappa_\epsilon|^{-1} = \epsilon_a$.

trop important de valeurs propres à considérer et des décalages intrinsèques à la méthode des éléments finis (que nous venons de rappeler pour des valeurs de $|\lambda|$ assez grandes), nous n'avons pas réussi à identifier les valeurs propres associées aux autres modes d'interface au sein du spectre calculé par la méthode à trois champs.

★

Plaçons nous à présent dans une région du spectre voisine de zéro et dans laquelle le seul mode d'interface est celui caractérisé par la valeur $n = 2$. Dans cette région intéressons-nous aux autres valeurs propres négatives. Pour les classer, nous commençons par exclure les valeurs propres liées au mode d'interface : en omettant ces dernières dans le comptage notons

- vp_{-i}^{th} la $i^{\text{ème}}$ valeur propre négative calculée via l'équation de dispersion (5.26),
- vp_{-i}^N la $i^{\text{ème}}$ valeur propre négative calculée via la formulation naturelle,
- vp_{-i}^{3ch} la $i^{\text{ème}}$ valeur propre négative calculée via la formulation à trois champs.

Sur les figures 5.16 et 5.17 nous reportons, respectivement pour $i = 1$ et $i = 2$, l'évolution de $\log(err_{-i}^N)$ et $\log(err_{-i}^{3ch})$ en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|^{-1})$. Comme nous pouvons le voir sur ces deux dernières figures les erreurs err_{-i}^N ($i = 1, 2$) restent toujours très petites. Cependant nous ne pouvons pas mettre en évidence un comportement significatif par rapport au contraste κ_ϵ . En revanche, nous observons que les erreurs err_{-i}^{3ch} diminuent avec le contraste : en dehors d'un voisinage de la valeur critique $\kappa_\epsilon = -1$, les approximations obtenues par la formulation à trois champs sont de bonne qualité. Elle n'arrivent cependant jamais à atteindre la précision obtenue par la formulation naturelle.

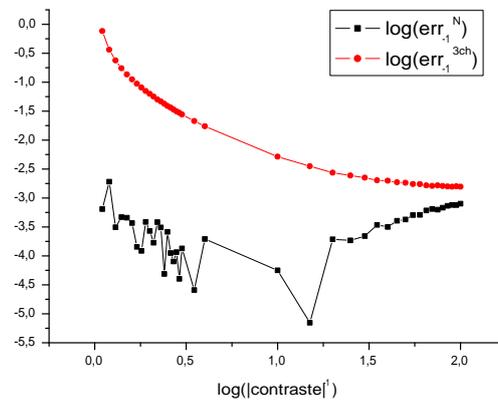


FIG. 5.16 – Évolution du logarithme décimal des erreurs relatives err_{-1}^N et err_{-1}^{3ch} en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|^{-1})$.

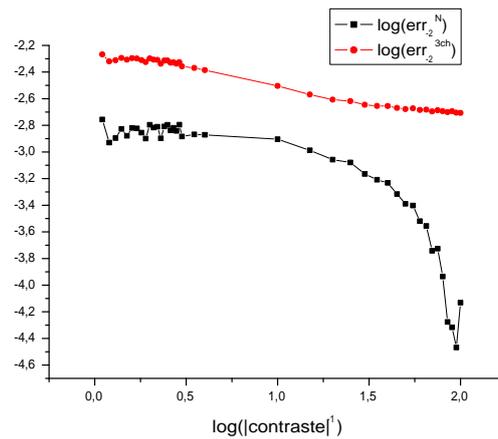


FIG. 5.17 – Évolution du logarithme décimal des erreurs relatives err_{-2}^N et err_{-2}^{3ch} en fonction de $\log(|\kappa_\epsilon|^{-1})$.

5.5.3 Bilan de la comparaison

La méthode numérique de calcul des valeurs propres basée sur la formulation naturelle s'est révélée la méthode la plus fiable et la plus robuste, ce qui nous a permis de valider numériquement le résultat de convergence présenté au § 5.3.1.

Les techniques basées sur la formulation à deux champs se sont révélés inadaptées pour approcher convenablement les valeurs propres du problème (5.1), tandis que les techniques basées sur la formulation à trois champs ont montré leurs limites dans l'approximation des modes d'interface.

Bien qu'aucun cadre théorique ne nous ait permis d'estimer a priori la qualité des valeurs propres calculées en discrétisant la formulation à trois champs, la défaillance liée à cette méthode nous a surpris : nous considérons en effet que, puisque dans la formulation à trois champs la solution est surdéterminée (on rappelle que l'on calcule u_a , u_b ainsi que le gradient d'un de ces deux champs), celle-ci aurait pu fournir des approximations de valeurs propres d'une qualité comparable à celles obtenues par la formulation naturelle. Les expériences que nous venons de présenter ont contredit nos attentes.

Les limites relevées pour la formulation à trois champs pourraient être reliées à un problème de raccord à l'interface entre les champs u_a^h , u_b^h d'une part et ∇u_a^h , \mathbf{u}_b^h (ou \mathbf{u}_a^h et ∇u_b^h , suivant la formulation à trois champs considérée) de l'autre. Numériquement, en effet, ces raccords dépendent de la compatibilité entre les différents degrés d'interpolation choisis pour chacun de ces trois champs.

La formulation naturelle, plus simple à mettre en œuvre et moins coûteuse en termes de calcul, se révèle donc la meilleure méthode pour la solution numérique du problème aux valeurs propres.

5.6 Le cas où ϵ et μ changent de signe

Au cours de ce paragraphe nous proposons d'approcher, à l'aide de la formulation variationnelle naturelle, les valeurs propres du problème (5.1), pour ϵ et μ qui changent de signe.

Nous continuerons à considérer la cavité rectangulaire particulière introduite au § 5.4.1, pour laquelle on supposera $\Omega_a = \Omega_1$ et $\Omega_2 = \Omega_b$; comme précédemment, nous utiliserons le maillage reporté sur la figure 5.5 et on discrétisera le problème (5.6) par éléments finis $P1$. Pour nos expériences numériques nous allons prendre en compte les cinq configurations explicitées sur le tableau 5.6.

Au cours de nos tests, pour ces cinq configurations, nous avons pu mettre en évidence des valeurs propres purement réelles, mais aussi des valeurs propres complexes, ce qui tend à confirmer le caractère non autoadjoint du problème (5.2) lorsque ϵ et μ changent de signe.

Sur les figures 5.18-5.22 nous représentons les valeurs propres complexes de plus petit module, calculées dans chacune des configurations retenues

configuration	ϵ_a	ϵ_b	μ_a	μ_b	$(\epsilon_a\mu_a)/(\epsilon_b\mu_b)$
1	1.5	-1	1.5	-1	1.5
2	4	-1	1.5	-1	6
3	10	-1	1.5	-1	15
4	1.5	-1	10	-1	15
5	10	-1	10	-1	100

TAB. 5.6 – Les cinq configurations considérées pour les expériences numériques présentées au cours de ce paragraphe

(pour augmenter la lisibilité nous avons choisi de ne pas reporter sur ces graphiques les valeurs propres réelles) : nous pouvons vérifier visuellement que, en accord avec les résultats de la proposition 5.4.1, si λ est une valeur propre à partie imaginaire non nulle, alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre.

De plus, sur ces figures, nous observons que les nuages de points représentant les valeurs propres non réelles semblent former des structures non aléatoires.

En confrontant entre elles les figures 5.23-5.27 (sur lesquelles nous représentons, pour chaque cas de figure, l'intégralité des valeurs propres non réelles calculées) nous notons que plus la quantité $((\epsilon_a\mu_a)/(\epsilon_b\mu_b))$ est petite, plus les valeurs propres complexes tendent à augmenter en module et en nombre.

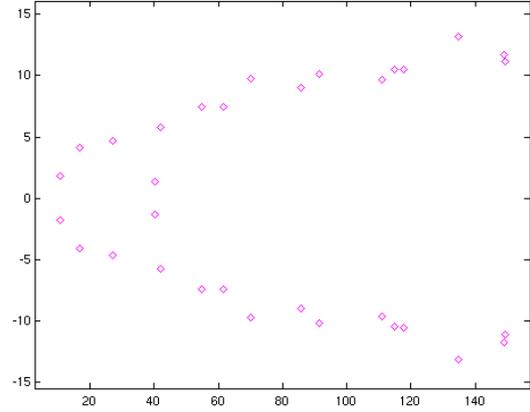
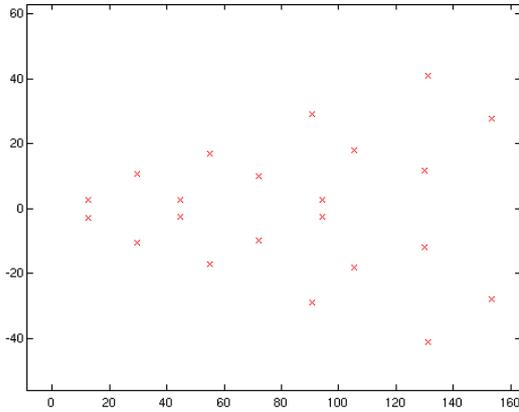


FIG. 5.18 – Configuration n° 1, valeurs propres complexes de plus petit module : on représente $\Im(\lambda)$ en fonction de $\Re(\lambda)$.

FIG. 5.19 – Configuration n° 2, valeurs propres complexes de plus petit module : on représente $\Im(\lambda)$ en fonction de $\Re(\lambda)$.

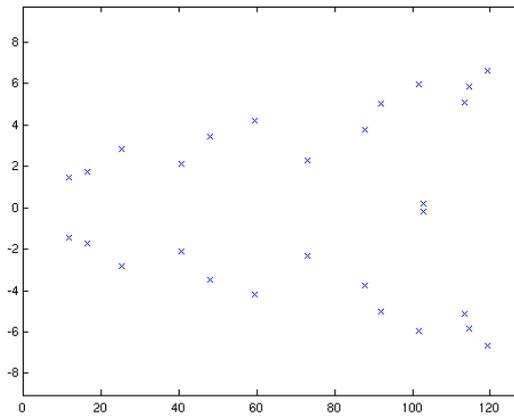


FIG. 5.20 – Configuration n°3, valeurs propres complexes de plus petit module : on représente $\Im(\lambda)$ en fonction de $\Re(\lambda)$.

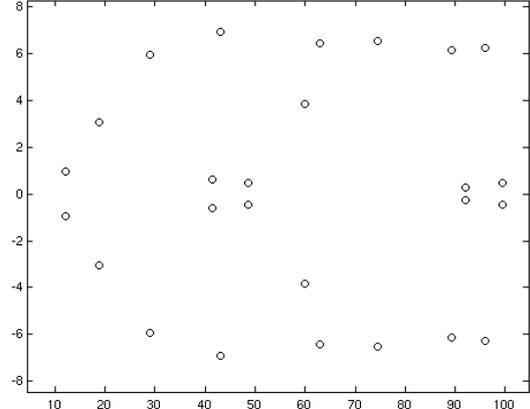
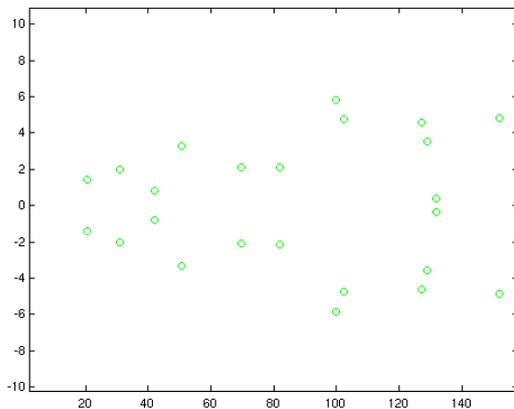


FIG. 5.21 – Configuration n°4, valeurs propres complexes de plus petit module : on représente $\Im(\lambda)$ en fonction de $\Re(\lambda)$.

FIG. 5.22 – Configuration n°5, valeurs propres complexes de plus petit module : on représente $\Im(\lambda)$ en fonction de $\Re(\lambda)$.

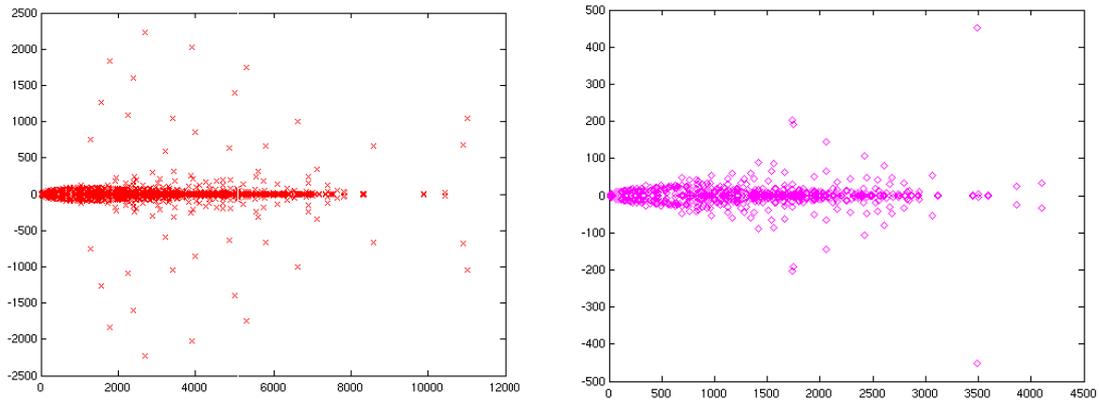


FIG. 5.23 – Configuration n° 1, intégralité du spectre complexe calculé : on représente $\Im(\lambda)$ en fonction de $\Re(\lambda)$. FIG. 5.24 – Configuration n° 2, intégralité du spectre complexe calculé : on représente $\Im(\lambda)$ en fonction de $\Re(\lambda)$.

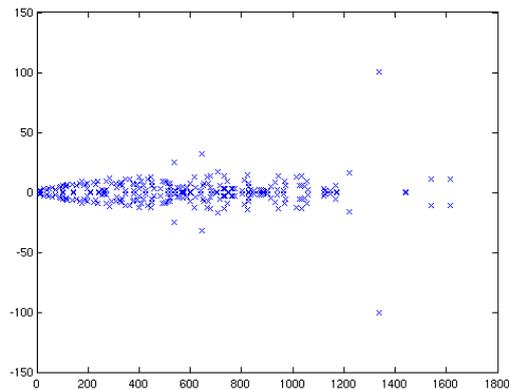


FIG. 5.25 – Configuration n°3, intégralité du spectre complexe calculé : on représente $\Im(\lambda)$ en fonction de $\Re(\lambda)$.

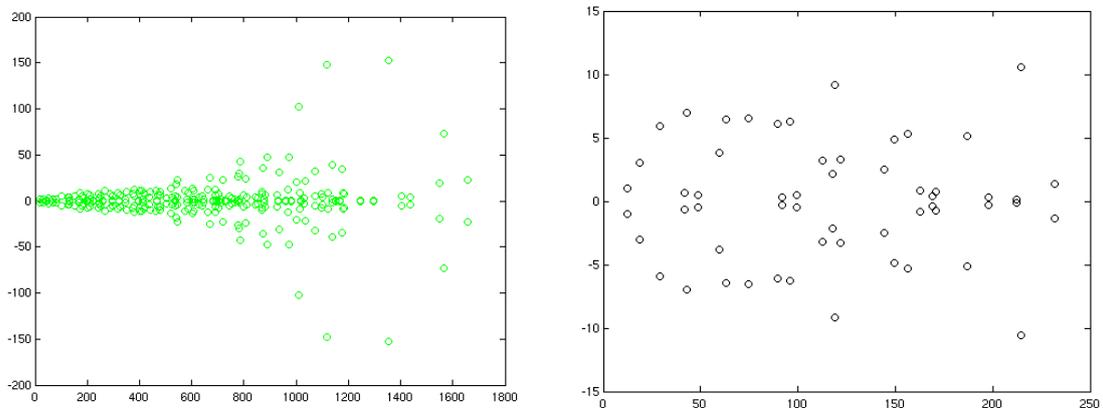


FIG. 5.26 – Configuration n°4, intégralité du spectre complexe calculé : on représente $\Im(\lambda)$ en fonction de $\Re(\lambda)$. FIG. 5.27 – Configuration n°5, intégralité du spectre complexe calculé : on représente $\Im(\lambda)$ en fonction de $\Re(\lambda)$.

Nous soulignons, d'autre part, qu'un changement de maillage n'influe pas de façon considérable sur l'approximation des valeurs propres complexes de plus petit module. Bien que cela ait pu être vérifié dans tous les cas de figure considérés, afin de ne pas surcharger l'exposé, nous illustrons cette propriété en reportant sur la figure 5.28 uniquement les résultats obtenus pour la configuration n° 1 : sur cette dernière figure nous traçons en rouge les valeurs propres complexes calculées en utilisant le maillage reporté sur la figure 5.5 et en noire celles calculées en utilisant le maillage raffiné à l'interface représenté sur la figure 5.11. Nous observons, surtout pour les valeurs propres de plus petit module, une bonne coïncidence entre les valeurs issues des deux différentes approximations.

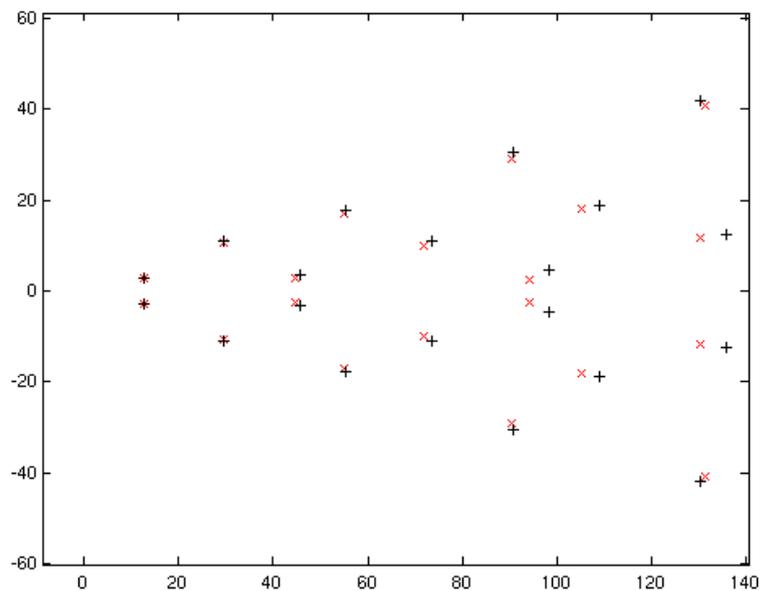


FIG. 5.28 – Configuration n° 1 : en rouge sont tracé les valeurs propres complexes calculées en utilisant le maillage reporté sur la figure 5.5 et en noire celles calculées en utilisant le maillage raffiné à l'interface représenté sur la figure 5.11.

Nous dédions la suite de ce paragraphe à l'étude de quelques modes propres. Commençons par considérer les figures 5.29-5.33 sur lesquelles, pour chacune des cinq configurations, nous représentons le mode associé à la plus petite valeur propre réelle positive. Sur ces figure nous pouvons observer que, à l'exception du cas n° 1 (pour lequel $|\kappa_\epsilon|$ est petit) et de façon analogue à ce que nous avons observé au § 5.4.1, l'énergie des modes est concentrée dans les régions où ϵ et μ sont positifs.

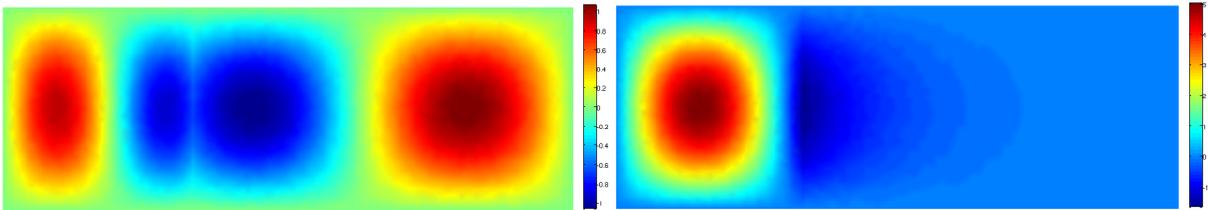


FIG. 5.29 – Configuration n° 1, mode propre associé à la plus petite valeur propre positive $\lambda = 17.7356$. FIG. 5.30 – Configuration n° 2, mode propre associé à la plus petite valeur propre positive $\lambda = 3.6692$.

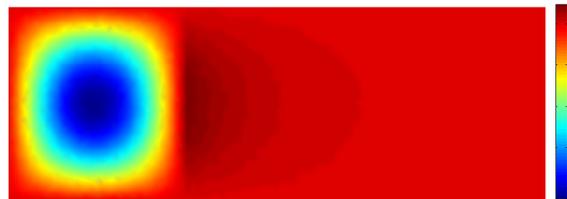


FIG. 5.31 – Configuration n°3, mode propre associé à la plus petite valeur propre positive $\lambda = 1.3664$.

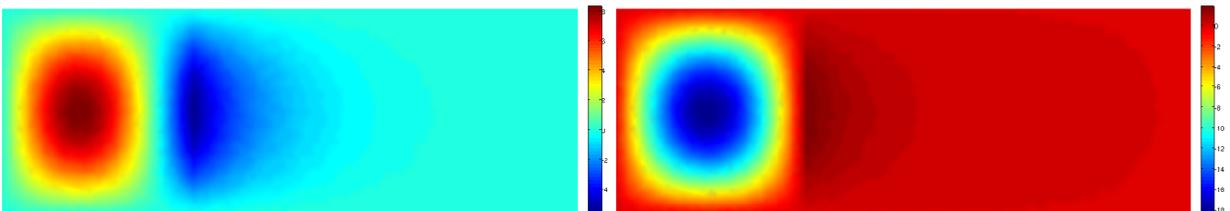


FIG. 5.32 – Configuration n°4, mode propre associé à la plus petite valeur propre positive $\lambda = 1.6638$. FIG. 5.33 – Configuration n°5, mode propre associé à la plus petite valeur propre positive $\lambda = 0.2045$.

Intéressons nous à présent aux modes propres associés aux valeurs propres complexes : sur les figures 5.34-5.35 (respectivement 5.36-5.37, 5.38-5.39, 5.40-5.41, 5.42-5.43) nous représentons les modes correspondant aux deux valeurs propres de plus petit module² obtenues dans la configuration n° 1 (resp. 2, 3, 4, 5). Sur toutes ces figures nous pouvons remarquer que, contrairement aux modes propres associés à des valeurs propres réelles, l'énergie n'est pas confinée dans un des deux sous-domaines ou à l'interface : l'énergie du mode discret u^h associé à une valeur propre complexe est en effet bien distribué en volume et vérifie numériquement, au pire des cas à 10^{-5} près, les deux relations

$$R_{H^1} := \frac{\left(\frac{1}{\epsilon_a} \nabla u^h, \nabla u^h \right)_{0,a}}{\left(\frac{1}{\epsilon_b} \nabla u^h, \nabla u^h \right)_{0,b}} \cong -1, \quad R_{L^2} := \frac{\left(\mu_a u^h, u^h \right)_{0,a}}{\left(\mu_b u^h, u^h \right)_{0,b}} \cong -1.$$

Nous notons en particulier que la vérification numérique de ces deux dernières relations permet de valider par l'expérience les résultats de la propositions 5.2.1.

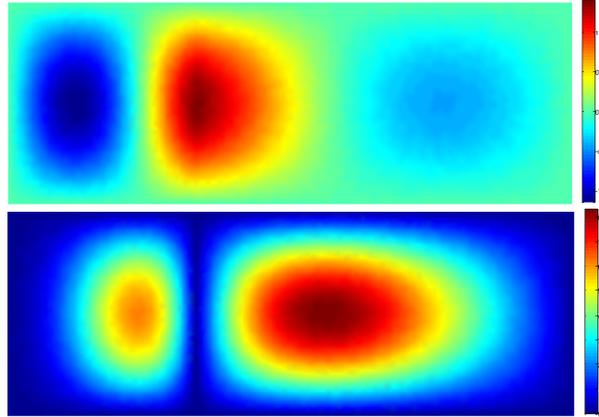


FIG. 5.34 – Configuration n° 1 : partie réelle (en haut) et imaginaire (en bas) du mode propre u^h associé à la valeur propre $\lambda = 12.6193 + 2.8347i$. On a dans ce cas $R_{H^1} \cong -1 + 1.2 \cdot 10^{-5}$ et $R_{L^2} \cong -1 + 1.6 \cdot 10^{-5}$.

²D'après la proposition 5.4.1, si (λ, u) , avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, est un couple valeur-mode propre, le couple $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ en est aussi un. Pour le traitement que nous sommes en train d'effectuer nous allons considérer alors λ et $\bar{\lambda}$ comme s'il s'agissait d'une unique valeur propre

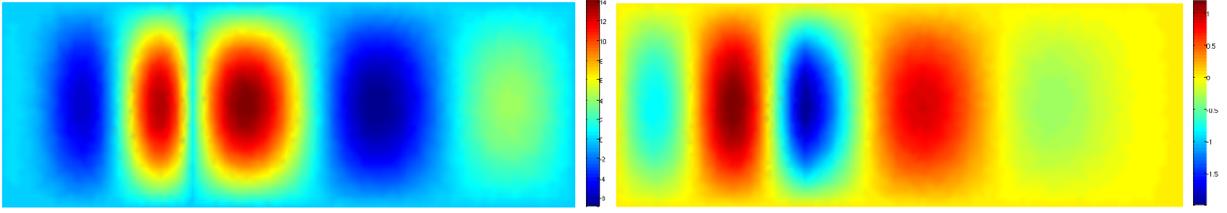


FIG. 5.35 – Configuration n° 1 : partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) du mode propre u^h associé à la valeur propre $\lambda = 29.4435 + 10.6568i$. On a dans ce cas $R_{H^1} \cong -1 - 4 \cdot 10^{-6}$ et $R_{L^2} \cong -1 - 2.3 \cdot 10^{-6}$.

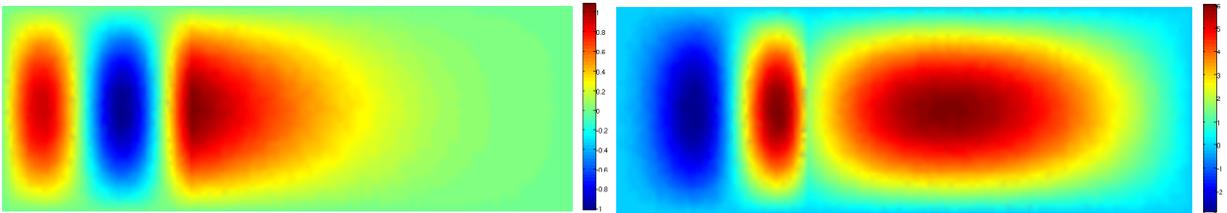


FIG. 5.36 – Configuration n° 2 : partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) du mode propre u^h associé à la valeur propre $\lambda = 10.7181 + 1.8221i$. On a dans ce cas $R_{H^1} \cong -1 + 10^{-5}$ et $R_{L^2} \cong -1 + 10^{-5}$.

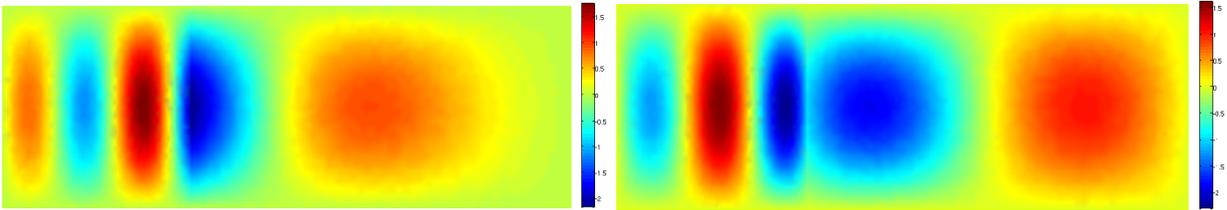


FIG. 5.37 – Configuration n° 2 : partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) du mode propre u^h associé à la valeur propre $\lambda = 16.7615 + 4.1402i$. On a dans ce cas $R_{H^1} \cong -1 + 4 \cdot 10^{-7}$ et $R_{L^2} \cong -1 + 1.5 \cdot 10^{-7}$.

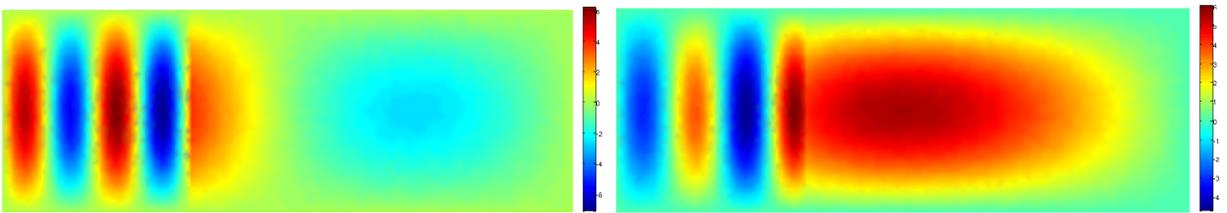


FIG. 5.38 – Configuration n° 3 : partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) du mode propre u^h associé à la valeur propre $\lambda = 11.6169 + 1.4417i$. On a dans ce cas $R_{H^1} \cong -1 + 4.4 \cdot 10^{-5}$ et $R_{L^2} \cong -1 + 4.6 \cdot 10^{-5}$.

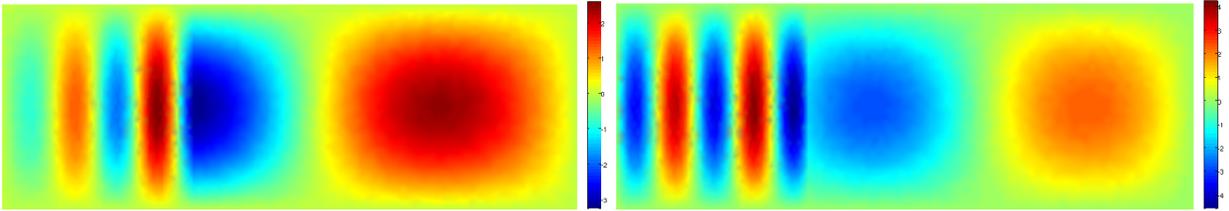


FIG. 5.39 – Configuration n° 3 : partie réelle (a gauche) et imaginaire (à droite) du mode propre u^h associé à la valeur propre $\lambda = 16.4311 + 1.7105i$. On a dans ce cas $R_{H^1} \cong -1 - 5 \cdot 10^{-6}$ et $R_{L^2} \cong -1 - 4.6 \cdot 10^{-6}$.

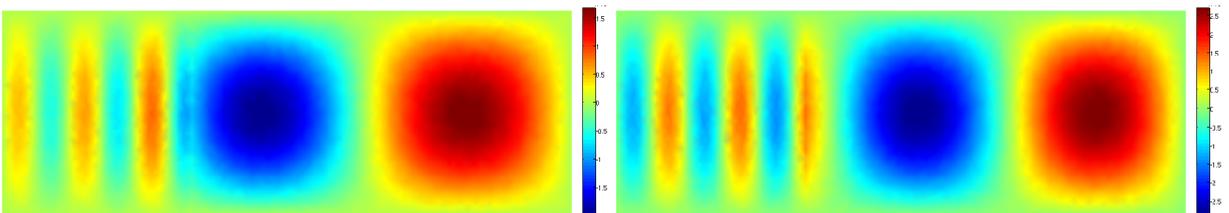


FIG. 5.40 – Configuration n° 4 : partie réelle (a gauche) et imaginaire (à droite) du mode propre u^h associé à la valeur propre $\lambda = 20.3811 + 1.4198i$. On a dans ce cas $R_{H^1} \cong -1 - 3.9 \cdot 10^{-6}$ et $R_{L^2} \cong -1 - 1.6 \cdot 10^{-6}$.

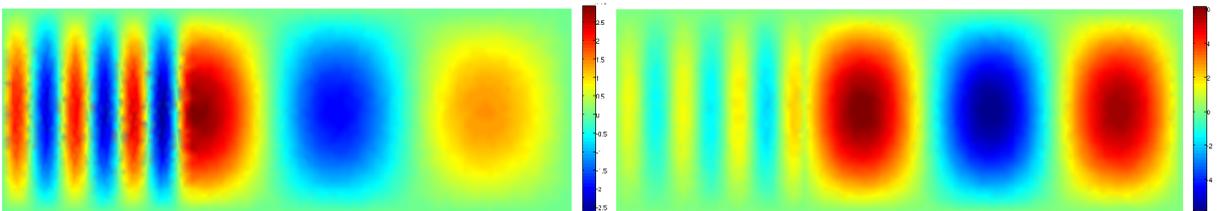


FIG. 5.41 – Configuration n° 4 : partie réelle (a gauche) et imaginaire (à droite) du mode propre u^h associé à la valeur propre $\lambda = 31.0646 + 2.0010i$. On a dans ce cas $R_{H^1} \cong -1 + 1.3 \cdot 10^{-5}$ et $R_{L^2} \cong -1 + 1.3 \cdot 10^{-5}$.

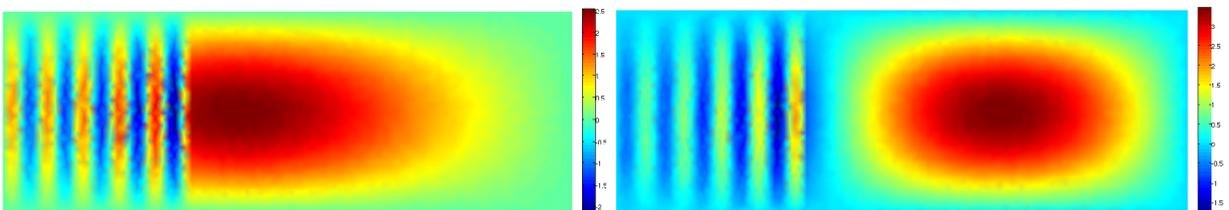


FIG. 5.42 – Configuration n° 5 : partie réelle (a gauche) et imaginaire (à droite) du mode propre u^h associé à la valeur propre $\lambda = 12.1096 + 0.9665i$. On a dans ce cas $R_{H^1} \cong -1 + 3 \cdot 10^{-5}$ et $R_{L^2} \cong -1 + 2.6 \cdot 10^{-5}$.

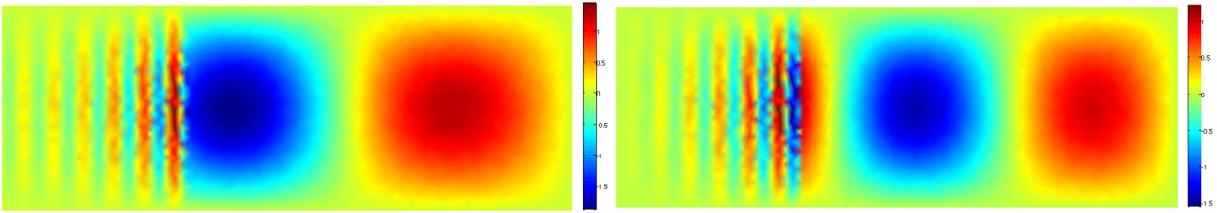


FIG. 5.43 – Configuration n° 5 : partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) du mode propre u^h associé à la valeur propre $\lambda = 18.7658 + 3.0602i$. On a dans ce cas $R_{H^1} \cong -1 - 4.5 \cdot 10^{-6}$ et $R_{L^2} \cong -1 - 3.1 \cdot 10^{-6}$.

Pour conclure ce paragraphe, soulignons que l'intégralité des tests que nous avons présentés sont en accord avec les éléments théoriques, établis dans le cas où ϵ et μ changent de signe (cf. les propositions 5.2.1 et 5.4.1).

Un nouveau résultat de compacité pour l'électromagnétisme

6.1 Introduction

Considérons le problème de Maxwell (1.13)-(1.14), fermé par des conditions aux bords de type conducteur parfait et posé dans le domaine tridimensionnel Ω introduit au § 1.7.

Dans le cas où les champs \mathbf{E} et \mathbf{J} sont de carré intégrable, le champ électrique appartient à $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$. La condition de trace tangentielle nulle sur $\partial\Omega$ peut être prise en compte de façon essentielle : le champ électrique appartient alors à l'espace fonctionnel

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) := \{\mathbf{p} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \text{ t.q. } \mathbf{p} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Considérons un problème modèle de la forme :
trouver $\phi_e \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \phi_e) = \rho, \quad (6.1)$$

puis posons $\mathbf{e} = \mathbf{E} - \nabla \phi_e$ et $\mathbf{j} = -i\omega \mathbf{J} - \omega^2 \epsilon \nabla \phi_e$. Le problème de Maxwell pour le champ électrique peut alors être reformulé de façon équivalente sous la forme

$$\begin{cases} \omega^2 \epsilon \mathbf{e} - \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{e} \right) = \mathbf{j} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{e}) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{e} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}. \quad (6.2)$$

Par construction le champ \mathbf{j} appartient à $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et est à divergence nulle. Le champ \mathbf{e} appartient à l'espace fonctionnel

$$\mathcal{X} := \{\mathbf{p} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \text{ t.q. } \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{p}) = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

La formulation variationnelle naturelle associée à (6.2) est :
trouver $\mathbf{e} \in \mathcal{X}$ t.q.

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}, \quad \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{e}, \mathbf{rot} \mathbf{v} \right)_{0,\Omega} - \omega^2 (\epsilon \mathbf{e}, \mathbf{v})_{0,\Omega} = -(\mathbf{j}, \mathbf{v})_{0,\Omega}. \quad (6.3)$$

Cette dernière formulation nous permet de mettre en évidence les deux difficultés liées au changement de signe des constantes électromagnétiques :

- dans le cas où ϵ n'est pas de signe constant, il n'existe pas de résultats nous assurant la compacité de l'injection de \mathcal{X} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$;
- dans le cas où μ n'est pas de signe constant, la difficulté est analogue à celle étudiée pour le problème modèle (1.24). En effet le terme $(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{e}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_{0,\Omega}$ n'a pas de signe spécifique et, par conséquent, il est impossible de conclure quant à sa coercivité.

La suite de ce chapitre sera consacrée à l'établissement d'un résultat de compacité pour l'espace \mathcal{X} . Grâce à ce nouveau résultat, au sein du prochain chapitre, nous pourrons généraliser l'approche des formulations enrichies : nous construirons, pour le problème de Maxwell exprimé sans perte de généralité en champ électrique, une formulation variationnelle à trois champs dont nous prouverons le caractère bien posé dans le cas générale où les deux constantes électromagnétiques présentent un saut de signe.

Dans le traitement que nous proposons d'effectuer nous utiliserons un certain nombre de résultats portant sur la trace des éléments de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \mathcal{O})$, où \mathcal{O} est un ouvert borné et connexe, à bord $\partial\mathcal{O}$ lipschitzien polyédrique. Nous reprenons [12] :

Considérons dans un premier temps la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}), \forall \mathbf{g} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}), \\ (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \mathbf{g})_{0, \mathcal{O}} - (\mathbf{rot} \mathbf{f}, \mathbf{g})_{0, \mathcal{O}} = \langle \mathbf{f} \times \mathbf{n}_{|\partial\mathcal{O}}, \mathbf{g}_{T|\partial\mathcal{O}} \rangle_{\partial\mathcal{O}}, \end{aligned}$$

dans laquelle $\mathbf{g}_{T|\partial\mathcal{O}}$ est la trace des composantes tangentielles de \mathbf{g} . Le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\mathcal{O}}$ représente un produit de dualité entre des espaces de Hilbert *ad hoc* constitués de fonctions définies sur $\partial\mathcal{O}$. Les applications de trace $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{|\partial\mathcal{O}}$ et $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_{T|\partial\mathcal{O}}$ sont surjectives linéaires et continues de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \mathcal{O})$ dans ces mêmes espaces de trace.

Soit $\gamma \subset \partial\mathcal{O}$ à bord $\partial\gamma$ lipschitzien et $\gamma' = \partial\mathcal{O} \setminus \bar{\gamma}$. Dans la formule d'intégration par parties suivante

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}), \forall \mathbf{g} \in \mathbf{H}_{0, \gamma}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}), \\ (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \mathbf{g})_{0, \mathcal{O}} - (\mathbf{rot} \mathbf{f}, \mathbf{g})_{0, \mathcal{O}} = \langle \mathbf{f} \times \mathbf{n}_{|\gamma'}, \mathbf{g}_{T|\gamma'} \rangle_{\gamma'}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

le produit de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\gamma'}$ est considéré entre des espaces de Hilbert appropriés ; l'application de trace $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_{T|\gamma'}$ est surjective, linéaire et continue de $\mathbf{H}_{0, \gamma}(\mathbf{rot}; \mathcal{O})$ dans l'espace apparaissant à droite dans le produit de dualité. Les rôles de \mathbf{f} et \mathbf{g} peuvent être inversés : dans la formule

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}_{0, \gamma}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}), \forall \mathbf{g} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}), \\ (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \mathbf{g})_{0, \mathcal{O}} - (\mathbf{rot} \mathbf{f}, \mathbf{g})_{0, \mathcal{O}} = \langle \mathbf{f} \times \mathbf{n}_{|\gamma'}, \mathbf{g}_{T|\gamma'} \rangle_{\gamma'}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

le produit de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\gamma'}$ est toujours considéré entre des espaces de Hilbert appropriés. L'application de trace $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{f} \times \mathbf{n}_{|\gamma'}$ est, encore une fois, surjective linéaire et continue de $\mathbf{H}_{0, \gamma}(\mathbf{rot}; \mathcal{O})$ dans l'espace apparaissant à gauche du produit de dualité.

À l'aide de (6.4) il est aisé d'obtenir, pour tout champ appartenant à l'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$, la condition de raccord de la trace tangentielle le long de l'interface Σ : la restriction au domaine Ω_i ($i = 1, 2$) de tout élément de

$\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ appartenant à l'espace $\mathbf{H}_{0,\Gamma_i}(\mathbf{rot}; \Omega_i)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
& \forall \mathbf{p} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \\
0 &= (\mathbf{p}, \mathbf{rot} \mathbf{q})_0 + (\mathbf{rot} \mathbf{p}, \mathbf{q})_0 \\
&= \sum_{i=1,2} ((\mathbf{p}_i, \mathbf{rot} \mathbf{q}_i)_{0,i} + (\mathbf{rot} \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)_{0,i}) \\
&= \sum_{i=1,2} \langle \mathbf{p}_i \times \mathbf{n}_i, \mathbf{q}_T \rangle_\Sigma = \langle \mathbf{p}_1 \times \mathbf{n}_1 - \mathbf{p}_2 \times \mathbf{n}_1, \mathbf{q}_T |_\Sigma \rangle_\Sigma.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

6.2 Un résultat de compacité pour ϵ qui change de signe : une extension du théorème de compacité de Weber

Dans le cas où ϵ est de signe constant sur Ω , d'après [44], [27] l'injection de \mathcal{X} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Nous appelons ce résultat le *théorème de compacité de Weber*, en tribut aux travaux qu'il présenta dans [44].

Dans le cas où ϵ change de signe sur Ω , à notre connaissance, il n'existe pas de résultat prouvant que l'injection de l'espace \mathcal{X} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Dans le bût de pouvoir étendre le formalisme des formulations enrichies au problème de Maxwell, au cours de ce paragraphe nous prouverons que, dans le cas où un des deux contrastes globaux¹ R_a^ϵ ou R_b^ϵ (nous rappelons $R_a^\epsilon := \epsilon_b^- / \epsilon_a^{max}$, $R_b^\epsilon := \epsilon_a^{min} / \epsilon_b^+$) est suffisamment grand, alors l'injection de l'espace fonctionnel

$$\mathcal{XY} := \{\mathbf{p} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \text{ t.q. } \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{p}) \in L^2(\Omega)\}$$

est compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. L'injection de \mathcal{X} , qui est un sous-ensemble de \mathcal{XY} sera alors compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Nous proposons donc une extension du théorème de compacité de Weber. Pour cela, nous allons suivre une démarche analogue à celle proposée par Hazard et Lenoir pour prouver le même résultat de compacité dans le cas où ϵ ne change pas de signe (cf. Appendice B de [27]) : nous allons étudier séparément le cas de fonctions à rotationnel nul (appartenant à l'espace \mathcal{Y} défini plus bas), puis le cas de fonctions à divergence nulle (appartenant donc à l'espace \mathcal{X}).

Considérons dans un premier temps l'injection de l'espace

$$\mathcal{Y} := \{\mathbf{p} \in \mathcal{XY} \text{ t.q. } \mathbf{rot} \mathbf{p} = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Théorème 6.2.1 L'injection de l'espace fonctionnel \mathcal{Y} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte si au moins un des deux contrastes globaux R_a^ϵ ou R_b^ϵ est suffisamment grand.

¹Nous appelons ces contrastes globaux par opposition aux contrastes $\epsilon_a^{max} / \epsilon_a^{min}$, $\epsilon_b^+ / \epsilon_b^-$ que nous serons amenés à introduire et qu'on connotera comme locaux.

Preuve : On réalise cette preuve dans le cas d'un fort contraste R_a^ϵ .

Soit $(\mathbf{U}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de \mathcal{Y} . Puisque tout élément de cette suite est à rotationnel nul et puisque Ω est simplement connexe à bord $\partial\Omega$ connexe (cf. § 3.2.3), nous pouvons remplacer chaque \mathbf{U}^k par $\nabla\varphi^k$, avec $\varphi^k \in H_0^1(\Omega)$. Nous voulons alors montrer qu'une sous-suite de $(\nabla\varphi^k)_k$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

L'extraction d'une sous-suite étant un procédé itératif (on extrait une sous-suite, puis de cette dernière une autre sous-suite, etc...), nous garderons la même notation pour toutes les sous-suites d'une suite donnée.

Par construction φ^k est solution de :

trouver $\varphi^k \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \varphi^k) = \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{U}^k) \text{ dans } \Omega. \quad (6.7)$$

(Nous rappelons que, d'après le théorème 2.3.1 ou le théorème 3.3.1, ce problème est bien posé pour un contraste R_a^ϵ suffisamment grand.)

Pour $i = a, b$, soit p_i^k la solution du problème :

trouver $p_i^k \in H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ t.q.

$$\operatorname{div}(\epsilon_i \nabla p_i^k) = \operatorname{div}(\epsilon_i \mathbf{U}_i^k) \text{ dans } \Omega_i, \quad \epsilon_i \partial_{\mathbf{n}_i} p_i^k|_\zeta = 0 \text{ dans } \left(H_{00}^{1/2}(\zeta)\right)'. \quad (6.8)$$

La suite $(p_i^k)_k$ est bornée dans $H^1(\Omega_i)$, par conséquent, d'après le théorème d'injection de Sobolev, nous pouvons en extraire une sous-suite (toujours noté $(p_i^k)_k$) qui converge dans $L^2(\Omega_i)$. De plus, grâce à l'estimation

$$\left| \left(\epsilon_i \nabla(p_i^k - p_i^l), \nabla(p_i^k - p_i^l) \right)_{0,i} \right| \leq \|\operatorname{div}(\epsilon_i(\mathbf{U}_i^k - \mathbf{U}_i^l))\|_{0,i} \|p_i^k - p_i^l\|_{0,i},$$

il est immédiat de vérifier que la sous-suite $(p_i^k)_k$ converge dans $H^1(\Omega_i)$.

Introduisons à présent une sous-suite auxiliaire de terme $u_i^k := \varphi_i^k - p_i^k$.

Par construction ce champ appartient à $H^1(\Omega_i)$, de plus (u_a^k, u_b^k) satisfait le système

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\epsilon_i \nabla u_i^k) = 0 \text{ dans } \Omega_i \\ u_i^k|_{\Gamma_i} = 0 \\ u_a^k|_\zeta - u_b^k|_\zeta = h_\zeta^k \\ (\epsilon_a \partial_{\mathbf{n}_a} u_a^k + |\epsilon_b| \partial_{\mathbf{n}_b} u_b^k)|_\zeta = 0 \end{cases}, \quad (6.9)$$

où le saut à l'interface est égal à $h_\zeta^k := -(p_a^k - p_b^k)|_\zeta$. La suite $(h_\zeta^k)_k$ converge par construction dans $H_{00}^{1/2}(\zeta)$.

Posons $u^{kl} = u^k - u^l$ et $h_\zeta^{kl} = h_\zeta^k - h_\zeta^l$. D'après la définition de u^k , en intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(\epsilon_b \nabla u_b^{kl}, \nabla u_b^{kl} \right)_{0,b} &= \left\langle \epsilon_b \partial_{\mathbf{n}_b} u_b^{kl}, u_b^{kl} \right\rangle_\Sigma = \\ &= -_{H_{00}^{1/2}(\zeta)'} \left\langle \epsilon_b \partial_{\mathbf{n}_b} u_b^{kl}, h_\zeta^{kl} \right\rangle_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} - \left(\epsilon_a \nabla u_a^{kl}, \nabla u_a^{kl} \right)_{0,a}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

ce qui nous permet d'aboutir à l'inégalité

$$\epsilon_b^- \|\nabla u_b^{kl}\|_{0,b}^2 \leq a \|h_\zeta^{kl}\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} \left\| \epsilon_b \partial_{\mathbf{n}_b} u_b^{kl} \right\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)'} + \epsilon_a^{max} \|\nabla u_a^{kl}\|_{0,a}^2. \quad (6.11)$$

Pour borner le dernier terme de (6.11) nous utilisons (de façon implicite) un opérateur de type *Dirichlet-to-Neumann* : on passe du domaine Ω_a à l'interface ζ , puis de cette dernière au domaine Ω_b . Cela revient à interpréter (6.9) comme un problème dans lequel l'inconnue est définie sur Ω_a (i.e. u_a^k ou u_a^l).

En accord avec la proposition A.D.1, il est immédiat de vérifier que

$$\|\nabla u_a^{kl}\|_{0,a} \leq \mathcal{C}_{\epsilon_a}^{int} a \|u_a^{kl}\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} \leq \mathcal{C}_{\epsilon_a}^{int} \left(a \|u_b^{kl}\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} + a \|h_\zeta^{kl}\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} \right),$$

où le contraste local $\mathcal{C}_{\epsilon_a}^{int}$ est égal au rapport $\epsilon_a^{max}/\epsilon_a^{min}$.

Nous rappelons que l'opérateur de trace est linéaire continu de $H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b)$ dans $H_{00}^{1/2}(\zeta)$ muni de la norme $a \|\cdot\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)}$: nous notons $\mathcal{C}_{a \leftarrow b}$ sa norme (cf. la remarque A.D.2). Nous avons donc $a \|u_b^{kl}\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} \leq \mathcal{C}_{a \leftarrow b} \|\nabla u_b^{kl}\|_{0,b}$.

En assemblant tous ces résultats nous obtenons :

$$\left(\epsilon_b^- - (\mathcal{C}_{\epsilon_a}^{int} \mathcal{C}_{a \leftarrow b})^2 \epsilon_a^{max} \right) \|\nabla u_b^{kl}\|_{0,b}^2 \leq a \|h_\zeta^{kl}\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} \left\{ \epsilon_a^{max} (\mathcal{C}_{\epsilon_a}^{int})^2 \left(a \|h_\zeta^{kl}\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} + 2a \|\mathbf{u}_b^{kl}\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} \right) + \|\epsilon_b \partial_{\mathbf{n}_b} u_b^{kl}\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)'} \right\}. \quad (6.12)$$

Nous rappelons que la sous-suite $(u_b^k)_k$ est bornée dans $H^1(\Omega_b)$ et par conséquent $(\epsilon_2 \partial_n u_b^k|_\zeta)_k$ est une suite bornée dans $(H_{00}^{1/2}(\zeta))'$. Le membre de droite de (6.12) tend vers zéro pour $k, l \rightarrow \infty$. D'après la définition de R_a^ϵ nous déduisons que, si la condition

$$R_a^\epsilon > (\mathcal{C}_{\epsilon_a}^{int} \mathcal{C}_{a \leftarrow b})^2 \quad (6.13)$$

est satisfaite, alors la sous-suite $(u_b^k)_k$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega_b)$. Elle est donc convergente dans ce même espace. Nous rappelons que cela est vrai aussi pour $(p_b^k)_k$. Puisque $\nabla \varphi_b^k = \nabla(u_b^k + p_b^k)$, la sous-suite $(\nabla \varphi_b^k)_k$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega_b)$.

Pour terminer la preuve, il nous reste à montrer qu'une certaine sous-suite de $(\nabla \varphi_a^k)$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega_a)$. Pour cela, rappelons la formulation variationnelle naturelle associée à (6.7) :

trouver $\varphi^k \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \left(\epsilon \nabla \varphi^k, \nabla v \right)_0 = \left(\epsilon \mathbf{U}^k, \nabla v \right)_0. \quad (6.14)$$

Posons ensuite $\mathbf{U}^{kl} = \mathbf{U}^k - \mathbf{U}^l$, $\varphi^{kl} = \varphi^k - \varphi^l$ et choisissons dans (6.14) des fonctions test $v = \varphi^{kl}$. Après intégration par parties nous avons

$$\left(\epsilon_a \nabla \varphi_a^{kl}, \nabla \varphi_a^{kl} \right)_{0,a} - \left(|\epsilon_b| \nabla \varphi_b^{kl}, \nabla \varphi_b^{kl} \right) = - \left(\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{U}^{kl}), \varphi^{kl} \right)_0.$$

La suite $(\varphi^k)_k$ étant bornée dans $H^1(\Omega)$, nous pouvons en extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$. Puisque une sous-suite de $(\varphi_b^k)_k$ converge dans $H^1(\Omega_b)$ (si la condition (6.13) est satisfaite), il est immédiat de vérifier la convergence de $(\nabla \varphi_a^k)_k$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega_a)$.

Pour conclure, nous rappelons que $\mathbf{U}^k = \nabla\varphi^k$; nous pouvons alors extraire une sous-suite de $(\mathbf{U}^k)_k$ qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. ■

N.B. Pour prouver le théorème dans le cas d'un fort contraste R_b^ϵ il faut procéder de façon symétrique, en inversant les rôles de Ω_a et Ω_b .

Intéressons nous à présent à l'injection de l'espace \mathcal{X} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. À cause de difficultés d'ordre technique dans la structure des preuves que nous allons proposer, nous ne sommes pas en mesure de valider un tel résultat de compacité dans le cas général d'un domaine Ω quelconque. Nous sommes ainsi amenés à restreindre notre étude à des domaines localement réguliers au voisinage de l'interface : on supposera que l'interface ζ est régulière et que au voisinage de ζ les domaines Ω_i sont réguliers.

Définissons l'espace fonctionnel

$$\mathbf{W}_T(\Omega) := \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \text{ t.q. } \operatorname{div} \mathbf{w} \in L^2(\Omega), \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\},$$

Nous supposons plus précisément que

Hypothèse 6.2.1 il existe une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que

- $\chi = 1$ dans un voisinage de l'interface,
- $\forall \phi \in \mathbf{W}_T(\Omega), \chi\phi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ et l'application $\phi \mapsto \chi\phi$ est continue de $\mathbf{W}_T(\Omega)$ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Hypothèse 6.2.2 Pour tout $\mathbf{p}_i \in \mathbf{W}_T(\Omega_i)$ ($i = a, b$), $\chi\mathbf{p}_i \in \mathbf{H}^1(\Omega_i)$ et l'application $\mathbf{p}_i \mapsto \chi\mathbf{p}_i$ est continue de $\mathbf{W}_T(\Omega_i)$ dans $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$.

Remarque 6.2.1 Les deux hypothèses que nous venons d'introduire ne font pas intervenir la régularité de la permittivité électrique ϵ et peuvent être reformulées en termes géométriques : l'hypothèse 6.2.1 revient à considérer Ω "localement convexe" (cf. figure 6.1.a) ou $\partial\Omega$ "localement régulier" au voisinage de $\partial\Gamma_a \cap \partial\Gamma_b$ (cf. figure 6.1.b).

L'hypothèse 6.2.2 revient d'une part à considérer Ω_i "locale-

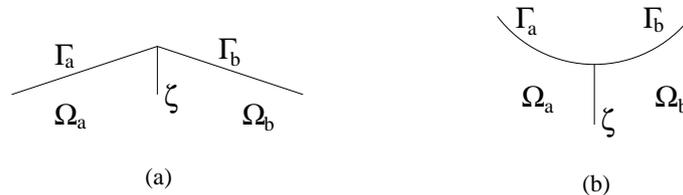


FIG. 6.1 – Illustration géométrique de l'hypothèse 6.2.1

ment convexe" au voisinage de $\partial\Gamma_a \cap \partial\Gamma_b$ (cf. figure 6.2) et d'autre part à considérer une interface ζ qui ne comporte pas de coins ou d'arêtes. On exclut en particulier toutes les configurations pour lesquelles l'interface ζ est régulière par morceaux.

★

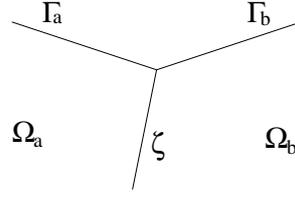


FIG. 6.2 – Les sous-domaines Ω_a et Ω_b sont “localement convexes” au voisinage de ζ : les angles $\widehat{\Gamma_a, \zeta}$ et $\widehat{\Gamma_b, \zeta}$ sont inférieurs à π .

Théorème 6.2.2 Sous les conditions géométriques des hypothèses 6.2.1 et 6.2.2, l’injection de l’espace fonctionnel \mathcal{X} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte si au moins un des deux contrastes globaux R_a^ϵ ou R_b^ϵ est suffisamment grand.

Preuve : Comme pour le théorème 6.2.1, nous réalisons la preuve dans le cas d’un fort contraste R_a^ϵ .

Soit $(\mathbf{W}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de \mathcal{X} . Intéressons nous alors à la solution du problème :

trouver $\phi^k \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ t.q.

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \phi^k = \epsilon \mathbf{W}^k \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} \phi^k = 0 \text{ dans } \Omega \\ \phi^k \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} . \quad (6.15)$$

Ce problème de type “magnétique” est bien posé dans le domaine Ω simplement connexe (cf. par exemple [14]). De plus la solution ϕ^k appartient à $\mathbf{W}_T(\Omega)$ et elle est bornée dans $\mathbf{W}_T(\Omega)$ ainsi que dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

On se propose de montrer qu’une certaine sous-suite de $(\mathbf{rot} \phi^k)_k$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Nous remarquons que, puisque \mathbf{W}^k appartient à \mathcal{X} , nous avons $\epsilon^{-1} \mathbf{rot} \phi^k \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$. Par conséquent ϕ^k est aussi solution de :

trouver $\phi^k \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ t.q.

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\epsilon} \mathbf{rot} \phi^k \right) = \mathbf{rot} \mathbf{W}^k \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} \phi^k = 0 \text{ dans } \Omega \\ \phi^k \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ \frac{1}{\epsilon} \mathbf{rot} \phi^k \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} . \quad (6.16)$$

En suivant une procédure analogue à celle de la preuve du théorème 6.2.1, nous allons isoler la trace de ϕ^k sur l’interface ζ , notée $(\phi^k)|_\zeta$ et qui appartient à $\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)$.

Dans un premier temps, pour $i = a, b$, considérons \mathbf{p}_i^k solution de :
trouver $\mathbf{p}_i^k \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_i)$ t.q.

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\epsilon_i} \mathbf{rot} \mathbf{p}_i^k \right) - \operatorname{sg}(\epsilon_i) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}_i^k) = \mathbf{rot} \mathbf{W}_i^k \text{ dans } \Omega_i \\ \frac{1}{\epsilon_i} \mathbf{rot} \mathbf{p}_i^k \times \mathbf{n}_i|_{\partial\Omega_i} = 0 \\ \mathbf{p}_i^k \cdot \mathbf{n}_i|_{\partial\Omega_i} = 0 \end{cases} , \quad (6.17)$$

où $sg(\epsilon_i)$ est égal au signe de ϵ_i .

La suite $(\mathbf{p}_i^k)_k$ est bornée dans $\mathbf{W}_T(\Omega_i)$ (cf. la proposition A.G.2) et $(\chi\mathbf{p}_i) \in H^1(\Omega_i)$. D'après la remarque A.G.1 une certaine sous-suite (toujours notée $(\mathbf{p}_i^k)_k$) converge dans ce même espace et $(\mathbf{p}_i^k|_\zeta)_k$ converge dans $\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)$. De plus (cf. la proposition A.G.3) $\text{div } \mathbf{p}_i^k$ est bornée dans $H^1(\Omega_i)$. Posons ensuite $\mathbf{h}_\zeta^k := \mathbf{p}_a^k|_\zeta - \mathbf{p}_b^k|_\zeta$ (par construction \mathbf{h}_ζ^k converge dans $\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)$) et introduisons le champ vectoriel auxiliaire $\mathbf{u}_i^k := \phi_i^k - \mathbf{p}_i^k$. Ce champ appartient à $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_i) \cap \mathbf{H}(\text{div}; \Omega_i)$ et satisfait le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\epsilon_i} \mathbf{rot } \mathbf{u}_i^k \right) - sg(\epsilon_i) \nabla(\text{div } \mathbf{u}_i^k) = 0 \text{ dans } \Omega_i \\ \text{div } \mathbf{u}_i^k = -\text{div } \mathbf{p}_i^k \text{ dans } \Omega_i \\ \mathbf{u}_i^k \cdot \mathbf{n}_i|_{\Gamma_i} = 0 \\ \frac{1}{\epsilon_i} \mathbf{rot } \mathbf{u}_i^k \times \mathbf{n}_i|_{\Gamma_i} = 0 \\ \mathbf{u}_a^k|_\zeta = \mathbf{u}_b^k|_\zeta - \mathbf{h}_\zeta^k \\ \left(\frac{1}{\epsilon_a} \mathbf{rot } \mathbf{u}_a^k \times \mathbf{n}_a + \frac{1}{|\epsilon_b|} \mathbf{rot } \mathbf{u}_b^k \times \mathbf{n}_a \right) |_\zeta = 0 \end{array} \right. . \quad (6.18)$$

Pour deux différents indices k et l , posons $\mathbf{u}_i^{kl} := \mathbf{u}_i^k - \mathbf{u}_i^l$, $\mathbf{h}_\zeta^{kl} := \mathbf{h}_\zeta^k - \mathbf{h}_\zeta^l$ et $\mathbf{p}_i^{kl} := \mathbf{p}_i^k - \mathbf{p}_i^l$; nous voulons montrer que $(\mathbf{u}_i^{kl})_{kl}$ converge vers zéro dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_i)$ pour $k, l \rightarrow \infty$.

Effectuons la différence entre les premières équations de (6.18) pour \mathbf{u}_i^k et \mathbf{u}_i^l et multiplions scalairement la première équation de (6.18) par \mathbf{u}_i^{kl} , puis intégrons par parties pour obtenir

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\epsilon_i} \mathbf{rot } \mathbf{u}_i^{kl}, \mathbf{rot } \mathbf{u}_i^{kl} \right)_{0,i} = \\ & \left\langle \frac{1}{\epsilon_i} \mathbf{rot } \mathbf{u}_i^{kl} \times \mathbf{n}_i, \mathbf{n}_i \times (\mathbf{u}_i^{kl} \times \mathbf{n}_i) \right\rangle_\zeta - sg(\epsilon_i) (\nabla(\text{div } \mathbf{p}_i^{kl}), \mathbf{u}_i^{kl})_{0,i}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

En calculant la somme $\sum_{i=a,b} \left(\frac{1}{\epsilon_i} \mathbf{rot } \mathbf{u}_i^{kl}, \mathbf{rot } \mathbf{u}_i^{kl} \right)_{0,i}$ et en prenant en compte les identités à l'interface nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\epsilon_a} \mathbf{rot } \mathbf{u}_a^{kl}, \mathbf{rot } \mathbf{u}_a^{kl} \right)_{0,a} = \\ & -sg(\epsilon_a) (\nabla(\text{div } \mathbf{p}_a^{kl}), \mathbf{u}_a^{kl})_{0,a} - sg(\epsilon_b) (\nabla(\text{div } \mathbf{p}_b^{kl}), \mathbf{u}_b^{kl})_{0,b} \\ & - \left(\frac{1}{\epsilon_b} \mathbf{rot } \mathbf{u}_b^{kl}, \mathbf{rot } \mathbf{u}_b^{kl} \right)_{0,b} + \left\langle \frac{1}{\epsilon_b} \mathbf{rot } \mathbf{u}_b^{kl} \times \mathbf{n}_b, \mathbf{n}_b \times (\mathbf{h}_\zeta^{kl} \times \mathbf{n}_b) \right\rangle_\zeta. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Notons d'une part que

$$\left| \left\langle \frac{1}{\epsilon_b} \mathbf{rot } \mathbf{u}_b^{kl} \times \mathbf{n}_b, \mathbf{n}_b \times (\mathbf{h}_\zeta^{kl} \times \mathbf{n}_b) \right\rangle_\zeta \right| \leq \frac{1}{\epsilon_b} \|\mathbf{rot } \mathbf{u}_b^{kl}\|_{\mathbf{TR}} \|\mathbf{h}_\zeta^{kl}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)}.$$

D'autre part, d'après le résultat de la proposition A.G.1,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{rot } \mathbf{u}_b^{kl}\|_{0,b}^2 & \leq c \|\mathbf{u}_b^{kl}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)} \\ & \leq c \left(\|\mathbf{u}_a^{kl}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)} + \|\mathbf{h}_\zeta^{kl}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)} \right); \end{aligned}$$

il existe par conséquent, d'après l'hypothèse 6.2.2, une constante c' strictement positive telle que

$$\|\mathbf{rot} \mathbf{u}_b^{kl}\|_{0,b}^2 \leq c' \left(\|\mathbf{rot} \mathbf{u}_a^{kl}\|_{0,a}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{p}_a^{kl}\|_{0,a}^2 + \|\mathbf{h}_\zeta^{kl}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)} \right).$$

(On rappelle $\operatorname{div} \mathbf{p}_i^{kl} = -\operatorname{div} \mathbf{u}_i^{kl}$ dans Ω_i , $i = a, b$.)

Grâce à ces dernières estimations, en partant de (6.20), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\epsilon_a^{max}} - \frac{c'}{\epsilon_b} \right) \|\mathbf{rot} \mathbf{u}_a^{kl}\|_{0,a}^2 &\leq \left(\sum_{i=a,b} \|\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}_i^{kl})\|_{0,i} \|\mathbf{u}_i^{kl}\|_{0,i} \right) + \\ &\frac{c'}{\epsilon_b} (\|\operatorname{div} \mathbf{p}_a^{kl}\|_{0,a}^2 + \|\mathbf{h}_\zeta^{kl}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)}) + \\ &\frac{1}{\epsilon_b} \|\mathbf{rot} \mathbf{u}_b^{kl}\|_{\mathbf{TR}} \|\mathbf{h}_\zeta^{kl}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Le terme de droite de (6.21) converge vers zéro lorsque $k, l \rightarrow \infty$. On rappelle en effet que

- $\operatorname{div} \mathbf{p}_i^k$ est borné dans $H^1(\Omega_i)$,
- une certaine sous-suite $(\operatorname{div} \mathbf{p}_i^k)_k$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$,
- \mathbf{h}_ζ^k converge dans $\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)$,
- on peut extraire une sous-suite de $(\mathbf{u}_i^k)_k$ qui converge fortement dans $\mathbf{L}^2(\Omega_i)$. En effet, on rappelle $\mathbf{u}_i^k = \phi_i^k - \mathbf{p}_i^k$ et
 1. la suite $(\mathbf{p}_i^k)_k$ étant bornée dans $\mathbf{W}_T(\Omega_i)$ et ce dernier espace s'injectant de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega_i)$, on peut en extraire une sous-suite qui converge fortement dans $\mathbf{L}^2(\Omega_i)$.
 2. la suite $(\phi_i^k)_k$ étant bornée dans $\mathbf{W}_T(\Omega)$ et ce dernier espace s'injectant de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, on peut en extraire une sous-suite qui converge fortement dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Sa restriction au sous-domaine Ω_i converge alors dans $\mathbf{L}^2(\Omega_i)$.

Nous en déduisons que, si la condition

$$\frac{\epsilon_b^-}{\epsilon_a^{max}} > c' \quad (6.22)$$

est satisfaite, alors la (sous-)suite $(\mathbf{rot} \mathbf{u}_a^k)_k$ est de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(\Omega_i)$ et donc convergente dans ce même espace.

Nous avons déjà montré que cela est aussi vrai pour une certaine sous-suite $(\mathbf{rot} \mathbf{p}_a^k)_k$, par conséquent $(\mathbf{rot} \phi_a^k)_k$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega_a)$. Puisque $\mathbf{W}_a^k = \epsilon_a^{-1} \mathbf{rot} \phi_a^k$, nous déduisons qu'une certaine sous-suite de $(\mathbf{W}_a^k)_k$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega_a)$.

Pour conclure la preuve, multiplions la première équation de (6.16) par $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_T(\Omega)$, puis intégrons par parties :

$$\left(\frac{1}{\epsilon} \mathbf{rot} \phi^k, \mathbf{rot} \mathbf{w} \right)_0 = \left(\mathbf{rot} \mathbf{W}^k, \mathbf{w} \right)_0. \quad (6.23)$$

Posons $\phi^{kl} := \phi^k - \phi^l$ et $\mathbf{W}^{kl} := \mathbf{W}^k - \mathbf{W}^l$, puis choisissons $\mathbf{w} = \phi^{kl}$ (pour deux différents indices k et l) dans (6.23) :

$$\left(\frac{1}{\epsilon_a} \mathbf{rot} \phi_a^{kl}, \mathbf{rot} \phi_a^{kl} \right)_{0,a} - \left(\frac{1}{|\epsilon_b|} \mathbf{rot} \phi_b^{kl}, \mathbf{rot} \phi_b^{kl} \right)_{0,b} = \left(\mathbf{rot} \mathbf{W}^{kl}, \phi^{kl} \right)_0.$$

Nous avons déjà prouvé qu'il existe une sous-suite $(\phi^k)_k$ qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. La sous-suite $(\mathbf{rot} \phi_a^k)_k$ étant convergente dans $\mathbf{L}^2(\Omega_a)$, nous déduisons que $(\mathbf{rot} \phi_b^k)_k$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega_b)$. Par conséquent $(\mathbf{W}_b^k)_k$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega_b)$, ce qui implique la convergence d'une certaine sous-suite de $(\mathbf{W}^k)_k$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. ■

N.B. Pour prouver le théorème dans le cas d'un fort contraste R_b^ϵ il faut procéder de façon symétrique, en inversant les rôles de Ω_a et Ω_b .

Théorème 6.2.3 L'injection de l'espace fonctionnel \mathcal{XY} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte si les hypothèses 6.2.1 et 6.2.2 sont vérifiées et si au moins un des deux contrastes globaux R_a^ϵ ou R_b^ϵ est suffisamment grand.

Preuve : Elle est basée sur la décomposition d'Helmholtz pour un champ vectoriel appartenant à l'espace \mathcal{XY} . Pour $\mathbf{xy} \in \mathcal{XY}$ résolvons un problème modèle de la forme :
trouver $\phi \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \phi) = \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{xy}) \text{ dans } \Omega.$$

Nous rappelons que ce problème est bien posé (cf. 2.3.1 ou 3.3.1). Posons alors $\mathbf{y} := \nabla \phi$ et $\mathbf{x} := \mathbf{xy} - \mathbf{y}$; par construction

$$\begin{cases} \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \text{ avec } \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{y}) = \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{xy}) \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \text{ avec } \mathbf{rot} \mathbf{x} = \mathbf{rot} \mathbf{xy} \text{ dans } \Omega \end{cases}.$$

Nous pouvons réexprimer \mathbf{x} comme $\mathbf{x} := \mathbf{rot} \phi$ (cf. le début de la preuve du théorème 6.2.1). Une simple intégration par parties nous permet alors d'établir $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_0 = (\mathbf{rot} \phi, \mathbf{y})_0 = 0$. Nous obtenons alors l'identité

$$\|\mathbf{xy}\|_0^2 = \|\mathbf{x}\|_0^2 + \|\mathbf{y}\|_0^2.$$

En combinant ces résultats nous déduisons que de toute suite $(\mathbf{xy}^k)_k$ bornée dans \mathcal{XY} , nous pouvons construire deux suites bornées $(\mathbf{x}^k)_k$ (dans \mathcal{X}) et $(\mathbf{y}^k)_k$ (dans \mathcal{Y}). D'après les théorèmes 6.2.1 et 6.2.2, nous pouvons extraire, de chacune de ces deux suites, une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. En réunissant ces deux sous-suites nous en obtenons une sous-suite $(\mathbf{xy}^k)_k$ qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. ■

Formulation enrichie pour le problème de Maxwell 3D

7.1 Introduction

Au cours de ce chapitre nous allons étendre l'approche des formulations à trois champs (cf. § 3.3) au problème de Maxwell tridimensionnel¹. Comme au chapitre précédent, sans perte de généralité, nous traiterons le problème de Maxwell pour le champ électrique. L'approche à trois champs nous permettra en particulier de résoudre le problème de perte de coercivité lié au changement de signe de la perméabilité électrique.

Grâce au résultat de compacité établi au chapitre précédent, sans faire aucune hypothèse sur le signe de la permittivité ϵ , nous montrerons que, sous certaines conditions convenables, la formulation à trois champs que nous allons construire rentre dans la catégorie des problèmes coercifs plus compacts.

7.2 Construction de la formulation

La première étape pour la construction de la formulation variationnelle à trois champs du problème de Maxwell consiste à expliciter le système d'équations (6.2) sur les deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . Pour une solution appartenant à \mathcal{X} , il est aisé de montrer (cf. § 3.1 et § 6.1) que le système (6.2) est équivalent à :

trouver $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_1) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2)$ t.q.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 \epsilon_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \mathbf{e}_1 \right) = \mathbf{j}_1 \text{ dans } \Omega_1 \\ \omega^2 \epsilon_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu_2} \mathbf{rot} \mathbf{e}_2 \right) = \mathbf{j}_2 \text{ dans } \Omega_2 \\ \operatorname{div}(\epsilon_i \mathbf{e}_i) = 0 \text{ dans } \Omega_i \\ \mathbf{e}_i \times \mathbf{n}_i|_{\Gamma_i} = 0 \quad i = 1, 2 \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_1|_{\Sigma} = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{n}_1|_{\Sigma} \\ \epsilon_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_1|_{\Sigma} = \epsilon_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_1|_{\Sigma} \\ \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_1 - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{rot} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{n}_1 \right) \Big|_{\Sigma} = 0 \end{array} \right. . \quad (7.1)$$

Nous remarquons en particulier que la restriction \mathbf{e}_i ($i = 1, 2$) du champ électrique au domaine Ω_i appartient à l'espace

$$\mathcal{X}_i := \{ \mathbf{p} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_i) \text{ t.q. } \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{p}) = 0 \text{ in } \Omega_i, \mathbf{p} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = 0 \} .$$

¹Nous notons que, comme il sera expliqué dans la remarque 7.2.1, il n'est pas possible de traiter le problème de Maxwell par une approche inspirée des méthodes type "deux champs".

Introduisons alors l'espace fonctionnel

$$\mathcal{X} := \left\{ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \text{ t.q.} \right. \\ \left. \mathbf{v} \times \mathbf{n}_1|_{\Sigma} = \mathbf{w} \times \mathbf{n}_1|_{\Sigma}, \epsilon_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_1|_{\Sigma} = \epsilon_2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_1|_{\Sigma} \right\} \quad (7.2)$$

et l'inconnue auxiliaire

$$\underline{\mathbf{e}}_2 := \frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \mathbf{e}_2.$$

Nous remarquons que, par les conditions de raccord sur l'interface Σ , (7.2) est une définition de \mathcal{X} alternative et équivalente à celle qui a été donnée au § 6.1.

Considérons à présent des fonctions test $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{X}$ et $\underline{\mathbf{v}}_2 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2)$, puis

- prenons le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\Omega_1)$ entre la première équation de (7.1) et \mathbf{v}_1 :

$$\omega^2(\epsilon_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1)_{0,1} - \left(\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \mathbf{e}_1 \right), \mathbf{v}_1 \right)_{0,1} = (\mathbf{j}_1, \mathbf{v}_1)_{0,1}.$$

Intégrons ensuite par parties

$$\omega^2(\epsilon_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1)_{0,1} - \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \mathbf{e}_1, \mathbf{rot} \mathbf{v}_1 \right)_{0,1} \\ - \left\langle \mathbf{v}_1 \times \mathbf{n}_1, \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \mathbf{e}_1 \right)_T \right\rangle_{\Sigma} = (\mathbf{j}_1, \mathbf{v}_1)_{0,1}.$$

Puisque, par définition, $\left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \mathbf{e}_1 \right)_T = -(\underline{\mathbf{e}}_2)_T$ et $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}_1$ sur Σ , nous obtenons

$$\omega^2(\epsilon_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1)_{0,1} - \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \mathbf{e}_1, \mathbf{rot} \mathbf{v}_1 \right)_{0,1} \\ + \langle \mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}_1, (\underline{\mathbf{e}}_2)_T \rangle_{\Sigma} = (\mathbf{j}_1, \mathbf{v}_1)_{0,1}. \quad (7.3)$$

- prenons le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\Omega_b)$ entre la deuxième équation de (7.1) et le rotationnel de $\underline{\mathbf{v}}_2$; multiplions l'égalité résultante par un facteur ϑ réel et strictement positif :

$$\vartheta \omega^2(\epsilon_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} + \vartheta (\mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} = \vartheta (\mathbf{j}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2). \quad (7.4)$$

- considérons l'identité

$$\left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \mathbf{e}_2, \mathbf{rot} \mathbf{v}_2 \right)_{0,2} = \\ \left(\mathbf{rot} \left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \mathbf{e}_2 \right), \mathbf{v}_2 \right)_{0,2} - \left\langle \mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}_2, \left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \mathbf{e}_2 \right)_T \right\rangle_{\Sigma};$$

d'après la définition de $\underline{\mathbf{e}}_2$ cette dernière identité peut être écrite sous la forme (on rappelle $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ sur Σ)

$$\left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \mathbf{e}_2, \mathbf{rot} \mathbf{v}_2 \right)_{0,2} - (\mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_2, \mathbf{v}_2)_{0,2} - \langle (\underline{\mathbf{e}}_2)_T, \mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}_1 \rangle_{\Sigma} = 0. \quad (7.5)$$

– considérons l'identité

$$(\mathbf{e}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} = (\mathbf{rot} \mathbf{e}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} + \langle \mathbf{e}_2 \times \mathbf{n}_2, (\underline{\mathbf{v}}_2)_T \rangle_\Sigma;$$

puisque $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{n}_2|_\Sigma = -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_1|_\Sigma$, nous avons

$$(|\mu_2| \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} - (\mathbf{e}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2) - \langle (\underline{\mathbf{v}}_2)_T, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma = 0. \quad (7.6)$$

Sommons enfin les contributions (7.3)-(7.6) pour obtenir la formulation variationnelle à trois champs pour le problème de Maxwell :

trouver $U = ((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \underline{\mathbf{e}}_2) \in \mathcal{X} \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2)$ t.q.

$$\forall V = ((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \underline{\mathbf{v}}_2) \in \mathcal{X} \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2), \mathcal{A}^\vartheta(U, V) = \mathcal{L}^\vartheta(V). \quad (7.7)$$

Les formes $\mathcal{A}^\vartheta(U, V)$ et $\mathcal{L}^\vartheta(V)$ sont définies respectivement par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\vartheta(U, V) := & \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \mathbf{e}_1, \mathbf{rot} \mathbf{v}_1 \right)_{0,1} - \omega^2 (\epsilon_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1)_{0,1} + \\ & \vartheta \omega^2 (\epsilon_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} + \vartheta (\mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} + \\ & \left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \mathbf{e}_2, \mathbf{rot} \mathbf{v}_2 \right)_{0,2} - (\mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} + \\ & (|\mu_2| \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} - (\mathbf{e}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} - \\ & 2 \langle (\underline{\mathbf{e}}_2)_T, \mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma - \langle \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_1, (\underline{\mathbf{v}}_2)_T \rangle_\Sigma \end{aligned} \quad (7.8)$$

et

$$\mathcal{L}^\vartheta(V) := -(\mathbf{j}_1, \mathbf{v}_1)_{0,1} + \vartheta (\mathbf{j}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2}. \quad (7.9)$$

Il est important de noter, comme dans le cas des formulations enrichies pour le problème modèle scalaire, que les deux termes d'interface $\langle (\underline{\mathbf{e}}_2)_T, \mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma$ et $\langle \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_1, (\underline{\mathbf{v}}_2)_T \rangle_\Sigma$ sont homogènes entre eux et ne dépendent pas de ϵ ou μ . Cela reste vrai indépendamment du choix de la constante multiplicative ϑ . Nous pourrions alors choisir des valeurs particulières de ϑ lors de l'étude du caractère bien posé du problème (7.7).

Remarque 7.2.1 Il n'est pas possible de généraliser au problème de Maxwell 3D l'approche des formulations enrichies à deux champs : les inconnues d'une formulation à deux champs pour le champ électrique seraient $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{X}_1$ et $\underline{\mathbf{e}}_2 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2)$. Les injections des espaces \mathcal{X}_i et $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_i)$, $i = 1, 2$, n'étant pas compactes dans $\mathbf{L}^2(\Omega_i)$, cette formulation ne ferait jamais partie de la catégorie des problèmes coercifs plus compacts. ★

7.3 Équivalence avec le problème de départ

Proposition 7.3.1 La formulation variationnelle à trois champs (7.7) est équivalente au problème (7.1).

Preuve : Pendant la phase de construction de la formulation variationnelle (7.7) nous avons vu que cette dernière découle du système (7.1). Il nous

reste alors à prouver que (7.7) implique (7.1) :

D'après la définition de l'espace \mathcal{X} , il est immédiat de constater que $\operatorname{div}(\epsilon_i \mathbf{e}_i) = 0$ dans Ω_i , $\epsilon_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_1|_\Sigma = \epsilon_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_1|_\Sigma$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_1|_\Sigma = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{n}_1|_\Sigma$ et $\mathbf{e}_i \times \mathbf{n}_i|_{\Gamma_i} = 0$ ($i = 1, 2$).

Choisissons ensuite dans (7.7) des fonctions test $\mathbf{v}_1 \in (D(\Omega_1))^3$, $(\mathbf{v}_2, \underline{\mathbf{v}}_2) = (0, 0)$ et dérivons aux sens des distributions :

$$\left\langle \omega^2 \epsilon_1 \mathbf{e}_1 - \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_1} \operatorname{rot} \mathbf{e}_1 \right) - \mathbf{j}_1, \mathbf{v}_1 \right\rangle = 0.$$

Nous retrouvons ainsi la première équation de (7.1).

De façon similaire à la preuve de la proposition 3.3.1, nous allons procéder "simultanément" pour retrouver la deuxième équation de (7.1) et établir que $|\mu_2| \mathbf{e}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{e}_2$.

Introduisons $\tau := \operatorname{rot} \mathbf{e}_2 - |\mu_2| \mathbf{e}_2$ et $\eta := \omega^2 \epsilon_2 \mathbf{e}_2 + \operatorname{rot} \mathbf{e}_2 - \mathbf{j}_2$. Ces deux champs sont de carré intégrable sur Ω_2 , de plus η est à divergence nulle. Nous allons donc montrer que ces deux champs sont nuls.

Commençons par choisir dans (7.7) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (0, 0)$ et $\underline{\mathbf{v}}_2 \in (\mathcal{D}(\Omega_2))^3$:

$$\begin{aligned} \vartheta \omega^2 (\epsilon_2 \mathbf{e}_2, \operatorname{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} + \vartheta (\operatorname{rot} \mathbf{e}_2, \operatorname{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} - \vartheta (\mathbf{j}_2, \operatorname{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} \\ + (|\mu_2| \mathbf{e}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} - (\mathbf{e}_2, \operatorname{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} = 0. \end{aligned}$$

En différenciant cette dernière équation au sens des distributions nous obtenons

$$\vartheta \operatorname{rot} (\omega^2 \epsilon_2 \mathbf{e}_2 + \operatorname{rot} \mathbf{e}_2 - \mathbf{j}_2) + |\mu_2| \mathbf{e}_2 - \operatorname{rot} \mathbf{e}_2 = 0 \text{ dans } (\mathcal{D}'(\Omega_2))^3,$$

ce qui implique

$$\vartheta \operatorname{rot} \eta = \tau \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega_2). \quad (7.10)$$

Prenons ensuite dans (7.7) $(\mathbf{v}_1, \underline{\mathbf{v}}_2) = (0, 0)$ et $\mathbf{v}_2 \in (\mathcal{D}(\Omega_2))^3$:

$$\left(\frac{1}{|\mu_2|} \operatorname{rot} \mathbf{e}_2, \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 \right)_{0,2} - (\operatorname{rot} \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_2)_{0,2} = 0.$$

En dérivant cette dernière égalité aux sens des distributions nous obtenons

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{|\mu_2|} \operatorname{rot} \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \right) = 0 \text{ dans } (\mathcal{D}'(\Omega_2))^3,$$

en d'autres termes

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{|\mu_2|} \tau \right) = 0. \quad (7.11)$$

Nous allons à présent montrer que la trace tangentielle de η s'annule sur le bord $\partial\Omega_2$. Pour cela choisissons dans (7.7) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (0, 0)$ et $\underline{\mathbf{v}}_2 \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega_2)$:

$$\begin{aligned} \vartheta \omega^2 (\epsilon_2 \mathbf{e}_2, \operatorname{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} + \vartheta (\operatorname{rot} \mathbf{e}_2, \operatorname{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} + (|\mu_2| \mathbf{e}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} \\ - (\mathbf{e}_2, \operatorname{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} - \langle \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_1, (\underline{\mathbf{v}}_2)_T \rangle_\Sigma - \vartheta (\mathbf{j}_2, \operatorname{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} = 0. \end{aligned}$$

Exprimons les termes de cette dernière équation en fonction de η , ce qui nous permet de la récrire sous la forme :

$$\vartheta(\eta, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} + (|\mu_2| \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} - (\underline{\mathbf{e}}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} - \langle \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_1, (\underline{\mathbf{v}}_2)_T \rangle_\Sigma = 0.$$

Les champs η et $\underline{\mathbf{e}}_2$ appartenant à $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2)$, nous pouvons intégrer par parties cette dernière égalité afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} & \vartheta(\mathbf{rot} \eta, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} - \vartheta \langle \eta \times \mathbf{n}_2, (\underline{\mathbf{v}}_2)_T \rangle_{\partial\Omega_2} + (|\mu_2| \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} \\ & - (\mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} - \langle \underline{\mathbf{e}}_2 \times \mathbf{n}_2, (\underline{\mathbf{v}}_2)_T \rangle_{\partial\Omega_2} - \langle \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_1, (\underline{\mathbf{v}}_2)_T \rangle_\Sigma = 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

L'idée est d'éliminer le plus grand nombre de termes de (7.12). Nous rappelons que

- nous avons déjà prouvé l'identité $0 = \vartheta \mathbf{rot} \eta - \tau = \vartheta \mathbf{rot} \eta + |\mu_2| \underline{\mathbf{e}}_2 - \mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_2$ dans Ω_2 ;
- puisque le champ $\underline{\mathbf{e}}_2$ appartient à $\mathbf{H}_{0,\Gamma_2}(\mathbf{rot}, \Omega_2)$, nous avons l'identité $\langle \underline{\mathbf{e}}_2 \times \mathbf{n}_2, (\underline{\mathbf{v}}_2)_T \rangle_{\partial\Omega_2} = \langle \underline{\mathbf{e}}_2 \times \mathbf{n}_2, (\underline{\mathbf{v}}_2)_T \rangle_\Sigma$;
- à l'interface nous avons $\underline{\mathbf{e}}_2 \times \mathbf{n}_2|_\Sigma = -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_1|_\Sigma$.

Par conséquent, pour tout $\underline{\mathbf{v}}_2 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_2)$, le terme $\langle \eta \times \mathbf{n}_2, (\underline{\mathbf{v}}_2)_T \rangle_{\partial\Omega_2}$ est nul. L'application $\underline{\mathbf{v}}_2 \mapsto (\underline{\mathbf{v}}_2)_T|_{\partial\Omega_2}$ étant surjective cela conduit à

$$\eta \times \mathbf{n}_2|_{\partial\Omega_2} = 0. \quad (7.13)$$

Intégrons à présent (7.11) par parties :

$$0 = \left(\mathbf{rot} \frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \eta, \eta \right)_{0,2} = \left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \eta, \mathbf{rot} \eta \right)_{0,2}.$$

Nous obtenons ainsi $\mathbf{rot} \eta = 0$ et $\tau = 0$. De plus, le champ η étant de carré intégrable, à divergence et rotationnel nuls dans Ω_2 et à trace tangentielle nulle sur $\partial\Omega_2$, est identiquement égal à zéro sur Ω_2 (cf. par exemple [14]).

Pour achever la preuve, il nous reste à retrouver la dernière équation de (7.1). Pour cela prenons dans (7.7) $\underline{\mathbf{v}}_2 = 0$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_1, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_1 \right)_{0,1} - \omega^2 (\epsilon_1 \underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{v}}_1)_{0,1} - 2 \langle (\underline{\mathbf{e}}_2)_T, \underline{\mathbf{v}}_1 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma + \\ & \left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2 \right)_{0,2} - (\mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} = -(\mathbf{j}_1, \underline{\mathbf{v}}_1)_{0,1}, \end{aligned}$$

puis intégrons par parties pour obtenir

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_1 \right) - \omega^2 \epsilon_1 \underline{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{j}_1, \underline{\mathbf{v}}_1 \right)_{0,1} + \left(\mathbf{rot} \left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_2 - \underline{\mathbf{e}}_2 \right), \underline{\mathbf{v}}_2 \right)_{0,2} - \\ & \left\langle \left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_2 + \frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \underline{\mathbf{e}}_1 \right)_T, \underline{\mathbf{v}}_1 \times \mathbf{n}_1 \right\rangle_\Sigma = 0. \end{aligned}$$

À partir de cette dernière équation, en utilisant les résultats précédents, il est immédiat de retrouver la dernière équation de (7.1). □

7.4 Caractère bien posé de la formulation

Comme nous avons fait lors du traitement des formulations enrichies pour le problème modèle scalaire (cf. § 3.2.4 et § 3.3.3), nous allons séparer la forme bilinéaire \mathcal{A}^ϑ en deux termes de sorte que le premier soit coercif sur $\{\mathcal{X} \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2)\}^2$ et l'autre soit assimilable à une perturbation compacte du premier. Écrivons alors $\mathcal{A}^\vartheta = \mathcal{A}_{coer}^\vartheta + \mathcal{A}_{comp}^\vartheta$, avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{coer}^\vartheta(U, V) &:= \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \mathbf{e}_1, \mathbf{rot} \mathbf{v}_1 \right)_{0,1} + \frac{1}{\mu_1^{max}} (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1)_{0,1} + \\ &\quad \left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \mathbf{e}_2, \mathbf{rot} \mathbf{v}_2 \right)_{0,2} + (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_2)_{0,2} + \\ &\quad \vartheta (\mathbf{rot} \mathbf{e}_2, \mathbf{rot} \mathbf{v}_2)_{0,2} + (|\mu_2| \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_2)_{0,2} - \\ &\quad 2 \langle (\mathbf{e}_2)_T, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma - \langle (\mathbf{v}_2)_T, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{comp}^\vartheta(U, V) &:= - \left(\left(\omega^2 \epsilon_1 + \frac{1}{\mu_1^{max}} \right) \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1 \right)_{0,1} - (\mathbf{e}_2 + \mathbf{rot} \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_2)_{0,2} - \\ &\quad ((1 - \vartheta \omega^2 \epsilon_2) \mathbf{e}_2, \mathbf{rot} \mathbf{v}_2)_{0,2}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Avant d'établir sous quelles conditions $\mathcal{A}_{coer}^\vartheta$ est coercive (théorème 7.4.1), nous fournissons quelques éléments pour l'estimation des intégrales portant sur l'interface Σ . Puisque μ_2 and μ_2^{-1} appartiennent à $L^\infty(\Omega_2)$, les deux normes

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{rot}; \Omega_2)} &:= [(|\mu_2| \cdot, \cdot)_{0,2} + (\mathbf{rot} \cdot, \mathbf{rot} \cdot)_{0,2}]^{1/2} \\ \|\cdot\|_{\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{rot}; \Omega_2)} &:= \left[(\cdot, \cdot)_{0,2} + \left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \cdot, \mathbf{rot} \cdot \right)_{0,2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

sont équivalentes à la norme naturelle de l'espace \mathcal{X}_2 . En effectuant une simple intégration par parties et en utilisant l'inéquation (3.32) nous aboutissons à l'estimation

$$|\langle (\mathbf{v}_2)_T, \mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma| \leq \|\mathbf{v}_2\|_{\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{rot}; \Omega_2)} \|\mathbf{v}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{rot}; \Omega_2)}. \quad (7.16)$$

Pour les termes d'interface faisant intervenir des champs définis sur Ω_1 et Ω_2 , nous introduisons une constante liée au relèvement des traces tangentielles sur Σ : soit $c \in \mathbb{R}_*^+$ la constante telle que l'inégalité suivante soit vérifiée de façon optimale :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{X}_1 \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2), \\ |\langle (\mathbf{v}_2)_T, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma| \leq c \|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_1)} \|\mathbf{v}_2\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2)}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Nous introduisons de plus les deux contrastes globaux pour la perméabilité magnétique :

$$R_1^\mu := \frac{\mu_2^-}{\mu_1^{max}}, \quad R_2^\mu := \frac{\mu_1^{min}}{\mu_2^+}.$$

Théorème 7.4.1 Si le rapport

$$R_1^\mu > (5/4)c^2, \quad (7.18)$$

(avec c définie par (7.17)), alors pour tout $\vartheta \geq \max(1, \mu_2^-)$ la forme $\mathcal{A}_{coer}^\vartheta$ est coercive sur $\{\mathcal{X} \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2)\}^2$.

Preuve : Commençons par évaluer $\mathcal{A}_{coer}^\vartheta(V, V)$, pour $V = ((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \underline{\mathbf{v}}_2)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{coer}^\vartheta(V, V) &= \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_1, \mathbf{rot} \mathbf{v}_1 \right)_{0,1} + \frac{1}{\mu_1^{max}} (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)_{0,1} + \\ &\quad \left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \mathbf{v}_2, \mathbf{rot} \mathbf{v}_2 \right)_{0,2} + (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)_{0,2} + \\ &\quad \vartheta (\mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} + (|\mu_2| \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} - \\ &\quad 3 \langle (\underline{\mathbf{v}}_2)_T, \mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma. \end{aligned}$$

En introduisant le paramètre réel $\eta \in [0, 3]$, $\mathcal{A}_{coer}^\vartheta(V, V)$ peut être bornée inférieurement par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{coer}^\vartheta(V, V) &\geq \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_1, \mathbf{rot} \mathbf{v}_1 \right)_{0,1} + \frac{1}{\mu_1^{max}} (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)_{0,1} + \\ &\quad \left(\frac{1}{|\mu_2|} \mathbf{rot} \mathbf{v}_2, \mathbf{rot} \mathbf{v}_2 \right)_{0,2} + (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)_{0,2} + \\ &\quad \vartheta (\mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2, \mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} + (|\mu_2| \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} - \\ &\quad (3 - \eta) \left| \langle (\underline{\mathbf{v}}_2)_T, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma \right| - \eta \left| \langle (\underline{\mathbf{v}}_2)_T, \mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma \right|. \end{aligned}$$

Le terme $\left| \langle (\underline{\mathbf{v}}_2)_T, \mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma \right|$ peut être borné par (7.16) alors que pour le terme $\left| \langle (\underline{\mathbf{v}}_2)_T, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{n}_1 \rangle_\Sigma \right|$ nous utiliserons (7.17). Comme nous avons fait au cours de la preuve du théorème 3.3.1, introduisons β_1 et β_2 deux paramètres réels strictement positifs tels que $\beta_1 + \beta_2 = 1$; nous déduisons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{coer}^\rho(V, V) &\geq \frac{1}{\mu_1^{max}} \|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_1)}^2 + \|\mathbf{v}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{rot}; \Omega_2)}^2 \\ &\quad + (\beta_1 + \beta_2) \left[(|\mu_2| \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)_{0,2} + \vartheta \|\mathbf{rot} \underline{\mathbf{v}}_2\|_{0,2}^2 \right] \\ &\quad - (3 - \eta) c \|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_1)} \|\underline{\mathbf{v}}_2\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2)} \\ &\quad - \eta \|\mathbf{v}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{rot}; \Omega_2)} \|\underline{\mathbf{v}}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{rot}; \Omega_2)}. \end{aligned}$$

Puisque $\vartheta \geq \max(1, \mu_2^-)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{coer}^\rho(V, V) &\geq \frac{1}{\mu_1^{max}} \|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_1)}^2 + \beta_1 \mu_2^- \|\underline{\mathbf{v}}_2\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2)}^2 \\ &\quad + \|\mathbf{v}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{rot}; \Omega_2)}^2 + \beta_2 \|\underline{\mathbf{v}}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{rot}; \Omega_2)}^2 \\ &\quad - (3 - \eta) c \|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_1)} \|\underline{\mathbf{v}}_2\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2)} \\ &\quad - \eta \|\mathbf{v}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{rot}; \Omega_2)} \|\underline{\mathbf{v}}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{rot}; \Omega_2)}. \end{aligned}$$

L'idée pour conclure est de contrôler les termes négatifs à l'aide (d'une fraction) des positifs.

– Premièrement, identifions dans (3.20) $x = \|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_1)}$, $y = \|\underline{\mathbf{v}}_2\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_2)}$ et posons

$$m := \frac{1}{\mu_1^{max} \mu_2^- \beta_1}, \quad p := \frac{c(3 - \eta)}{2\beta_1 \mu_2^-};$$

il existe alors une constante λ strictement positive telle que

$$\frac{1}{\mu_1^{max}} x^2 + \beta_1 \mu_2^- y^2 - (3 - \eta) c x y \geq \lambda (x^2 + y^2)$$

si et seulement si $m > p^2$, i.e.

$$\frac{\mu_2^-}{\mu_1^{max}} > \frac{c^2(3-\eta)^2}{4\beta_1}; \quad (7.19)$$

– Deuxièmement, identifions dans (3.20) $x = \|\underline{\mathbf{v}}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{rot};\Omega_2)}$, $y = \|\mathbf{v}_2\|_{\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{rot};\Omega_2)}$, puis posons $m = \beta_2$ et $p = \eta/2$;

Il existe alors une constante σ strictement positive telle que $\beta_2 x^2 + y^2 - \eta xy \geq \sigma(x^2 + y^2)$ si et seulement si $m > p^2$, i.e.

$$\beta_2 > (\eta/2)^2. \quad (7.20)$$

Le paramètre β_2 étant strictement inférieur à 1, nous allons dorénavant considérer $\eta \in [0, 2[$. De plus, d'après les deux points précédents, A_{coer}^ϑ est coercive si les deux conditions (7.19) et (7.20) sont satisfaites en même temps. Puisque $\beta_1 + \beta_2 = 1$, la condition (7.20) est équivalente à $\beta_1^{-1} > (1 - \eta^2/4)^{-1}$. La condition (7.19) est alors satisfaite pour un certain $\beta_1(\eta)$ si

$$\frac{\mu_2^-}{\mu_1^{max}} > c^2 \frac{(3-\eta)^2}{4-\eta^2}. \quad (7.21)$$

La fonction $f : \eta \mapsto (3-\eta^2)/(4-\eta^2)$ atteint sa valeur minimale pour $\eta = 4/3$ et $f(4/3) = 5/4$. En correspondance de cette valeur optimale la condition (7.21) se ramène à (7.18). ■

Remarque 7.4.1 La constante c apparaissant dans (7.17) dépend uniquement de la géométrie. Par conséquent la borne inférieure dans (7.18) est entièrement fixée par la configuration géométrique. ★

Corollaire 7.4.1 Si le contraste global R_μ^1 est suffisamment grand et si une des deux conditions suivantes est satisfaite

- le signe de ϵ est constant sur Ω ,
- la permittivité électrique change de signe sur Ω , au moins un des deux contrastes globaux R_a^ϵ ou R_b^ϵ est suffisamment grand et les hypothèses 6.2.1 et 6.2.2 sont vérifiées

alors la formulation variationnelle (7.7) rentre dans le catégorie des problèmes coercifs plus compacts.

Preuve : Dans le cas où ϵ est de signe constant sur Ω , d'après le théorème de compacité de Weber, l'injection de \mathcal{X} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, $\mathcal{A}_{comp}^\vartheta$ est une perturbation compacte de $\mathcal{A}_{coer}^\vartheta$, la coercivité de cette dernière étant assurée si la condition (7.18) est satisfaite.

Dans le cas où ϵ change de signe sur Ω , (7.18) doit être accompagnée d'une condition type (6.22) (pour R_a^ϵ) et des hypothèses 6.2.1 et 6.2.2 qui assurent la compacité de l'injection de \mathcal{X} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. ◇

Remarque 7.4.2 Pour obtenir un résultat similaire dans le cas d'un grand contraste global R_2^μ , il suffit de construire une formulation variationnelle à trois champs en choisissant $\underline{\mathbf{e}}_1 := \mu_1^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{e}_1$ comme inconnue auxiliaire (à la place de $\underline{\mathbf{e}}_2$).

★

7.5 Bilan sur le traitement du problème de Maxwell en 3D

Grâce aux résultats que nous avons obtenus au cours de ce chapitre et du précédent, nous pouvons résoudre le problème

$$\begin{cases} \omega^2 \epsilon \mathbf{e} - \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{e} \right) = \mathbf{j} & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} (\epsilon \mathbf{e}) = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{e} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

dans le cas où $\epsilon, \epsilon^{-1}, \mu, \mu^{-1}$ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$. Cette dernière condition n'est pas particulièrement restrictive (on rappelle qu'elle est aussi requise pour établir le caractère bien posé du problème de Maxwell lorsque les constantes électromagnétiques ne changent pas de signe). La plupart des configurations qui peuvent être rencontrées dans les applications réelles peut être étudiée par notre formalisme.

Nous remarquons en particulier que

- si uniquement ϵ change de signe, il y a deux solutions possibles pour conclure quant au caractère bien posé du problème de Maxwell. Les deux reposent sur la condition qu'au moins un des deux contrastes globaux R_a^ϵ ou R_b^ϵ soit suffisamment grand. D'une part, si les hypothèses 6.2.1 et 6.2.2 sont vérifiées, d'après le théorème de compacité 6.2.3, la formulation variationnelle naturelle (6.3) rentre dans la catégorie des problèmes coercifs plus compacts. De l'autre, en suivant une approche semblable à celle du § 7.2, nous pouvons construire une formulation variationnelle à trois champs (comme (7.7)) pour le champ magnétique ;
- si uniquement μ change de signe, il est possible de procéder comme au point suivant, en inversant les rôles du champ magnétique et du champ électrique.
- Si ϵ et μ changent de signe (nous rappelons que l'interface ζ sur laquelle ϵ change de signe et l'interface Σ sur laquelle μ change de signe peuvent ne pas coïncider) il faut utiliser une formulation à trois champs ((7.7), ou son correspondant pour le champ magnétique) en association au résultat de compacité. Dans ce cas, nous aurons une condition sur le contraste de ϵ mais aussi une condition sur le contraste de μ , accompagnées des hypothèses 6.2.1 et 6.2.2 : en effet, en plus de la validité ces deux dernières hypothèses, il est à la fois nécessaire que l'un des rapports R_a^ϵ ou R_b^ϵ soit suffisamment grand et que l'un des rapports R_1^μ ou R_2^μ soit suffisamment grand.

Sur le tableau suivant nous résumons, pour toutes les transitions possibles entre différents milieux, quelle (ou quelles) formulation(s) peut (peuvent) être choisie(s) pour résoudre le problème de Maxwell. Les abréviations *F.N.* et *3 CH* dénotent respectivement la formulation variationnelle naturelle et la formulation variationnelle à trois champs.

	ϵ de signe constant	ϵ change de signe
μ de signe constant	<i>F.N.</i>	<i>F.N</i> ou <i>3 CH</i>
μ change de signe	<i>F.N.</i> ou <i>3 CH</i>	<i>3 CH</i>

Conclusion et perspectives

Au cours de ce manuscrit nous nous sommes intéressés au problème de Maxwell caractérisé par des constantes électromagnétiques de signe variable.

Dans des configurations particulières (géométrie bidimensionnelle, problème statique) le problème de Maxwell peut être ramené à un problème scalaire faisant intervenir un opérateur de la forme $\operatorname{div}(\epsilon^{-1}\nabla\cdot)$ (cf. le problème 1.24). La problématique liée au changement de signe de ϵ est la perte d'ellipticité de ce dernier opérateur. Au cours des chapitres 2 et 3 nous avons construit des formulations variationnelles équivalentes à ce problème scalaire et pour chaque formulation considérée nous avons fourni une condition portant sur le contraste en ϵ , suffisante à en assurer le caractère bien posé au sens de Fredholm.

D'après les tests numériques effectués aux chapitres 4 et 5, la formulation variationnelle naturelle (qui est aussi la plus simple et la moins coûteuse en termes de calcul sur machine) est plus précise et robuste que les deux formulations enrichies à deux et trois champs.

Nous nous sommes enfin intéressés au problème de Maxwell 3D pour le champ électrique : nous avons démontré au chapitre 6 un nouveau résultat de compacité nous assurant que, lorsque ϵ change de signe sur Ω , l'injection de l'espace fonctionnel auquel appartient naturellement le champ électrique est compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

La difficulté liée au changement de signe de la perméabilité (i.e. la perte d'ellipticité de l'opérateur $\operatorname{rot}(\mu^{-1}\operatorname{rot}\cdot)$) a été résolue au chapitre 7 en généralisant l'approche suivie pour construire la formulation à trois champs du problème scalaire.

Pour conclure nous allons suggérer quelques idées qui, à notre avis, peuvent constituer des approfondissements et des extensions utiles aux travaux que nous venons de présenter :

Comme nous venons de le rappeler, lors des nos tests numériques on a pu constater que la formulation naturelle est plus efficace que les formulations enrichies dans l'approximation des solutions du problème scalaire. Il serait intéressant de vérifier s'il existe des configurations particulières pour lesquelles les formulations enrichies puissent se révéler supérieures.

On considère aussi de grand intérêt l'évaluation, pour des géométries complexes, de la constante de relèvement apparaissant dans (3.16) ainsi que des valeurs optimales des rapports R_a^ϵ et R_b^ϵ à partir desquelles l'injection de l'espace fonctionnel $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ est compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

En ce qui concerne l'étude des cavités résonantes, on aimerait pouvoir montrer théoriquement, dans le cas où ϵ et μ changent de signe, l'existence de valeurs propres complexes associées à l'opérateur $\frac{1}{\mu}\operatorname{div}\left(\frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot\right)$ et en fournir une caractérisation.

Le problème de Maxwell tridimensionnel laisse ouverts plusieurs axes de re-

cherche : on se propose d'adapter l'approche suivie au cours du deuxième chapitre afin d'inscrire la formulation variationnelle naturelle (formulation de second ordre pour le champ électrique ou magnétique) pour le problème de Maxwell dans un cadre mathématiquement bien posé². Cette étape accomplie, on pourra s'intéresser à la discrétisation d'une telle formulation.

On se propose d'autre part d'adapter la formulation enrichie introduite au chapitre 7 de sorte qu'elle puisse être mise en œuvre numériquement. À l'état actuel on envisage deux démarches différentes :

- la première consiste à introduire un multiplicateur de Lagrange pour imposer la contrainte $\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{e}) = 0$, et procéder à une discrétisation par éléments finis conformes dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$.
- la deuxième consiste à construire une version augmentée de (7.7) qui sera discrétisée par des éléments finis nodaux. Dans les cas de domaines singuliers non convexes, on sera alors confronté aux problèmes de densité que nous avons rappelés au § 3.4. Il faudra alors construire une formulation augmentée dans des espaces à poids, ou utiliser la méthode du complément singulier [28].

²On note que le résultat de compacité établi au cours du chapitre 6 est nécessaire pour la démarche qui est suggérée.

Appendice

A.A Obtention des équations de Maxwell bidimensionnelles

Considérons le problème de Maxwell posé dans un domaine cylindrique infini \mathcal{O} pour lequel la géométrie, les données (et par conséquent le champ électromagnétique) sont indépendants d'une des trois coordonnées d'espace (x, y, z) , que nous supposons être z . Dans ce cas il est usuel de parler d'invariance par rapport à l'axe Oz et de travailler dans une coupe perpendiculaire à ce dernier. Notons le cylindre retenu $\Omega \times \mathbb{R}$, Ω étant le domaine défini au § 1.7 pour $d = 2$.

Par hypothèse la composante n_z du vecteur normal à $\Omega \times \mathbb{R}$ est nulle ; nous appelons τ le vecteur tangent à $\partial\Omega$. En d'autres termes, si $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^t$ alors $\tau = (\tau_x, \tau_y)^t = (n_y, -n_x)^t$.

En ce qui concerne les opérateurs différentiels de \mathbb{R}^2 , nous rappelons que la divergence et le gradient sont définis classiquement, alors qu'il existe deux opérateurs rotationnels : l'un est scalaire et agit sur des fonctions à valeurs vectorielles, l'autre est vectoriel et agit sur des fonctions à valeurs scalaires :

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} := \partial_x v_y - \partial_y v_x, \quad \mathbf{rot}_2 f := (\partial_y f, -\partial_x f)^t.$$

Pour tout vecteur \mathbf{v} défini sur $\Omega \times \mathbb{R}$ nous notons :

$$\mathbf{v}_{x,y} = (v_x, v_y)^t \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_{x,y}, v_z).$$

Grâce à l'hypothèse d'invariance par rapport à la variable z , nous avons les identités :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \mathbf{rot}_2 v_z \\ \mathbf{rot} \mathbf{v}_{x,y} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}) = \operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}_{x,y}), \\ \mathbf{rot}(\sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{rot}_2(\sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_{x,y}) \\ \mathbf{rot}(\sigma^{-1} \mathbf{rot}_2 v_z) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

dans lesquelles σ est considéré indépendant de z et est à identifier, suivant le cas, avec ϵ ou μ .

En appliquant les identités (A.22) aux équations (1.9)-(1.10), nous obtenons respectivement les équations liant $\mathbf{e}_{x,y}$ à h_z et $\mathbf{h}_{x,y}$ à e_z :

$$-i\omega\epsilon\mathbf{e}_{x,y} - \mathbf{rot}_2 h_z = -\mathbf{J}_{x,y} \quad (\text{A.23})$$

$$-i\omega e_z - \operatorname{rot} \mathbf{h}_{x,y} = -J_z \quad (\text{A.24})$$

$$\operatorname{div}(\epsilon\mathbf{e}_{x,y}) = \rho; \quad (\text{A.25})$$

$$-i\omega\mu\mathbf{h}_{x,y} + \mathbf{rot}_2 e_z = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$-i\omega\mu h_z + \operatorname{rot} \mathbf{e}_{x,y} = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\operatorname{div}(\mu\mathbf{h}_{x,y}) = 0. \quad (\text{A.28})$$

Enfin, les conditions aux bords (1.18) en dimension deux prennent la forme :

$$\mathbf{e}_{x,y} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\text{A.29})$$

$$e_z|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{h}_{x,y} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (\text{A.31})$$

Pour obtenir les conditions aux limites satisfaites par le champ h_z combinons (A.29) avec (A.23) : nous obtenons $(\mathbf{rot}_2 h_z - \mathbf{J}_{x,y}) \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega} = 0$, soit

$$\partial_{\mathbf{n}} h_z|_{\partial\Omega} = \mathbf{J}_{x,y} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (\text{A.32})$$

Comme dans le cas des équations de Maxwell à trois dimensions, en partant de (A.23)-(A.27), il est possible d'obtenir des systèmes équivalents d'équations de second ordre respectivement satisfaites par $\mathbf{e}_{x,y}$, e_z , $\mathbf{h}_{x,y}$, h_z :

$$\mathbf{rot}_2 \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{e}_{x,y} \right) - \omega^2 \epsilon \mathbf{e}_{x,y} = i\omega \mathbf{J}_{x,y}, \quad (\text{A.33})$$

$$\text{div}(\epsilon \mathbf{e}_{x,y}) = \rho; \quad (\text{A.34})$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}_2 e_z \right) - \omega^2 \epsilon e_z = i\omega J_z; \quad (\text{A.35})$$

$$\mathbf{rot}_2 \left(\frac{1}{\epsilon} \mathbf{rot} \mathbf{h}_{x,y} \right) - \omega^2 \mu \mathbf{h}_{x,y} = \mathbf{rot}_2 \left(\frac{1}{\epsilon} \mathbf{J}_z \right), \quad (\text{A.36})$$

$$\text{div}(\mu \mathbf{h}_{x,y}) = 0; \quad (\text{A.37})$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\epsilon} \mathbf{rot}_2 H_z \right) - \omega^2 \mu H_z = \text{rot} \left(\frac{1}{\epsilon} \mathbf{J}_{x,y} \right). \quad (\text{A.38})$$

A.B Du problème de Maxwell au problème modèle

Considérons les équations de Maxwell tridimensionnelles statiques pour le champ électrique, posées dans un domaine Ω simplement connexe :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \\ \text{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \rho \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}. \quad (\text{A.39})$$

D'après le théorème 2.9 de [25], le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire ϕ qui est solution du problème suivant :

$$\text{trouver } \phi \in H_0^1(\Omega) \text{ t.q. } \text{div} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla \phi \right) = \rho.$$

Nous reconnaissons dans ce dernier problème (1.24), avec $\omega = 0$, $f = \rho$ et

des conditions au bord de Dirichlet homogènes.

Intéressons nous à présent au problème de Maxwell harmonique posé dans un domaine Ω bidimensionnel, ouvert borné et simplement connexe. Considérons alors les données $\rho \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{J}_{x,y} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $J_z \in L^2(\Omega)$. On rappelle que les champs e_z et $\mathbf{e}_{x,y}$ satisfont respectivement les systèmes (A.40) et (A.41) :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot}_2 e_z \right) - \omega^2 \epsilon e_z = i\omega J_z \\ e_z|_{\partial\Omega} = 0; \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}_2 \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{x,y} \right) - \omega^2 \epsilon \mathbf{e}_{x,y} = i\omega \mathbf{J}_{x,y} \\ \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{e}_{x,y}) = \rho \\ \mathbf{e}_{x,y} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} . \quad (\text{A.41})$$

Nous remarquons en particulier que

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot}_2 \cdot \right) = -\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla \cdot \right), \quad (\text{A.42})$$

par conséquent le champ e_z vérifie le problème

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla e_z \right) + \omega^2 \epsilon e_z = -i\omega J_z \\ e_z|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

À une permutation près des constantes électromagnétiques, on reconnaît dans (A.43) le problème modèle (1.24), avec $f = -i\omega J_z$ et des conditions au bord de Dirichlet homogènes.

Pour (A.41) la procédure n'est pas si directe. Dans un premier temps considérons un problème de type électrostatique de la forme :

trouver $\phi \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \phi) = \rho, \quad (\text{A.44})$$

puis posons $\mathbf{e}'_{x,y} = \mathbf{e}_{x,y} - \nabla \phi$ et $\mathbf{J}'_{x,y} = -i\omega \mathbf{J}_{x,y} - \omega^2 \epsilon \nabla \phi$. Le système (A.41) peut alors être reformulé comme suit :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}_2 \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{e}'_{x,y} \right) - \omega^2 \epsilon \mathbf{e}'_{x,y} = -\mathbf{J}'_{x,y} \\ \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{e}'_{x,y}) = 0 \\ \mathbf{e}'_{x,y} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} . \quad (\text{A.45})$$

Le domaine Ω étant simplement connexe et la divergence des champs $\epsilon \mathbf{e}'_{x,y}$, $\mathbf{J}'_{x,y}$ étant nulle, il existe deux potentiels scalaires u_0 et g tels que

$$\mathbf{e}'_{x,y} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot}_2 u_0, \quad \mathbf{J}'_{x,y} = \operatorname{rot}_2 g.$$

On remarque en particulier que $\partial_{\mathbf{n}} u_0|_{\partial\Omega} = 0$. En effet sur $\partial\Omega$

$$0 = \mathbf{e}'_{x,y} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot}_2 u_0 \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\epsilon} \nabla u_0 \cdot \mathbf{n}.$$

En injectant dans la première équation de (A.45) l'expression de $\mathbf{e}'_{x,y}$ en fonction du potentiel scalaire u_0 nous obtenons

$$\mathbf{rot}_2 \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\epsilon} \mathbf{rot}_2 u_0 \right) - \omega^2 u_0 + g \right] = 0.$$

L'opérateur \mathbf{rot}_2 étant un gradient "tourné" et le domaine Ω étant connexe, le contenu du crochet de cette dernière équation est égal à une constante c . Les potentiels u_0 et g étant définis à une constante près, nous pouvons choisir $c = 0$. Pour obtenir le potentiel scalaire du champ $\mathbf{e}'_{x,y}$ il suffit alors de résoudre le problème :

trouver $u_0 \in H^1(\Omega)$ t.q.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla u_0 \right) + \omega^2 \mu u_0 = g \\ \partial_{\mathbf{n}} u_0|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

Il est alors immédiat de reconnaître dans (A.46) le problème (1.24), avec $f = g$ et des conditions au bord de Neumann homogènes.

A.C Le dioptré milieu droitier - milieu gaucher

Dans cette section nous nous proposons de retrouver les lois de l'optique géométrique dans le cas d'un dioptré séparant un milieu classique d'un milieu gaucher. Nous allons adopter à la suite des notations semblables à celles introduites au § 1.7. Le diélectrique occupe le domaine $\Omega_1 := \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } y > 0\}$ alors que le milieu gaucher occupe le domaine $\Omega_2 := \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } y < 0\}$.

(Dans la configuration considérée les domaines Ω_1 , Ω_2 et l'interface Σ coïncident respectivement avec Ω_a , Ω_b et ζ .)

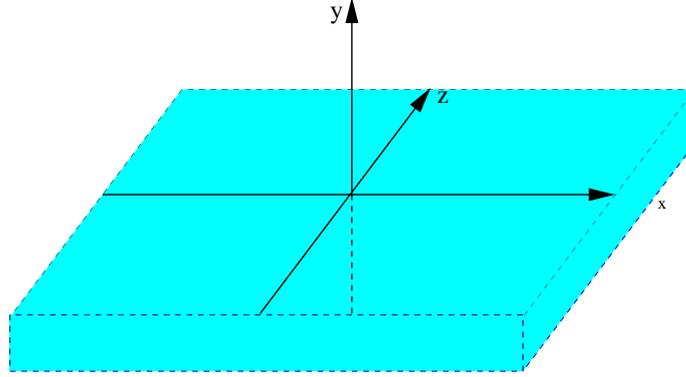
L'interface Σ séparant les deux milieux est le plan $y = 0$ et, sur Σ , la normale sortante de Ω_1 est $n = (0, -1, 0)^t$. Dans un souci de simplification nous considérons $\epsilon_1, \mu_1 \in \mathbb{R}_*^+$ et $\epsilon_2, \mu_2 \in \mathbb{R}_*^-$.

Contrairement à la méthode généralement suivie dans le cours de physique (basée sur le principe de Fermat de minimisation du chemin optique) l'approche qui est utilisée à la suite est entièrement basée sur les équations de Maxwell, que nous allons considérer en absence de charges et de courants ($\rho = 0, \mathbf{j} = 0$).

Puisque la géométrie que nous considérons est invariante par translation suivant l'axe z , nous allons considérer les équations de Maxwell bidimensionnelles, en nous intéressant en particulier au champ $\mathbf{e}_{x,y}$ (cf. (A.33) et (A.34)).

Dans la suite, nous notons

- \mathbf{e}_i ($i = 1, 2$) la restriction du champ $\mathbf{e}_{x,y}$ au domaine Ω_i
- $e_{i,j}$ ($j = x, y$) la j -ème composante du vecteur champ électrique sur le domaine Ω_i .



D'après la condition de transmission (1.17) nous avons les conditions de raccord

$$e_{1,x}|_{\Sigma} = e_{2,x}|_{\Sigma} \quad (\text{A.47})$$

$$\epsilon_1 e_{1,y} + |\epsilon_2| e_{2,y}|_{\Sigma} = 0. \quad (\text{A.48})$$

Nous rappelons que l'opérateur $\mathbf{rot}_2 \mathbf{rot} = \nabla \text{div} - \mathbf{\Delta}$. Puisque $\text{div} \mathbf{e}_i = 0$, les équations "volumiques" (A.33) et (A.34), avec termes sources nuls, deviennent

$$(\omega^2 \epsilon_i \mu_i + \mathbf{\Delta}) \mathbf{e}_i = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (\text{A.49})$$

À cause de l'invariance par rotation autour de l'axe Oy nous pouvons chercher, sans perte de généralité, les solutions de (A.49) sous la forme d'ondes qui se propagent sur l'axe Ox , en directions de x positifs : écrivons alors \mathbf{e}_i sous la forme $\mathbf{e}_i(x, y) = \hat{\mathbf{e}}_i(y) \exp(ik_x x)$, avec $\hat{\mathbf{e}}_i(y) \perp Oz$ et $k_x > 0$. Le laplacien vectoriel s'écrivant alors sous la forme

$$\mathbf{\Delta} \mathbf{e}_i = (\partial_{yy} - k_x^2) \hat{\mathbf{e}}_i \exp(ik_x x),$$

toute composante de $\hat{\mathbf{e}}_i$ doit satisfaire l'équation différentielle

$$\partial_{yy} \hat{e}_{i,j} + (\omega^2 \epsilon_i \mu_i - k_x^2) \hat{e}_{i,j} = 0. \quad (\text{A.50})$$

Pour une fréquence donnée, suivant les valeurs des constantes électromagnétiques, quatre cas de figure se présentent :

- i) Pour $i = 1, 2$, la quantité $(\omega^2 \mu_i \epsilon_i - k_x^2)$ est positive ;
- ii) La quantité $(\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 - k_x^2)$ est positive et $(\omega^2 \epsilon_2 \mu_2 - k_x^2)$ est négative ;
- iii) La quantité $(\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 - k_x^2)$ est négative et $(\omega^2 \epsilon_2 \mu_2 - k_x^2)$ est positive ;
- iv) Pour $i = 1, 2$, la quantité $(\omega^2 \mu_i \epsilon_i - k_x^2)$ est négative.

Nous allons consacrer un sous-paragraphe à chacun de ces cas.

A.C.1 Analyse du cas (i) :

Les quantités $(\omega^2 \mu_i \epsilon_i - k_x^2)$ étant positives pour tout i , nous déduisons de (A.50) que les solutions \mathbf{e}_i sont de la forme :

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} F_{i,x} \\ F_{i,y} \end{pmatrix} \exp(ik_x x + ik_{y,i} y) + \begin{pmatrix} F'_{i,x} \\ F'_{i,y} \end{pmatrix} \exp(ik_x x - ik_{y,i} y) \quad (\text{A.51})$$

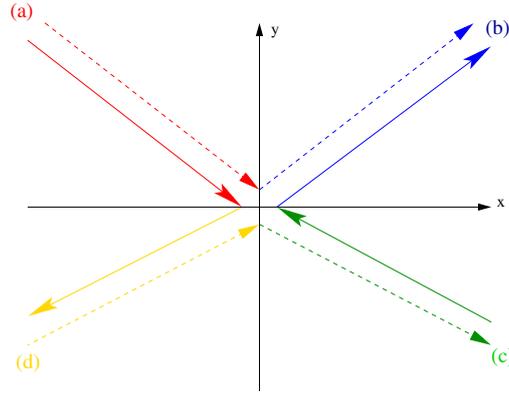


FIG. A.1 – En trait plein, sens de propagation de l'énergie dans un milieu classique ($y > 0$) et dans un milieu "gauchers"; en pointillé directions des vecteurs d'onde.

Onde	Phase
(a)	$\exp(ik_x x - ik_{y,1} y)$
(b)	$\exp(ik_x x + ik_{y,1} y)$
(c)	$\exp(ik_x x - ik_{y,2} y)$
(d)	$\exp(ik_x x + ik_{y,2} y)$

où les $F_{i,j}$, $F'_{i,j}$ sont des constantes réelles et $k_{y,i} := (\omega^2 \epsilon_i \mu_i - k_x^2)^{1/2}$.

Explicitons la condition de divergence nulle pour le champ \mathbf{e}_i :

$$\exp(ik_x x + ik_{y,i} y) (k_x F_{i,x} + k_y F_{i,y}) + \exp(ik_x x - ik_{y,i} y) (k_x F'_{i,x} - k_y F'_{i,y}) = 0, \quad \forall (x, y)^t \in \Omega_i. \quad (\text{A.52})$$

Par conséquent

$$k_x F_{1,x} + k_{y,1} F_{1,y} = 0, \quad (\text{A.53})$$

$$k_x F'_{1,x} - k_{y,1} F'_{1,y} = 0, \quad (\text{A.54})$$

$$k_x F_{2,x} + k_{y,2} F_{2,y} = 0, \quad (\text{A.55})$$

$$k_x F'_{2,x} - k_{y,2} F'_{2,y} = 0. \quad (\text{A.56})$$

Les conditions de transmission (A.47), (A.48) impliquent respectivement

$$F_{1,x} + F'_{1,x} - F_{2,x} - F'_{2,x} = 0 \text{ et} \quad (\text{A.57})$$

$$\epsilon_1 F_{1,y} + \epsilon_1 F'_{1,y} + |\epsilon_2| F_{2,y} + |\epsilon_2| F'_{2,y} = 0. \quad (\text{A.58})$$

Nous ne disposons que de six équations ((A.53)-(A.58)) pour la détermination des huit inconnues $F_{i,j}$, $F'_{i,j}$. Nous allons fixer deux degrés de liberté (à la suite $F'_{1,x}$ et $F'_{2,x}$) et déterminer les inconnues restantes en fonction de ces deux paramètres : D'après ((A.53)-(A.56)) nous avons

$$F_{1,y} = -\frac{k_x}{k_{y,1}} F_{1,x}, \quad F_{2,y} = -\frac{k_x}{k_{y,2}} F_{2,x}, \quad (\text{A.59})$$

$$F'_{1,y} = \frac{k_x}{k_{y,1}} F'_{1,x}, \quad F'_{2,y} = \frac{k_x}{k_{y,2}} F'_{2,x}. \quad (\text{A.60})$$

Injectons ces quatre dernières égalités dans (A.58) pour obtenir

$$-\frac{k_x}{k_{y,1}}\epsilon_1 F_{1,x} + \frac{k_x}{k_{y,1}}\epsilon_1 F'_{1,x} - \frac{k_x}{k_{y,2}}|\epsilon_2|F_{2,x} + \frac{k_x}{k_{y,2}}|\epsilon_2|F'_{2,x} = 0. \quad (\text{A.61})$$

Multiplions (A.57) respectivement par $\frac{k_x}{k_{y,1}}\epsilon_1$ et $-\frac{k_x}{k_{y,2}}|\epsilon_2|$. Additionnons ces derniers résultats à (A.61) pour obtenir respectivement

$$F_{2,x} = F'_{1,x} \frac{2 \frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|}}{1 + \frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|}} + F'_{2,x} \frac{1 - \frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|}}{1 + \frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|}}, \quad (\text{A.62})$$

$$F_{1,x} = F'_{1,x} \frac{\frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|} - 1}{1 + \frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|}} + F'_{2,x} \frac{2}{1 + \frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|}}. \quad (\text{A.63})$$

Les solutions de (A.49) en fonction de $F'_{1,x}$ et $F'_{2,x}$ s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 = (F'_{1,x} \gamma + F'_{2,x} \delta) & \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k_x}{k_{y,1}} \end{pmatrix} \exp(ik_x x + ik_{y,1} y) + \\ & F'_{1,x} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_x}{k_{y,1}} \end{pmatrix} \exp(ik_x x - ik_{y,1} y), \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 = (\alpha F'_{1,x} + \beta F'_{2,x}) & \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k_x}{k_{y,2}} \end{pmatrix} \exp(ik_x x + ik_{y,2} y) + \\ & F'_{2,x} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_x}{k_{y,2}} \end{pmatrix} \exp(ik_x x - ik_{y,2} y), \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} \alpha &:= \frac{2 \frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|}}{1 + \frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|}}, & \beta &:= \frac{1 - \frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|}}{1 + \frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|}}, \\ \gamma &:= \frac{\frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|} - 1}{1 + \frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|}}, & \delta &:= \frac{2}{1 + \frac{k_{y,2} \epsilon_1}{k_{y,1} |\epsilon_2|}}. \end{aligned}$$

Les grandeurs γ et α peuvent être interprétées comme les coefficients de réflexion et de transmission de Ω_1 à Ω_2 , alors que β et δ peuvent être interprétées comme les coefficients de réflexion et de transmission de Ω_2 à Ω_1 .

En accord avec la condition de Sommerfeld de rayonnement à l'infini, choisissons dans (A.64) et (A.65) $F'_{2,x} = 0$:

$$\mathbf{e}_1 = F'_{1,x} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_x}{k_{y,1}} \end{pmatrix} \exp(ik_x x - ik_{y,1} y) + \gamma F'_{1,x} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k_x}{k_{y,1}} \end{pmatrix} \exp(ik_x x + k_{y,1} y), \quad (\text{A.66})$$

$$\mathbf{e}_2 = \alpha F'_{1,x} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k_x}{k_{y,2}} \end{pmatrix} \exp(ik_x x + ik_{y,2} y). \quad (\text{A.67})$$

Dans le membre de droite de (A.66), le premier terme de la somme correspond à une onde plane incidente sur le dioptré et en provenance des x négatifs et des y positifs (cf. rayon (a) de la figure A.2). Le deuxième terme de la somme correspond à une onde plane réfléchie se propageant vers les x , y positifs et dont l'amplitude est atténuée (par rapport à l'onde incidente) d'un facteur γ (cf. rayon (b) de la figure A.2). Nous retrouvons bien que l'angle d'incidence est, à un signe près, le même que l'angle de réflexion. L'équation (A.67) représente une onde plane dont la vitesse de phase est dirigée des x , y négatifs vers les x , y positifs (cf. rayon (c) de la figure A.2). Puisque dans les méta-matériaux la vitesse de groupe est opposée à la vitesse de phase (cf. § 1.4), cette onde se propage dans Ω_2 en direction des x , y négatives. Nous pouvons alors identifier (A.67) à l'expression de l'onde réfractée. Dans les dioptrés classiques, les rayons réfractés et réfléchis se

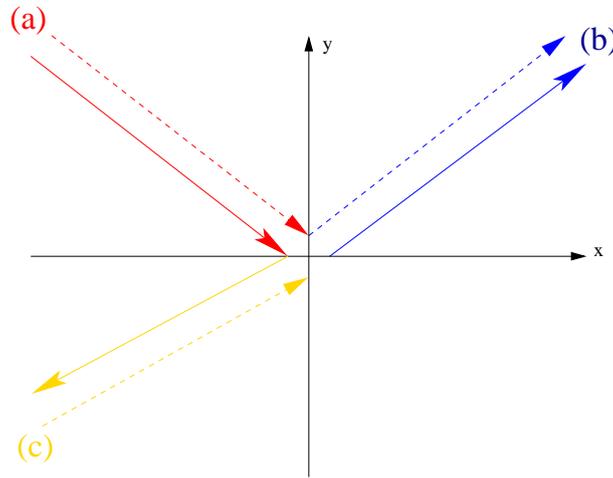


FIG. A.2 – Diffraction négative à l'interface matériau classique - matériau gaucher.

trouvent du même côté par rapport à la normale d'incidence. Dans notre cas l'onde réfractée est du même côté (par rapport à la normale d'incidence) que l'onde incidente : nous parlons alors de réfraction négative.

Nous nous proposons maintenant de retrouver la loi des angles sous sa forme "canonique" : notons θ_1 l'angle entre l'axe $x = 0$ et le rayon incident sur le dioptré et θ_2 l'angle que forme l'axe $x = 0$ avec le rayon réfracté. Par convention l'angle θ_1 est considéré positif alors que θ_2 est considéré négatif. D'après

les définitions que nous venons de donner, nous obtenons les relations

$$\sin(\theta_1) = \frac{k_x}{(k_x^2 + k_{y,1}^2)^{1/2}}, \quad (\text{A.68})$$

$$\sin(\theta_2) = -\frac{k_x}{(k_x^2 + k_{y,2}^2)^{1/2}}. \quad (\text{A.69})$$

Comme $(k_x + k_{y,i}^2)^{1/2} = \omega \sqrt{\epsilon_i \mu_i}$, (A.68) et (A.69) impliquent la troisième loi de Descartes :

$$\frac{k_x}{\omega} = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin(\theta_1) = -\sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin(\theta_2). \quad (\text{A.70})$$

A.C.2 Analyse du cas (ii) :

La quantité $\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 - k_x^2$ étant positive et $\omega^2 \epsilon_2 \mu_2 - k_x^2$ étant négative, les solutions sont de la forme :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \end{pmatrix} \exp(ik_x x + ik_{y,1} y) + \begin{pmatrix} F'_{1,x} \\ F'_{1,y} \end{pmatrix} \exp(ik_x x - ik_{y,1} y), \quad (\text{A.71})$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} F_{2,x} \\ F_{2,y} \end{pmatrix} \exp(ik_x x + \gamma_2 y) + \begin{pmatrix} F'_{2,x} \\ F'_{2,y} \end{pmatrix} \exp(ik_x x - \gamma_2 y), \quad (\text{A.72})$$

où nous avons posé $\gamma_2 := (k_x^2 - \omega^2 \mu_2 \epsilon_2)^{1/2}$.

Pour des raisons énergétiques (caractère borné de la solution \mathbf{e}_2 pour $y \rightarrow -\infty$) nous excluons à priori dans (A.72) le deuxième terme de la somme (en d'autres termes $F'_{2,x} = F'_{2,y} = 0$).

La condition de divergence nulle pour \mathbf{e}_1 nous permet de retrouver les équations (A.53) et (A.54) tandis que cette même condition exprimée pour \mathbf{e}_2 nous permet d'écrire :

$$(ik_x F_{2,x} + \gamma_2 F_{2,y}) \exp(ik_x x + \gamma_2 y) = 0, \quad \text{soit}$$

$$F_{2,y} = -i \frac{k_x}{\gamma_2} F_{2,x}. \quad (\text{A.73})$$

Les conditions de transmission (A.47) et (A.48) impliquent respectivement

$$F_{1,x} + F'_{1,x} = F_{2,x}, \quad (\text{A.74})$$

$$\epsilon_1 F_{1,y} + \epsilon_1 F'_{1,y} + |\epsilon_2| F_{2,y} = 0. \quad (\text{A.75})$$

Nous ne disposons que de cinq conditions ((A.53), (A.54), (A.73), (A.74) et (A.75)) pour déterminer les six inconnues de notre modèle. Nous allons fixer $F'_{1,x}$ et déterminer les inconnues restantes en fonction de ce dernier paramètre. Injectons les relations de (A.59) et (A.73) dans (A.75) pour obtenir

$$-\frac{k_x}{k_{y,1}} \epsilon_1 F_{1,x} + \frac{k_x}{k_{y,1}} \epsilon_1 F'_{1,x} - i \frac{k_x}{\gamma_2} |\epsilon_2| F_{2,x} = 0. \quad (\text{A.76})$$

Multiplions (A.74) respectivement par $\epsilon_1 \frac{k_x}{k_{y,1}}$ et $-i|\epsilon_2| \frac{k_x}{\gamma_2}$ et additionnons les résultats à (A.76) pour obtenir respectivement

$$F_{2,x} = \frac{2}{1 + i \frac{k_{y,1}|\epsilon_2|}{\gamma_2 \epsilon_1}} F'_{1,x} \quad (\text{A.77})$$

$$F_{1,x} = \frac{1 - i \frac{k_{y,1}|\epsilon_2|}{\gamma_2 \epsilon_1}}{1 + i \frac{k_{y,1}|\epsilon_2|}{\gamma_2 \epsilon_1}} F'_{1,x}. \quad (\text{A.78})$$

Posons $z = 1 - i \frac{k_{y,1}|\epsilon_2|}{\gamma_2 \epsilon_1} = \rho \exp(i\theta)$, avec $\rho = \left(1 + \left(\frac{k_{y,1}|\epsilon_2|}{\gamma_2 \epsilon_1}\right)^2\right)^{1/2}$ et $\tan \theta = -\frac{k_{y,1}|\epsilon_2|}{\gamma_2 \epsilon_1}$. Avec cette notation nous pouvons récrire $F_{2,x} = 2\rho^{-1} \exp(i\theta) F'_{1,x}$ et $F_{1,x} = \exp(2i\theta) F'_{1,x}$. Nous obtenons finalement les solutions

$$\mathbf{e}_1 = F'_{1,x} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_x}{k_{y,1}} \\ 1 \\ \frac{k_x}{k_{y,1}} \end{pmatrix} \exp(ik_x x - ik_{y,1} y) + F'_{1,x} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_x}{k_{y,1}} \\ 1 \\ \frac{k_x}{k_{y,1}} \end{pmatrix} \exp(ik_x x + ik_{y,1} y + 2i\theta) \quad (\text{A.79})$$

$$\mathbf{e}_2 = F'_{1,x} \begin{pmatrix} \frac{2}{\rho} \exp(ik_x x + i\theta + \gamma_2 y) \\ -\frac{2k_x}{\rho \gamma_2} \exp\left(ik_x x + i\theta - i\frac{\pi}{2} + \gamma_2 y\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.80})$$

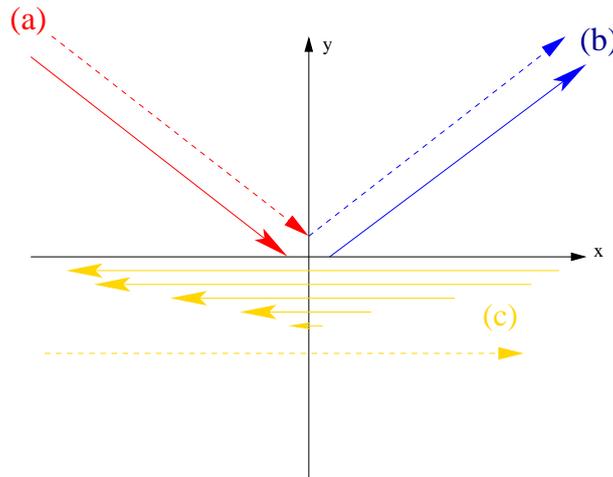


FIG. A.3 – Onde évanescente dans le matériau gauche. En trait plein, sens de propagation de l'énergie ; en pointillé, direction des vecteurs d'onde.

Dans (A.79), le premier terme de la somme représente une onde plane incidente sur le dioptre en provenant des x, y négatifs (cf. rayon (a) de la

figure A.3). Le deuxième terme correspond à une onde plane réfléchie à l'interface après un décalage de phase égal à 2θ (cf. rayon (b) de la figure A.3). L'équation (A.80) représente une onde évanescente vers les y négatifs : dans la couche de pénétration de l'onde dans le domaine Ω_2 , l'énergie se propage des x positives vers les x négatives (cf. rayon (c) de la figure A.3).

En optique géométrique ce cas (ii) correspond à une réflexion totale sur le dioptre, expliquée par la notion d'angle limite. Ce dernier est obtenu en posant dans (A.70) $\theta_2 = -\pi/2 : \sin(\theta_1^{lim}) = \sqrt{\frac{\epsilon_2\mu_2}{\epsilon_1\mu_1}}$; pour tout angle d'incidence supérieur à θ_1^{lim} il y aura réflexion totale.

Intéressons nous à l'explication de cette même notion avec l'approche ondulatoire que nous sommes en train de suivre : comme nous avons déjà vu, dans le domaine Ω_2 , $k_x^2 - \omega^2\epsilon_2\mu_2 < 0$, soit $k_x > \omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$. Nous rappelons (cf. A.C.1, équation (A.68)) que $\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\sin(\theta_1) = k_x/\omega$, par conséquent $\sin(\theta_1) > \sqrt{\frac{\epsilon_2\mu_2}{\epsilon_1\mu_1}} = \theta_1^{lim}$. Les équations (A.79), (A.80) sont alors les solutions de (A.49) dans le cas où $\theta_1 > \theta_1^{lim}$.

A.C.3 Analyse du cas (iii) :

La quantité $\omega^2\epsilon_1\mu_1 - k_x^2$ étant négative et $\omega^2\epsilon_2\mu_2 - k_x^2$ étant positive, les solutions sont de la forme

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \end{pmatrix} \exp(ik_x x + \gamma_1 y) + \begin{pmatrix} F'_{1,x} \\ F'_{1,y} \end{pmatrix} \exp(ik_x x - \gamma_1 y) \quad (\text{A.81})$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} F_{2,x} \\ F_{2,y} \end{pmatrix} \exp(ik_x x + ik_{y,2} y) + \begin{pmatrix} F'_{2,x} \\ F'_{2,y} \end{pmatrix} \exp(ik_x x - ik_{y,2} y), \quad (\text{A.82})$$

où nous avons posé $\gamma_1 := (k_x^2 - \omega^2\epsilon_1\mu_1)^{1/2}$. Le caractère borné de \mathbf{e}_1 pour $y \rightarrow \infty$ nous permet d'exclure à priori le premier terme de la somme du membre de droite de (A.81) : nous prendrons $F_{1,x} = F_{1,y} = 0$.

À partir de ce moment le traitement du cas (iii) est symétrique à celui du cas (ii). Nous renvoyons le lecteur à ce dernier pour le détail du *modus operandi* en nous contentant ici de fournir les résultats des calculs.

Posons $z = 1 - i\frac{\epsilon_1 k_{y,2}}{|\epsilon_2|\gamma_1} = \rho \exp(i\theta)$, avec $\rho := \left(1 + \left(\frac{\epsilon_1 k_{y,2}}{|\epsilon_2|\gamma_1}\right)^2\right)^{1/2}$ et

$\tan \theta = -\frac{\epsilon_1 k_{y,2}}{|\epsilon_2|\gamma_1}$. Les solutions s'écrivent :

$$\mathbf{e}_1 = F'_{2,x} \begin{pmatrix} \frac{2}{\rho} \exp(ik_x x - i\theta - \gamma_1 y) \\ \frac{2k_x}{\rho\gamma_1} \exp\left(ik_x x - i\theta + i\frac{\pi}{2} - \gamma_1 y\right) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.83})$$

$$\mathbf{e}_2 = F'_{2,x} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_x}{k_{y,2}} \end{pmatrix} \exp(ik_x x - ik_{y,2} y) + F'_{2,x} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k_x}{k_{y,2}} \end{pmatrix} \exp(ik_x x + ik_{y,2} y - i2\theta). \quad (\text{A.84})$$

Dans (A.84), le premier terme de la somme correspond à une onde plane

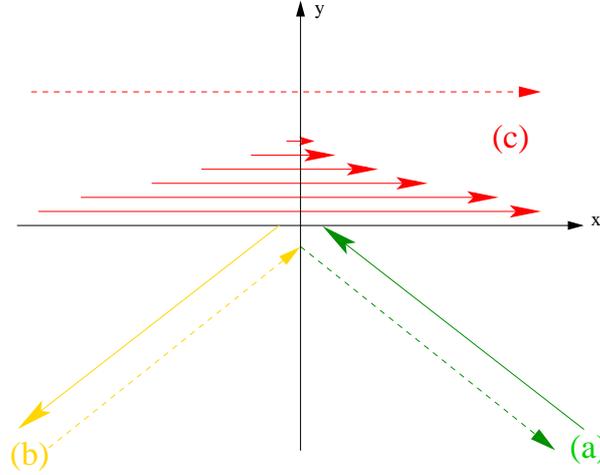


FIG. A.4 – Onde évanescence dans le diélectrique. En trait plein, sens de propagation de l'énergie ; en pointillé, direction des vecteurs d'onde.

incidente sur le dioptre, dont l'énergie se propage des x positifs, y négatifs vers les x négatifs, y positifs (cf. le rayon (a) de la figure A.4. Nous rappelons que dans le milieu gauche le vecteur de Poynting est dans la direction opposée de la vitesse de phase). Le second terme de la somme représente une onde réfléchi à l'interface, subissant un décalage de phase égal à 2θ (cf. le rayon (b) de la figure A.4). L'équation (A.83) représente une onde évanescence vers les y positifs. Dans la couche de pénétration de l'onde dans le domaine Ω_2 , l'énergie se propage vers les x positifs (cf. rayon (c) de la figure A.4).

En rappelant la symétrie entre le cas (ii) et le cas que nous sommes en train de traiter, nous renvoyons le lecteur au paragraphe A.C.2 pour les considérations et les rapprochement entre optique géométrique et notre approche ondulatoire.

Remarque A.C.1 Dans le cas d'une lame à faces parallèles gaucheère, de dimension finie, plongée dans un diélectrique, nous ne pourrions pas éliminer les termes $F_{1,x}$ et $F_{1,y}$ par les considérations énergétiques auxquelles nous avons eu recours au début du paragraphe. Un traitement analogue à celui que nous venons de réaliser nous permettrait alors de montrer que les modes évanescents du diélectrique peuvent être associés à des modes propagatifs au sein du milieu gauche. Ce phénomène est à la base de la théorie des lentilles parfaites (cf. § 1.5).

A.C.4 Analyse du cas (iv) :

Dans ce cas, pour $i = 1, 2$, les quantités $\omega^2 \epsilon_i \mu_1 - k_x^2$ sont toutes deux négatives. Les solutions sont alors de la forme

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} F_{i,x} \\ F_{i,y} \end{pmatrix} \exp(ik_x x + \gamma_i y) + \begin{pmatrix} F'_{i,x} \\ F'_{i,y} \end{pmatrix} \exp(ik_x x - \gamma_i y), \quad (\text{A.85})$$

où nous avons posé $\gamma_i = (k_x^2 - \omega^2 \epsilon_i \mu_i)^{1/2}$. Comme nous avons déjà fait plus haut, par des considérations énergétiques, nous interdisons dans chaque sous-domaine les solutions exponentiellement croissantes à l'infini : $F_{1,x} = F_{1,y} = F'_{2,x} = F'_{2,y} = 0$.

La condition de divergence nulle appliquée au champ \mathbf{e}_i implique

$$F'_{1,y} = i \frac{k_x}{\gamma_1} F'_{1,x}, \quad (\text{A.86})$$

$$F_{2,y} = -i \frac{k_x}{\gamma_2} F_{2,x}, \quad (\text{A.87})$$

alors que (A.47) et (A.48) impliquent

$$F'_{1,x} - F_{2,x} = 0, \quad (\text{A.88})$$

$$\epsilon_1 F'_{1,y} + |\epsilon_2| F_{2,y} = 0. \quad (\text{A.89})$$

Injectons (A.86) et (A.87) dans (A.89). En prenant en compte (A.88) nous obtenons

$$k_x F'_{1,x} \left(\frac{\epsilon_1}{\gamma_1} - \frac{|\epsilon_2|}{\gamma_2} \right) = 0. \quad (\text{A.90})$$

Dans le cas où au moins un des deux contrastes $\kappa_\epsilon := \epsilon_1/|\epsilon_2|$, $\kappa_\mu := \mu_1/|\mu_2|$ est différent de 1, alors $F'_{1,x} = 0$ et la solution de (A.49) est la solution triviale.

Dans le cas où $\kappa_\epsilon = \kappa_\mu = 1$, alors $\left(\frac{\epsilon_1}{\gamma_1} - \frac{|\epsilon_2|}{\gamma_2} \right) = 0$, $F'_{1,x}$ est une constante quelconque et les solutions de (A.49) s'écrivent

$$\mathbf{e}_1 = F'_{1,x} \begin{pmatrix} \exp(ik_x x - \gamma_1 y) \\ \frac{k_x}{\gamma_1} \exp\left(ik_x x + i\frac{\pi}{2} - \gamma_1 y\right) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.91})$$

$$\mathbf{e}_2 = F'_{1,x} \begin{pmatrix} \exp(ik_x x + \gamma_2 y) \\ \frac{k_x}{\gamma_2} \exp\left(ik_x x - i\frac{\pi}{2} + \gamma_2 y\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.92})$$

Les expressions (A.91) et (A.92) représentent des ondes planes évanescentes respectivement vers les y positifs et vers les y négatifs (cf. respectivement les rayons (a) et (b) de la figure A.5).

Dans la couche de pénétration de l'onde dans Ω_1 , \mathbf{e}_1 se propage dans la direction des x croissantes; dans la couche de pénétration de l'onde dans Ω_2 , \mathbf{e}_2 se propage dans la direction de x décroissants.

Remarque A.C.4 : Le cas (iv) n'a pas d'interprétation possible en optique géométrique. Sa mise en évidence est uniquement possible par une approche de type ondulatoire.

De plus, dans le cas où $\kappa_\epsilon = \kappa_\mu = 1$, cette description n'a aucune signification physique, ce qui illustre, en correspondance de ces valeurs critiques, le caractère mal posé des équations issue de la modélisation de l'interface.

★

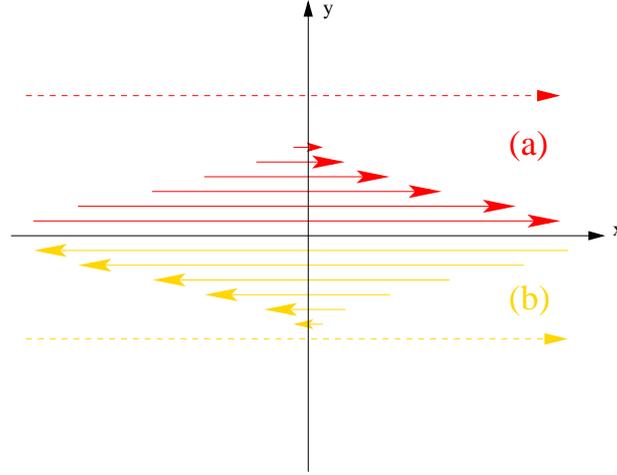


FIG. A.5 – Ondes évanescentes des deux cotés du dioptré dans le cas où $\kappa_\epsilon = \kappa_\mu = 1$. En trait plein, sens de propagation de l'énergie ; en pointillé, directions des vecteurs d'onde.

A.D Quelques éléments pour l'estimation de la norme de l'opérateur \mathcal{R}

Considérons \mathcal{O} un ouvert borné à bord $\partial\mathcal{O}$ lipschitzien. Soit $\gamma \subset \partial\mathcal{O}$ une partie connexe du bord (aussi à bord $\partial\gamma$ lipschitzien) et $\gamma' = \partial\mathcal{O} \setminus \gamma$. Dans la suite nous allons considérer $\alpha \in L^\infty(\mathcal{O})$ positive, telle que $\alpha^{-1} \in L^\infty(\mathcal{O})$.

Nous allons rappeler quelques résultats élémentaires concernant le relèvement d'une donnée scalaire définie uniquement sur une partie du bord : définissons $\mathcal{C}_\alpha^{int} := \alpha^{max}/\alpha^{min}$.

Nous rappelons que

$$H_{00}^{1/2}(\gamma) := \{p \in H^{1/2}(\gamma) \mid \tilde{p} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O})\},$$

où \tilde{p} est le prolongement par zéro de p à l'intégralité du bord $\partial\mathcal{O}$. Cet espace de Hilbert est naturellement muni de la norme $\|p\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} := \|\tilde{p}\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}$, avec

$$\|\tilde{p}\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})} := \inf_{\substack{v \in H^1(\mathcal{O}) \\ v|_{\partial\mathcal{O}} = p}} \|v\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

Proposition A.D.1 Soit $h \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$ et soit u la solution du problème : trouver $u \in H^1(\mathcal{O})$ t.q.

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\alpha \nabla u) = 0 & \text{in } \mathcal{O} \\ u|_\gamma = h \\ u|_{\gamma'} = 0 \end{cases}. \quad (\text{A.93})$$

La semi-norme de u satisfait alors l'inégalité $\|\nabla u\|_0 \leq \mathcal{C}_\alpha^{int} \|h\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)}$.

Preuve : Commençons par noter que, par construction, u est tel que $\|\alpha \nabla u\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}; \mathcal{O})} = \|\alpha \nabla u\|_0$.

Soit \mathbf{n} la normale sortante de \mathcal{O} . En intégrant par parties, nous obtenons

$$(\alpha \nabla u, \nabla u)_0 = \langle \alpha \nabla u \cdot \mathbf{n}, u \rangle = {}_{(H_{00}^{1/2}(\gamma))'} \langle \alpha \nabla u \cdot \mathbf{n}, h \rangle_{H_{00}^{1/2}(\gamma)}.$$

D'après [25] (page 28), l'application de trace normale $\gamma_n : \mathbf{H}(\text{div}; \mathcal{O}) \rightarrow (H^{1/2}(\partial\mathcal{O}))'$, $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\mathcal{O}}$ est telle que $\|\gamma_n\| = 1$. De plus, pour $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}; \mathcal{O})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\gamma}\|_{(H_{00}^{1/2}(\gamma))'} &= \sup_{p \in H_{00}^{1/2}(\gamma)} \frac{{}_{(H_{00}^{1/2}(\gamma))'} \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\gamma}, p \rangle_{H_{00}^{1/2}(\gamma)}}{\|p\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)}} \\ &= \sup_{p \in H_{00}^{1/2}(\gamma)} \frac{\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\mathcal{O}}, \tilde{p} \rangle}{\|\tilde{p}\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}} \leq \|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\mathcal{O}}\|_{(H^{1/2}(\partial\mathcal{O}))'}. \end{aligned}$$

En combinant les résultats précédents nous pouvons conclure. En effet

$$\alpha^{\min} \|\nabla u\|_0^2 \leq \|\alpha \nabla u\|_{\mathbf{H}(\text{div}; \mathcal{O})} \|h\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} \leq \alpha^{\max} \|\nabla u\|_0 \|h\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)}.$$

□

Remarque A.D.1 Pour $\alpha = 1$, le problème (A.93) se ramène au problème (2.8), ce dernier ayant servi à la définition de l'opérateur \mathcal{R} .

★

Remarque A.D.2 Le résultat de la proposition A.93 nous permet entre autre d'étudier la norme de l'opérateur *Dirichlet-to-Neumann* $\mathbb{S} : h \mapsto \alpha \partial_n u|_{\gamma}$, défini de $H_{00}^{1/2}(\gamma)$ dans $(H_{00}^{1/2}(\gamma))'$. Nous avons en effet

$$\|\mathbb{S}h\|_{(H_{00}^{1/2}(\gamma))'} \leq \alpha^{\max} \mathcal{C}_{\alpha}^{\text{int}} \|h\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)}, \quad \forall h \in H_{00}^{1/2}(\gamma).$$

★

Supposons à présent que le domaine \mathcal{O} puisse être partitionné en deux sous-domaines $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ à bord lipschitzien tels que $\overline{\mathcal{O}} = \overline{\mathcal{O}_1} \cup \overline{\mathcal{O}_2}$, $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Nous noterons l'interface $\xi = \partial\mathcal{O}_1 \cap \partial\mathcal{O}_2$ et $B_i = \partial\mathcal{O}_i \setminus \xi$.

Sur l'interface les éléments de $H_{00}^{1/2}(\xi)$ peuvent être mesurés grâce à la norme ${}_i \|p\|_{H_{00}^{1/2}(\xi)} := \|\tilde{p}\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O}_i)}$, avec un prolongement par zéro à $\partial\mathcal{O}_i$, $i = 1, 2$.

L'application trace $v_2 \mapsto v_2|_{\xi}$ étant continue de $H_{0, B_2}^1(\mathcal{O}_2)$ dans $H_{00}^{1/2}(\xi)$, nous pouvons mesurer $v_2|_{\xi}$ à l'aide de la norme $\| \cdot \|_{H_{00}^{1/2}(\xi)}$. Dans ce cas, la norme de l'application trace dépend en même temps des deux configurations géométriques de $\partial\mathcal{O}_1$ et $\partial\mathcal{O}_2$ au voisinage de l'interface. Par conséquent la constante de continuité de l'application trace sera notée $\mathcal{C}_{1 \leftarrow 2}$:

$$\|v_2\|_{H_{00}^{1/2}(\xi)} \leq \mathcal{C}_{1 \leftarrow 2} \|v_2\|_{H^1(\mathcal{O}_2)}, \quad \forall v_2 \in H_{0, B_2}^1(\mathcal{O}_2).$$

A.E Quelques éléments pour la caractérisation de la constante de relèvement apparaissant dans l'inégalité (3.16)

Notre but est d'estimer la constante c qui apparaît dans (3.16). Commençons alors par rappeler cette dernière inégalité

$$\begin{aligned} \forall (v_a, \mathbf{v}_b) \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a) \times \mathbf{X}_b, \\ |\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta| \leq c \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)} \|v_a\|_{1,a}. \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

Proposition A.E.1 La constante c optimale de l'inégalité (A.94) est la constante de continuité de l'application trace $\mathcal{C}_{b \leftarrow a}$.

Preuve : Commençons par remarquer

$$|\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta| \leq b \|v_a\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} \|\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b\|_{(H_{00}^{1/2}(\zeta))'};$$

d'autre part, d'après ce que nous avons vu au § A.D, nous avons

$$\forall \mathbf{v}_b \in \mathbf{H}(\text{div};\Omega_b), \quad \|\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b\|_{(H_{00}^{1/2}(\zeta))'} \leq \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)}, \quad (\text{A.95})$$

$$\forall v_a \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a), \quad b \|v_a\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} \leq \mathcal{C}_{b \leftarrow a} \|v_a\|_{1,a}. \quad (\text{A.96})$$

Nous obtenons par conséquent

$$|\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta| \leq \mathcal{C}_{b \leftarrow a} \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)} \|v_a\|_{1,a},$$

c'est à dire que $c \leq \mathcal{C}_{b \leftarrow a}$.

Montrons alors que $\mathcal{C}_{b \leftarrow a}$ est la constante optimale. Nous procédons par l'absurde : supposons qu'il existe une constante $c < \mathcal{C}_{b \leftarrow a}$ telle que (A.94) soit satisfaite. Considérons alors le champ v_b construit à partir d'une donnée $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\zeta)$ en résolvant le problème suivant :
trouver $v_b \in H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b)$ t.q.

$$\begin{cases} -\Delta v_b + v_b = 0 \text{ dans } \Omega_b \\ v_b|_\zeta = \varphi \end{cases}. \quad (\text{A.97})$$

Posons ensuite $\mathbf{v}_b = \nabla v_b$ et remarquons que, par construction, $\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}|_\zeta = \partial_{\mathbf{n}} v_b|_\zeta$ au sens $(H_{00}^{1/2}(\zeta))'$ et $\|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega)} = \|v_b\|_{1,b}$.

Nous avons de plus

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}, v_b \rangle_\zeta| &= |(\mathbf{v}_b, \nabla v_b)_{0,b} + (\text{div } \mathbf{v}_b, v_b)_{0,b}| \\ &= \|v_b\|_{1,b}^2 = \|v_b\|_{1,b} \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)}, \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

et $|\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}, v_b \rangle_\zeta| \leq \|\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{1/2}(\zeta))'} b \|v_b\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)}$. Nous obtenons par conséquent

$$\|\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{1/2}(\zeta))'} b \|v_b\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} \geq \|v_b\|_{1,b}^2 = \|v_b\|_{1,b} \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)}. \quad (\text{A.99})$$

Comme $\|\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{1/2}(\zeta))'} \leq \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)}$ (cf. la preuve de la proposition A.D.1) et $b \|v_b\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} = \|v_b\|_{1,b}$ (l'application trace $v_b \mapsto v_b|_\zeta$ est de norme

unitaire lorsqu'on mesure les éléments de $H_{00}^{1/2}(\zeta)$ par la norme $b\|\cdot\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)}$, l'inégalité (A.99) implique $\|\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{1/2}(\zeta))'} = \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)}$.

Notons par ailleurs que puisque $\mathcal{C}_{b \leftarrow a}$ est la constante optimale pour (A.96), pour tout $d < \mathcal{C}_{b \leftarrow a}$ il existe $v_a \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a)$ tel que $b\|v_a\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} > d\|v_a\|_{1,a}$. Prenons alors $d \in]c, \mathcal{C}_{b \leftarrow a}[$ et choisissons dans (A.97) la donnée $\varphi = v_a|_\zeta$ (ce qui implique $v_b|_\zeta = v_a|_\zeta$). Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta| &= |\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, v_b \rangle_\zeta| \\ &= b\|v_b\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)} \\ &= b\|v_a\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)} \\ &> d\|v_a\|_{1,a} \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)}. \end{aligned} \tag{A.100}$$

Comme $d > c$, (A.100) contredit (A.94). La constante $\mathcal{C}_{b \leftarrow a}$ est donc optimale pour l'inégalité (A.94). \square

A.E.1 Quelques cas particuliers

Considérons une géométrie rectangulaire telle que, pour $a, b \in \mathbb{R}_x^+$, on ait

$$\begin{aligned} \Omega_a &= [-a, 0] \times [0, h], \\ \Omega_b &= [0, b] \times [0, h]. \end{aligned} \tag{A.101}$$

Nous introduisons le paramètre γ égal au rapport b/a .

Proposition A.E.2 Dans le cas de cette géométrie particulière, si $\gamma \geq 1$, la constante c apparaissant dans (3.16) est égale à 1.

Preuve : Soit \tilde{v}_b le fonction telle que

$$\tilde{v}_b(x, y) := \begin{cases} v_a(-x, y), & \forall (x, y) \in [0, a] \times [0, h] \\ 0, & \forall (x, y) \in [a, b] \times [0, h] \end{cases}.$$

Nous remarquons que, par construction, $\tilde{v}_b|_\zeta = v_a|_\zeta$ et $\|\tilde{v}_b\|_{1,b} = \|v_a\|_{1,a}$. Par conséquent $\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, v_a \rangle_\zeta$ est égal à $\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, \tilde{v}_b \rangle_\zeta$. Une simple intégration par parties de ce dernier terme nous permet d'aboutir à :

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta| &= |\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, \tilde{v}_b \rangle_\zeta| \leq \\ &\|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)} \|\tilde{v}_b\|_{1,b} = \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)} \|v_a\|_{1,a}. \end{aligned}$$

Pour montrer l'optimalité de la valeur 1, nous allons exhiber un couple $(\mathbf{v}_b, \tilde{v}_b)$ qui vérifie l'égalité suivante :

$$|\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b, \tilde{v}_b \rangle_\zeta| = \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div};\Omega_b)} \|\tilde{v}_b\|_{1,b}.$$

Pour construire ces champs *ad hoc* nous considérons une trace $\psi \in (H_{00}^{1/2}(\zeta))'$ et résolvons le problème :
trouver $\tilde{v}_b \in H_{0,\Gamma_b}^1(\Omega_b)$ t.q.

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{v}_b + \tilde{v}_b = 0 \text{ dans } \Omega_b \\ \partial_{\mathbf{n}} \tilde{v}_b|_\zeta = \psi \end{cases}. \tag{A.102}$$

Posons ensuite $\mathbf{v}_b = \nabla \tilde{v}_b$. Nous remarquons en particulier que, par construction, $\|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div}; \Omega_b)} = \|\tilde{v}_b\|_{1,b}$. Nous obtenons alors l'égalité recherchée :

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}, \tilde{v}_b \rangle_\zeta| &= |(\mathbf{v}_b, \nabla \tilde{v}_b)_{0,b} + (\text{div } \mathbf{v}_b, \tilde{v}_b)_{0,b}| \\ &= \|\tilde{v}_b\|_{1,b}^2 = \|\tilde{v}_b\|_{1,b} \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div}; \Omega_b)}. \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

□

Corollaire A.E.1 Dans la configuration géométrique décrite par (A.101), si $\gamma \geq 1$, la constante $\mathcal{C}_{b \leftarrow a}$ vaut 1.

Remarque A.E.1 La proposition A.E.2 et le corollaire A.E.1 restent valables dans toutes les configurations géométriques pour lesquelles l'interface ζ est contenue dans un hyperplan et le symétrique de Ω_a par rapport à cet hyperplan est contenu dans Ω_b .

★

Si la valeur de γ est inférieure à 1, le traitement que nous venons d'effectuer n'est plus possible. Nous pouvons cependant avoir une estimation optimale de la constante c en procédant, en même temps, à une symétrie et à une homothétie selon x : posons

$$\tilde{v}_b(x, y) := v_a(-x/\gamma, y), \text{ pour } (x, y) \in [0, b] \times [0, h].$$

Proposition A.E.3 Dans le cas de la géométrie décrite par (A.101), si $\gamma < 1$, alors $\gamma^{-1/2}$ est la constante optimale pour les deux inégalités suivantes

$$\forall v \in H_{0, \Gamma_a}^1(\Omega_a), \quad \|\tilde{v}_b\|_{1,b} \leq \gamma^{-1/2} \|v_a\|_{1,a}, \quad (\text{A.104})$$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_b \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega_b), \quad \forall v_a \in H_{0, \Gamma_a}^1(\Omega_a), \\ |\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_a, v_a \rangle_\zeta| \leq \gamma^{-1/2} \|v_a\|_{1,a} \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div}; \Omega_b)}. \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

Preuve : Commençons par le traitement de (A.104) et considérons la norme de v_a écrite de la façon suivante :

$$\|v_a\|_{1,a}^2 = \int_{\Omega_a} (|\partial_x v_a|^2 + |\partial_y v_a|^2 + |v_a|^2) dx dy.$$

Un simple changement de variable ($(x', y) = (-x/\gamma, y)$) nous permet d'exprimer la norme de \tilde{v}_b sous la forme

$$\|\tilde{v}_b\|_{1,b}^2 = \int_{\Omega_a} \left(\frac{1}{\gamma} |\partial_x v_a|^2 + \gamma |\partial_y v_a|^2 + \gamma |v_a|^2 \right) dx dy.$$

Nous remarquons alors facilement que, par construction, pour tout $v_a \in H_{0, \Gamma_a}^1(\Omega_a)$, nous avons $\|\tilde{v}_b\|_{1,b} \leq \gamma^{-1/2} \|v_a\|_{1,a}$.

Pour prouver l'optimalité de la valeur $\gamma^{-1/2}$, choisissons, pour $m \in \mathbb{N}$ les deux champs particuliers

$$\begin{aligned} v_a^m(x, y) &= \cos\left((m+1/2)\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right), \\ \tilde{v}_b^m(x, y) &= v_a^m\left(-\frac{x}{\gamma}, y\right) = \cos\left((m+1/2)\frac{\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right); \end{aligned}$$

Les normes de ces deux champs étant

$$\begin{aligned} \|v_a^m\|_{1,a}^2 &= \left((m+1/2)\frac{\pi}{a} \right)^2 \int_{\Omega_a} \sin^2 \left((m+1/2)\frac{\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi y}{h} \right) dx dy + \\ &\quad \pi^2 \int_{\Omega_a} \cos^2 \left((m+1/2)\frac{\pi x}{a} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi y}{h} \right) dx dy + \\ &\quad \int_{\Omega_a} \cos^2 \left((m+1/2)\frac{\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi y}{h} \right) dx dy, \\ \|\tilde{v}_b^m\|_{1,b}^2 &= \frac{1}{\gamma} \left((m+1/2)\frac{\pi}{a} \right)^2 \int_{\Omega_a} \sin^2 \left((m+1/2)\frac{\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi y}{h} \right) dx dy + \\ &\quad \gamma \pi^2 \int_{\Omega_a} \cos^2 \left((m+1/2)\frac{\pi x}{a} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi y}{h} \right) dx dy + \\ &\quad \gamma \int_{\Omega_a} \cos^2 \left((m+1/2)\frac{\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi y}{h} \right) dx dy, \end{aligned}$$

il est immédiat de constater que

$$\sup_{v_a \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a)} \frac{\|v_a\|_{1,a}}{\|\tilde{v}_b\|_{1,b}} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|v_a^m\|_{1,a}}{\|\tilde{v}_b^m\|_{1,b}} = \gamma^{-1/2}.$$

Intéressons nous à présent à l'inégalité (A.105) :

Puisque $|\langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}, \tilde{v}_b \rangle_\zeta| \leq \|\tilde{v}_b\|_{1,b} \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div}; \Omega_b)}$, il en résulte

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_b \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega_b), \quad \forall v_a \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a), \\ \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}, v_a \rangle_\zeta \leq \gamma^{-1/2} \|v_a\|_{1,a} \|\mathbf{v}_b\|_{\mathbf{H}(\text{div}; \Omega_b)}. \end{aligned}$$

D'après la proposition A.E.1, pour prouver que $\gamma^{-1/2}$ est la valeur optimale, il suffit de montrer que, pour la géométrie particulière considérée, $\gamma^{-1/2} = \mathcal{C}_{b \leftarrow a}$:

rappelons que, par construction, les fonctions \tilde{v}_b sont telles que

$$\forall v_a \in H_{0,\Gamma_a}^1(\Omega_a), \quad b \|v_a\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} = b \|\tilde{v}_b\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} = \|\tilde{v}_b\|_{1,b}.$$

En partant de cette dernière équation et en appliquant l'inégalité (A.104) nous aboutissons à

$$b \|v_a\|_{H_{00}^{1/2}(\zeta)} \leq \gamma^{-1/2} \|v_a\|_{1,a}. \quad (\text{A.106})$$

Les constantes $\gamma^{-1/2}$ et $\mathcal{C}_{b \leftarrow a}$ étant optimales respectivement pour l'inégalité (A.104) et pour l'inégalité (A.96), il résulte de (A.106) que $\mathcal{C}_{b \leftarrow a} = \gamma^{-1/2}$. \square

Remarque A.E.2 Considérons une configuration géométrique pour laquelle

- Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N ,
- l'interface ζ est contenue dans l'hyperplan $x_1 = 0$,
- il existe un paramètre $\gamma < 1$ tel que $\forall (x_1, \dots, x_N) \in \Omega_a$, $(-\gamma x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega_b$.

Pour cette configuration géométrique la proposition A.E.3 reste valable.

★

A.F Un problème vectoriel avec des conditions au bord mixtes

Nous considérons ici α et l'ouvert \mathcal{O} tels qu'ils sont définis au § A.D. De plus, nous supposons \mathcal{O} simplement connexe à bord polyédrique.

Pour des données

- $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O})$, avec $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ dans \mathcal{O} et $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_{\gamma'} = 0$,
- $g \in L^2(\mathcal{O})$,
- $\lambda \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \mathcal{O})$,

nous nous intéressons au caractère bien posé du problème vectoriel (A.107) avec des conditions au bord mixtes :

trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \mathcal{O})$ t.q.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}(\alpha \mathbf{rot} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ in } \mathcal{O} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = g \text{ dans } \mathcal{O} \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\gamma} = \lambda \times \mathbf{n}|_{\gamma} \\ \alpha \mathbf{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\gamma'} = 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\gamma'} = 0 \end{array} \right. . \quad (\text{A.107})$$

Proposition A.F.1 Le problème (A.107) admet une unique solution dépendante de façon continue des données (\mathbf{f}, g, λ) .

N.B. La proposition reste valable dans le cas $\gamma = \emptyset$. Dans la preuve qui suit il suffira tout simplement d'omettre l'étape de relèvement et de considérer, comme espace des multiplicateurs de Lagrange, l'espace des fonctions identiquement nulles.

Preuve : Une éventuelle solution de (A.107) appartiendrait forcément à l'espace fonctionnel

$$\mathbf{Z} := \{\mathbf{z} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}) \text{ t.q. } \operatorname{div} \mathbf{z} \in L^2(\mathcal{O}), \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}|_{\gamma'} = 0\}.$$

Commençons par vérifier qu'il est possible de construire, dans l'espace \mathbf{Z} , un relèvement de la trace tangentielle de λ sur γ . Cette procédure n'est pas directe : λ appartient à $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \mathcal{O})$, par conséquent $(\operatorname{div} \lambda)$ appartient seulement à $H^{-1}(\mathcal{O})$. Nous ne pouvons donc pas résoudre directement un problème avec des conditions au bord de Neumann pour construire un champ à trace normale nulle sur γ .

Considérons plutôt $\phi \in H_0^1(\mathcal{O})$ t.q. $\Delta \phi = \operatorname{div} \lambda$ dans \mathcal{O} .

Le champ $\lambda' := \lambda - \nabla \phi$ est un élément de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \mathcal{O})$, $\operatorname{div} \lambda' = 0$ dans \mathcal{O} et $\lambda' \times \mathbf{n}|_{\gamma} = \lambda \times \mathbf{n}|_{\gamma}$.

Soit alors $\phi' \in H_{0,\gamma}^1(\mathcal{O})$ t.q.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi' = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \\ \partial_n \phi'|_{\gamma'} = \lambda' \cdot \mathbf{n}|_{\gamma'} \end{array} \right. . \quad (\text{A.108})$$

Le problème (A.108) étant bien posé, nous pouvons poser $\mathbf{z} := \lambda' - \nabla \phi'$. Ce dernier appartient à \mathbf{Z} , $\operatorname{div} \mathbf{z} = 0$ dans \mathcal{O} et sa trace tangentielle sur γ

est égale (comme il était demandé) à $\lambda \times \mathbf{n}|_\gamma$.

Si \mathbf{u} est solution de (A.107), alors le champ $\mathbf{v} := \mathbf{u} - \mathbf{z}$ est solution de :
trouver $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\gamma}(\mathbf{rot}; \mathcal{O})$ t.q.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}(\alpha \mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{f} - \mathbf{rot}(\alpha \mathbf{rot} \mathbf{z}) \text{ dans } \mathcal{O} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = g \text{ dans } \mathcal{O} \\ \alpha \mathbf{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\gamma'} = -\alpha \mathbf{rot} \mathbf{z} \times \mathbf{n}|_{\gamma'} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\gamma'} = 0 \end{array} \right. . \quad (\text{A.109})$$

Nous pouvons écrire, de façon classique et sans difficultés particulières, une formulation variationnelle mixte équivalente à (A.109) :
trouver $(\mathbf{v}, p) \in \mathbf{H}_{0,\gamma}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}) \times H_{0,\gamma}^1(\mathcal{O})$ t.q.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha \mathbf{rot} \mathbf{v}, \mathbf{rot} \mathbf{w})_0 + (\nabla p, \mathbf{w})_0 \\ \quad = (\mathbf{f}, \mathbf{w})_0 - (\alpha \mathbf{rot} \mathbf{z}, \mathbf{rot} \mathbf{w})_0, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_{0,\gamma}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}) \\ (\mathbf{v}, \nabla q)_0 = -(g, q)_0, \quad \forall q \in H_{0,\gamma}^1(\mathcal{O}) \end{array} \right. . \quad (\text{A.110})$$

Notons que le multiplicateur de Lagrange p est égal à zéro. En effet, en choisissant dans la première équation de (A.110) $\mathbf{w} = \nabla p$ et en intégrant par parties, nous obtenons $\|\nabla p\|_0^2 = 0$. D'autre part, en intégrant par parties la deuxième équation de (A.110) nous obtenons

$$(\operatorname{div} \mathbf{v}, q)_0 - \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, q \rangle_{\gamma'} = (g, q)_0, \quad \forall q \in H_{0,\gamma}^1(\mathcal{O}).$$

En choisissant successivement dans cette dernière équation $v \in H_0^1(\mathcal{O})$, puis $v \in H_{0,\gamma}^1(\mathcal{O})$, nous retrouvons $\operatorname{div} \mathbf{v} = g$ dans \mathcal{O} et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\gamma'} = 0$. La formulation variationnelle (A.110) est donc équivalente au problème (A.109).

Il nous reste alors à montrer que (A.110) est bien posé dans $\mathbf{H}_{0,\gamma}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}) \times H_{0,\gamma}^1(\mathcal{O})$:

Le noyau $\mathbb{K} := \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{0,\gamma}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}) \text{ t.q. } (\mathbf{w}, \nabla q)_0 = 0, \quad \forall q \in H_{0,\gamma}^1(\mathcal{O})\}$ coïncide avec l'espace

$$\mathbb{H}_\gamma = \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{0,\gamma}(\mathbf{rot}; \mathcal{O}) \text{ t.q. } \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\gamma'} = 0\}.$$

D'après la remarque 5.2 de [24], le bord γ étant connexe et \mathcal{O} étant simplement connexe, la forme bilinéaire $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto (\alpha \mathbf{rot} \mathbf{v}, \mathbf{rot} \mathbf{w})_0$ est coercive sur \mathbb{H}_γ .

La condition *inf-sup* peut être aisément vérifiée en prenant, pour $q \in H_{0,\gamma}^1(\mathcal{O})$, $\mathbf{w}(q) := \nabla q \in \mathbf{H}_{0,\gamma}(\mathbf{rot}; \mathcal{O})$.

La formulation mixte (A.110) admet alors une unique solution (avec $p = 0$). Par conséquent $\mathbf{u} := \mathbf{v} + \mathbf{z}$ est solution de (A.107). De plus cette solution est unique : la différence entre deux solutions appartient à \mathbf{Z} et est solution de (A.110) avec un deuxième membre nul.

Pour conclure, nous remarquons que, puisque \mathbf{z} et \mathbf{v} dépendent continuellement des données, \mathbf{u} dépend de façon continue de (\mathbf{f}, g, λ) . \square

A.G Quelques résultats sur des problèmes vectoriels

Considérons le domaine Ω ouvert borné de \mathbb{R}^3 tel qu'il a été introduit au § 1.7 et pour lequel les hypothèses 6.2.1 et 6.2.2 (introduites au § 6.2, page 141) sont vérifiées.

Soit la fonction $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ strictement positive sur Ω_a , strictement négative sur Ω_b et telle que $\alpha^{-1} \in L^\infty(\Omega)$. Nous noterons $sg(\alpha_i)$ le signe de α sur le sous-domaine Ω_i , $i = a, b$.

Commençons par nous intéresser à la solution du problème : étant donnée $\tilde{\phi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ t.q. $\tilde{\phi} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_i) \cap \mathbf{H}(\text{div}; \Omega_i)$ ($i = a, b$) tel que

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\alpha_i \mathbf{rot} \mathbf{u}) - sg(\alpha_i) \nabla(\text{div} \mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \Omega_i \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = 0 \\ \alpha_i \mathbf{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = 0 \\ \mathbf{u}|_{\zeta} = \varphi \end{cases}, \quad (\text{A.111})$$

avec $\phi = \tilde{\phi}|_{\zeta}$.

Proposition A.G.1 Le problème (A.111) est bien posé et la norme $\mathbf{W}_T(\Omega_i)$ de la solution est contrôlée par la norme $\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)$ de la donnée φ .

Preuve : Supposons que \mathbf{u} existe et commençons par construire un relèvement dans $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$ de la trace de \mathbf{u} sur ζ . Il existe en effet un champ $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_i)$ tel que $\tilde{\mathbf{u}}|_{\partial\Omega_i} = \chi \mathbf{u}|_{\partial\Omega_i}$. Pour $\tilde{\mathbf{u}}$ nous avons $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)} \leq c \|\chi \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega_i)}$, pour une certaine constante $c > 0$.

Posons alors $\mathbf{v} := \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$. Ce dernier champ est solution de : trouver $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_i) \cap \mathbf{H}(\text{div}; \Omega_i)$ tel que

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\alpha_i \mathbf{rot} \mathbf{v}) - sg(\alpha_i) \nabla(\text{div} \mathbf{v}) = -\mathbf{rot}(\alpha_i \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}}) + sg(\alpha_i) \nabla(\text{div} \tilde{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_i} = 0 \\ \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\zeta} = 0 \\ \alpha_i \mathbf{rot} \mathbf{v}_i \times \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = -\alpha_i \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}}_i \times \mathbf{n}|_{\Gamma_i} \end{cases}. \quad (\text{A.112})$$

Une formulation variationnelle de ce problème est : trouver $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_T(\Omega_i)$ tel que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_T(\Omega_i) \\ (\alpha_i \mathbf{rot} \mathbf{v}, \mathbf{rot} \mathbf{w})_{0,i} + sg(\alpha_i) (\text{div} \mathbf{v}, \text{div} \mathbf{w})_{0,i} = \\ -(\alpha_i \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{rot} \mathbf{w})_{0,i} - sg(\alpha_i) (\text{div} \tilde{\mathbf{u}}, \text{div} \mathbf{w})_{0,i}. \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

L'injection de $\mathbf{W}_T(\Omega_i)$ étant compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega_i)$, le terme $|(\alpha_i \mathbf{rot} \cdot, \mathbf{rot} \cdot)_{0,i} + sg(\alpha_i) (\text{div} \cdot, \text{div} \cdot)_{0,i}|$ est un produit scalaire sur $\mathbf{W}_T(\Omega_i)$. Par conséquent, en vertu du lemme de Lax-Milgram, le problème (A.112) est bien posé.

En considérant (A.113) pour $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, nous aboutissons à l'inégalité

$$\inf_{x \in \Omega_i} |\alpha_i| \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0,i}^2 + \|\text{div} \mathbf{v}\|_{0,i}^2 \leq \sup_{x \in \Omega_i} |\alpha_i| \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0,i} \|\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}}\|_{0,i} + \|\text{div} \mathbf{v}\|_{0,i} \|\text{div} \tilde{\mathbf{u}}\|_{0,i}$$

La semi-norme $\left(\inf_{x \in \Omega_i} |\alpha_i| \|\mathbf{rot} \cdot\|_{0,i}^2 + \|\operatorname{div} \cdot\|_{0,i}^2 \right)^{1/2}$ étant équivalente sur $\mathbf{W}_T(\Omega_i)$ à la norme usuelle $(\|\cdot\|_{0,i}^2 + \|\mathbf{rot} \cdot\|_{0,i}^2 + \|\operatorname{div} \cdot\|_{0,i}^2)^{1/2}$, nous déduisons de cette dernière inégalité qu'il existe une constante c telle que

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega_i) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega_i)} \leq c \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)},$$

et par conséquent $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega_i) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega_i)} \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_i)^3} \leq C' \|\varphi\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)}$. \square

Considérons à présent $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega_i)$, avec $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ dans Ω_i et $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = 0$. Intéressons nous alors au problème : trouver $\mathbf{p} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega_i)$ tel que

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\alpha_i \mathbf{rot} \mathbf{p}) - sg(\alpha) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_i \\ \alpha_i \mathbf{rot} \mathbf{p}_i^k \times \mathbf{n}_i|_{\partial\Omega_i} = 0 \\ \mathbf{p}_i^k \cdot \mathbf{n}_i|_{\partial\Omega_i} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.114})$$

Proposition A.G.2 Le problème (A.114) est bien posé et la norme $\mathbf{W}_T(\Omega_i)$ de la solution est contrôlée par la norme $\mathbf{L}^2(\Omega_i)$ de la donnée \mathbf{f} .

Preuve : Une formulation variationnelle de (A.114) est : trouver $\mathbf{p} \in \mathbf{W}_T(\Omega_i)$ t.q.

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_T(\Omega_i), \\ (\alpha_i \mathbf{rot} \mathbf{p}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_{0,i} + sg(\alpha_i) (\operatorname{div} \mathbf{p}, \operatorname{div} \mathbf{v})_{0,i} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0,i}. \end{aligned} \quad (\text{A.115})$$

Par application du lemme de Lax-Milgram, (A.115) est bien posé. Considérons de plus (A.115) pour $\mathbf{v} = \mathbf{p}$. Nous obtenons immédiatement l'estimation

$$\inf_{x \in \Omega_i} |\alpha_i| \|\mathbf{rot} \mathbf{p}\|_{0,i}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{p}\|_{0,i}^2 \leq \|\mathbf{f}\|_{0,i} \|\mathbf{p}\|_{0,i}.$$

Il existe donc une constante c strictement positive telle que $\|\mathbf{p}\|_{\mathbf{W}_T(\Omega_i)} \leq \|\mathbf{f}\|_{0,i}$. \square

Proposition A.G.3 La divergence de la solution \mathbf{p} du problème (A.114) est à laplacien nul et $\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_i} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_i}$. De plus $\operatorname{div} \mathbf{p}$ est bornée dans $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$.

Preuve En considérant successivement la divergence de la première équation de (A.114), puis la trace normale de cette même équation, nous obtenons $\Delta(\operatorname{div} \mathbf{p}) = 0$ dans Ω_i et $\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_i} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_i}$.

Soit d l'unique solution du problème variationnel : trouver $d \in H^1(\Omega_i)$ t.q.

$$\begin{aligned} (d, 1)_{0,i} &= 0 \\ (\nabla d, \nabla v)_{0,i} &= -\langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}, v \rangle_\zeta, \quad \forall v \in H^1(\Omega_i). \end{aligned} \quad (\text{A.116})$$

Nous remarquons en particulier que la condition de compatibilité portant sur la donnée \mathbf{f} est vérifiée. En effet $\langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\zeta = (\mathbf{f}, \nabla 1)_{0,i} + (\operatorname{div} \mathbf{f}, 1)_{0,i} = 0$.

D'autre part, considérons $v \in H^1(\Omega_i)$ tel que $\Delta v = sg(\alpha_i)\operatorname{div} \mathbf{p} - d$ et $\partial_{\mathbf{n}}v|_{\partial\Omega_i} = 0$. Nous pouvons alors choisir $\mathbf{v} = \nabla v$ comme fonction test dans (A.115). Après intégration par parties nous obtenons

$$sg(\alpha_i)(\operatorname{div} \mathbf{p}, \Delta v)_{0,i} = \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}, v \rangle_{\zeta}. \quad (\text{A.117})$$

En prenant la somme entre la deuxième équation de (A.116) et (A.117), avec v tel que ci dessus, nous obtenons

$$(sg(\alpha_i)\operatorname{div} \mathbf{p} - d, \Delta v)_{0,i} = \|sg(\alpha_i)\operatorname{div} \mathbf{p} - d\|_{0,i}^2 = 0,$$

donc $d = sg(\alpha_i)\operatorname{div} \mathbf{p}$. □

Remarque A.G.1 Soit $(\mathbf{f}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbf{L}^2(\Omega_i)$ telle que $\operatorname{div} \mathbf{f}^k = 0$ dans Ω_i et $\mathbf{f}^k \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = 0$. Considérons alors $(\mathbf{p}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite dont le terme général est solution du problème (A.114) avec \mathbf{f}^k comme donnée. D'après la proposition A.G.2, la suite $(\mathbf{p}^k)_k$ est bornée dans $\mathbf{W}_T(\Omega_i)$. L'injection de cet espace étant compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega_i)$, nous pouvons extraire une sous-suite (toujours notée $(\mathbf{p}^k)_k$) qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega_i)$. D'après l'équation (A.115), pour deux différents indices k, l et pour $\mathbf{v} = \mathbf{p}^k - \mathbf{p}^l$, nous obtenons :

$$\inf_{x \in \Omega_i} |\alpha_i| \|\operatorname{rot}(\mathbf{p}^k - \mathbf{p}^l)\|_{0,i}^2 + \|\operatorname{div}(\mathbf{p}^k - \mathbf{p}^l)\|_{0,i}^2 \leq \|\mathbf{f}^k - \mathbf{f}^l\|_{0,i} \|\mathbf{p}^k - \mathbf{p}^l\|_{0,i}$$

Puisque une certaine sous-suite $(\mathbf{p}^k)_k$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega_i)$, nous déduisons de cette dernière inégalité que la sous-suite $(\mathbf{p}^k)_k$ converge alors dans $\mathbf{W}_T(\Omega_i)$. De plus, d'après l'hypothèse 6.2.1 portant sur la régularité de l'interface ζ , il résulte que $\mathbf{p}^k|_{\zeta}$ converge dans $\mathbf{H}^{1/2}(\zeta)$. ★

Bibliographie

- [1] A. ALÙ AND N. ENGHETA, *Guided Modes in a Waveguide Filled With a Pair of Single-Negative (SNG), Double-Negative (DNG), and/or Double-Positive (DPS) Layers*, IEEE Trans. Microw. Theory Tech., 52 (2004), pp. 199–210.
- [2] F. ASSOUS, P. CIARLET, AND E. SONNENDRÜCKER, *Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners*, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 32 (1998), pp. 359–389.
- [3] F. ASSOUS, P. CIARLET, JR., AND E. GARCIA, *Résolution des équations de Maxwell instationnaires avec charges dans un domaine singulier bidimensionnel*, C.R. Acad. Sci. Paris, I 330 (2000), pp. 391–396.
- [4] F. ASSOUS, P. CIARLET, JR., P. A. RAVIART, AND E. SONNENDRÜCKER, *Characterization of the singular part of the solution of Maxwell's equations in a polyhedral domain*, Math. Methods Appl. Sci., 22 (1999), pp. 485–499.
- [5] F. ASSOUS, P. CIARLET, JR., AND J. SEGRÉ, *Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domains : the singular complement method.*, J. Comput. Phys., 161 (2000), pp. 218–249.
- [6] I. BABUSKA AND J. OSBORN, *Eigenvalue Problems*, vol. 2 of Handbook of Numerical Analysis, Finite element method (part1), P. G. Ciarlet and J. L. Lions editors, North Holland, 1989.
- [7] A.-S. BONNET BEN-DHIA, M. DAUGE, AND K. RAMDANI, *Analyse spectrale et singularités d'un problème de transmission non coercif*, C.R. Acad. Sci, Ser. I 328 (1999), pp. 710–720.
- [8] A.-S. BONNET BENDHIA, C. HAZARD, AND S. LOHRENGEL, *Singular field method for the solution of Maxwell's equations in polyhedral domains*, SIAM J. Appl. Math., 59 (1999), pp. 2028–2040.
- [9] G. BOUCHITTÉ AND D. FELBACQ, *Homogenization of a set of parallel fibers*, Waves Random Media, 7 (1997), pp. 245–256.
- [10] ———, *Homogenization near resonance and artificial magnetism from dielectrics*, C.R. Acad. Sci Ser. I, (2004), pp. 377–382.
- [11] S. BRENNER AND L. R. SCOTT, *The mathematical theory of finite element methods*, Springer Verlag, 1994.
- [12] A. BUFFA AND P. CIARLET, JR., *On trace for functional spaces related to Maxwell's equations. Part I : an integration by parts formula in Lipschitz polyhedra*, Math. Meth. Appl. Sci., 24 (2001), pp. 9–30.

-
- [13] F. CAKONI, D. COLTON, AND H. HADDAR, *The linear sampling method for anisotropic media*, J. Comput. Appl. Math., 146 (2002), pp. 285–299.
- [14] P. CIARLET, JR., *Augmented formulations for solving Maxwell equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 194 (2005), pp. 559–586.
- [15] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1978.
- [16] M. COSTABEL, *A remark on the singularity of the solution of Maxwell's equations on Lipschitz domains*, Math. Methods Appl. Sci., 12 (1990), pp. 365–368.
- [17] M. COSTABEL AND M. DAUGE, *Singularités des équations de Maxwell dans un polyèdre*, C.R. Acad. Sci. Paris, I 324 (1997), pp. 1005–1010.
- [18] ———, *Weighted regularisation of Maxwell equations in polyedral domains*, Numer. Math., 93 (2002), pp. 293–277.
- [19] ———, *Computation of resonance frequencies for Maxwell equations in non smooth domains*, Lectures Notes in Comp. Sci. and Eng., 31 (2003).
- [20] M. COSTABEL, M. DAUGE, AND S. NICAISE, *Singularities of Maxwell interface problems*, Math. Models Numer. Anal., 33 (1999), pp. 627–649.
- [21] M. COSTABEL AND E. STEPHAN, *A direct boundary integral method for transmission problems*, J. of Math. Anal. and Appl., 106 (1985), pp. 367–413.
- [22] ———, *Strongly Elliptic Boundary Integral Equations for Electromagnetic Transmission Problems*, Proc. Roy. Soc. of Edimburg, 109 (1988), pp. 271–296.
- [23] N. ENGHETA, *An Idea For Thin Subwavelength Cavity Resonator Using Metamaterials With Negative Permittivity and Permeability*, IEEE Antennas Wireless Propag. Lett., 1 (2002), pp. 10–13.
- [24] P. FERNANDES AND G. GILARDI, *Magnetostatic and electrostatic problems in inhomogeneous anisotropic media with irregular boundary and mixed boundary conditions*, Math. Models Methods Appl. Sci., 7 (1997), pp. 957–991.
- [25] V. GIRAULT AND P.-A. RAVIART, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer Verlag, 1986.
- [26] P. GRISVARD, *Singularities in boundary value problems*, Masson, Paris, 1992.

- [27] C. HAZARD AND M. LENOIR, *On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations*, SIAM J. Math. Anal., 27 (1996), pp. 1597–1630.
- [28] E. JAMELOT, *Résolution des équations de Maxwell avec des éléments finis de Galerkin continus*, Thèse de doctorat de l'École Polytechnique, 2005.
- [29] M. LENOIR, *Approximation par éléments finis des problèmes elliptiques*, Rapport de Recherche 771, E.N.S.T.A, 2006.
- [30] I. V. LINDELL, S. A. TRETAKOV, K. I. NIKOSKIEN, AND S. ILVONEV, *BW-Media - Media With Negative Parameters, Capable of Supporting Back-ward Waves*, Microwave Opt. Technol. Lett., 31 (2001), pp. 129–133.
- [31] A. MANES AND A. M. MICHELETTI, *Un'estensione della teoria variazionale classica degli autovalori per operatori ellittici del secondo ordine*, Bollettino U.M.I., (4) 7 (1973), pp. 285–301.
- [32] D. MAYSTRE AND S. ENOCH, *Perfect lenses made with left-handed materials : Alice's mirror ?*, J. Opt. Soc. Amer., A 21 (2004), pp. 122–131.
- [33] D. MAYSTRE, S. ENOCH, B. GRALAK, AND G. TAYEB, *Metamaterials : from microwaves to the visible region*, C.R. physique, 6 (2005), pp. 693–701.
- [34] P. OLA, *Remarks on a transmission problem*, J. of Math. Anal. and Appl., 196 (1993), pp. 639–658.
- [35] J. PENDRY, A. HOLDEN, D. ROBBINS, AND W. STEWART, *Magnetism from conductors, and enhanced non-linear phenomena*, IEEE T. Microw. Theory, 47 (1999), pp. 2075–2084.
- [36] J. B. PENDRY, *Negative Refraction Makes a Perfect Lens*, Physical Review Letters, 85 (2000), pp. 3966–3969.
- [37] K. RAMDANI, *Lignes supraconductrices : analyse mathématique et numérique*, Thèse de doctorat de Paris 6, 1999.
- [38] A. SHELBY, D. R. SMITH, S. C. NEMAT-NASSER, AND S. SCHULTZ, *Microwave Transmission Through a Two-Dimensional, Isotropic, Left-Hand Metamaterial*, Applied Physical Letters, 78 (2001), pp. 489–491.
- [39] R. SHELBY, D. SMITH, AND S. SCHULTZ, *Experimental verification of a negative index of refraction*, Science, 292 (2001), pp. 77–79.
- [40] G. M. V. SILVEIRINHA AND C. A. FERNANDES, *Homogenization of 3-D-Connected and Nonconnected Wire Metamaterials*, IEEE Transaction on microwave theory and techniques, 53 (2005), pp. 1418–1430.

-
- [41] D. R. SMITH, W. J. PADILLA, D. C. VIER, S. C. NEMAT-NASSER, AND S. SCHULTZ, *Composite Medium With Simultaneously Negative Permeability and Permittivity*, Physical Review Letters, 84 (2000), pp. 4184–4187.
- [42] A. A. SUKHORUKOV, I. V. SHADRIVOV, AND Y. S. KIVSHAR, *Wave scattering by metamaterial wedges and interfaces*, Int. J. Numer. Model., 19 (2006), pp. 105–117.
- [43] G. VESELAGO, *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ* , Soviet Physics Uspekki, 10 (1968), pp. 507–514.
- [44] C. WEBER, *A local compactness theorem for Maxwell's equations*, Math. Meth. Appl. Sci., 2 (1980), pp. 12–25.
- [45] A. A. ZHAROV, N. A. ZHAROVA, R. E. NOSKOV, I. V. SHADRIVOV, AND Y. S. KIVSHAR, *Birefringent left-handed metamaterials and perfect lenses for vectorial fields*, New journal of Physics, 7 (2005), p. 220.

Index des espaces fonctionnels

\mathbb{H}_{Γ_b}	48
$\mathbf{H}_{0,\Gamma_i}(\mathbf{rot}; \Omega_i)$	43
$H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega_i)$	21
$\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$	22
$\mathbf{H}_{0,\zeta}(\mathbf{rot}; \Omega_i)$	43
$H_{00}^q(\zeta)$	31
$\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$	22
$\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$	117
\mathcal{K}_ζ	21
$\mathbf{W}_T(\Omega)$	122
\mathcal{X}	117
\mathcal{X}_i	127
\mathbf{X}_i	43
$\mathcal{X}\mathcal{Y}$	119
\mathcal{Y}	119
\mathbf{Z}	158

Résumé

Au cours de ce travail on s'intéresse à la résolution des problèmes de transmission d'onde électromagnétiques en régime harmonique entre deux milieux caractérisés par des constantes électriques et/ou magnétiques de signe opposé. Des paramètres électromagnétiques de signe négatif interviennent dans les modèles physiques décrivant les méta-matériaux, les supra-conducteur ou les plasmas au voisinage de la résonance plasmon. Mathématiquement la difficulté est liée aux pertes de coercivité et/ou de compacité dues aux sauts de signe à l'interface séparant les deux milieux.

La première partie du présent mémoire est consacrée à l'étude d'un problème scalaire modèle auquel le système de Maxwell peut être ramené dans le cas statique ou dans le cas bidimensionnel. Pour ce problème modèle le changement de signe se traduit par une perte d'ellipticité. Pour contourner cette difficulté on développe trois différentes approches variationnelles et, pour chacune de ces méthodes, on fournit les conditions qui en assurent le caractère bien posé au sens de Fredholm. Après une validation numérique, les formulations variationnelles développées seront utilisées pour calculer les fréquences propres d'une cavité résonante constituée de diélectriques et méta-matériaux.

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'étude du problème de Maxwell tridimensionnel. On s'intéresse sans perte de généralité à la formulation en champ électrique. On démontre que, sous certaines conditions convenables, l'espace fonctionnel auquel appartient naturellement le champ électrique s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, même en présence d'une constante électrique présentant un changement de signe. Pour contourner la difficulté liée au changement de signe de la constante magnétique on étendra au problème de Maxwell une des approches variationnelles développées pour le problème modèle.

Abstract

The focus of this thesis has been on the electromagnetic harmonic wave transmission problem between media with opposite sign dielectric and/or magnetic constants. Physical models describing meta-materials, superconductors or plasmas at the plasmon resonance lead to negative effective electromagnetic parameters. Mathematically however difficulties arise from the lack of ellipticity and/or compactness due to the sign shifts at the interface between the two media. In the static case or in two dimensional configurations, the Maxwell system reduces to a scalar model problem. Due to the sign shift at the interface, it is not possible to prove in a straightforward manner that this model problem is elliptic. Three variational approaches have been developed in order to fit the scalar model into a Fredholm well-posed framework. After numerical validations of these methods, we used the variational formulations for the computation of the eigen-frequencies in a resonant cavity. This was designed by coupling dielectrics with metamaterials. Then, we focus on the three-dimensional Maxwell problem. With no loss of generality we consider the electric formulation. We prove a compactness embedding result for the space of the electric field which is valid, under some suitable conditions, in case of a sign-shifting electric constant. Finally, we have overcome the difficulty of a sign-shifting magnetic constant by generalizing one of the approaches developed for the model problem.