Justification de la loi de Peek en électrostatique.

Patrick Ciarlet, Jr [a], Samir Kaddouri [a]

[a] *Laboratoire POEMS, UMR 2706 CNRS/ENSTA/INRIA,*
École Nationale Supérieure de Techniques Avancées,
32, boulevard Victor, 75739 Paris Cedex 15, France

Reçu le 10 mai 2006 ; accepté après révision le 12 octobre 2006

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

Nous nous intéressons au calcul de la densité de charge électrostatique à la pointe d'une électrode de faible courbure. La relation entre le rayon de courbure et le champ électrostatique à la surface de la pointe est régie par la loi empirique de Peek qui n'est valable que pour des électrodes à géométrie cylindrique ou sphérique. Dans cette note, nous justifions mathématiquement cette loi et nous l'étendons à d'autres géométries. A l'aide de développements asymptotiques multi-échelles, nous établissons rigoureusement le comportement de la densité de charge pour des géométries coincidant à l'infini avec le cône. Un exemple numérique illustre nos résultats. *Pour citer cet article : P. Ciarlet, Jr, S. Kaddouri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

Abstract

A justification of Peek's empirical law in electrostatics. We consider the computation of the electrostatic charge density at the tip of a rounded corner. The relation between the curvature radius and the electrostatic field is given by Peek's empirical law which is valid only for cylindrical or spherical geometries. In this note, we justify mathematically this law and extend it to other geometries. With the help of multiscaled asymptotic expansions, we derive an expression for the charge density for geometries which coincide at infinity with a cone. A numerical illustration is provided. *To cite this article: P. Ciarlet, Jr, S. Kaddouri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

1. Introduction

La loi (empirique) de Peek exprime la valeur maximale de la densité de charge électrostatique à la surface d'une électrode effilée, possédant une géométrie cylindrique ou sphérique en son extrémité, en fonction du rayon de courbure. Si r_c désigne le rayon de courbure, le comportement prévu par cette

Email addresses: `patrick.ciarlet@ensta.fr` (Patrick Ciarlet, Jr), `samir.kaddouri@ensta.fr` (Samir Kaddouri).

loi est en $\mathrm{r}_c^{-1/2}$[1] : plus précisément, on a $\sigma_{\max} = \varepsilon_0 E_{\max}$, avec $E_{\max} = (a_0 \mathrm{r}_c^{-1/2} + a_1)$, où a_0 et a_1 sont déterminés expérimentalement pour les deux types de géométrie. Dans cette note, nous justifions ce comportement lorsque la géométrie à l'infini est celle d'un cône, en calculant la valeur de la dérivée normale du potentiel électrostatique.

2. Espaces fonctionnels et théorie classique.

On se place dans $\mathbb{R}^2$ dans la suite, le cas axisymétrique dans $\mathbb{R}^3$ étant complètement traité dans [3]. Dans la suite, ε est un réel strictement positif. Pour x dans $\mathbb{R}^2$, on note $\rho(x) = \sqrt{1+|x|^2}$, et $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon\rho(x/\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon^2+|x|^2}$. On considère la classe d'ouverts suivants : pour $1/2 < \alpha < 1$, on appelle Ω le secteur angulaire de sommet O, d'angle au sommet π/α, et $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière. On note $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par $\varphi(x) = cx$ si $x < -1$, $\varphi(x) = -c(x^2+1)/2$ si $|x| \le 1$, $\varphi(x) = -cx$ si $x > 1$, globalement de classe $\mathcal{C}^1$ (et de classe $\mathcal{C}^2$ partout sauf aux points de raccord $x = \pm 1$) ; pour cela, $c = -(\tan(\pi/2\alpha))^{-1}$. On note enfin ω l'ouvert $\omega := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 > \varphi(x_1)\}$ et, on pose $\Omega_\varepsilon := \varepsilon\omega = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2/\varepsilon > \varphi(x_1/\varepsilon)\}$. En particulier, $\Omega_1 = \omega$. On note $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon$ sa frontière[1] et $O_\varepsilon = (0, -c\varepsilon/2)$ son sommet.
Comme pour le cas du problème de Dirichlet en domaine extérieur, les espaces de Sobolev à poids fournissent un cadre approprié pour la recherche de solutions. La principale différence provient de la nature non bornée de la frontière qui demande de définir l'espace des traces qui convient. Nous introduisons donc les espaces de Hilbert ad hoc définis sur Ω ou sur Ω_ε.
Définition 2.1 *Pour $m \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$V_\beta^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \;\middle|\; v_\lambda \partial^\lambda u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\lambda| \le m \right\}, \tag{1}$$

$$W_\beta^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \;\middle|\; w_\lambda \partial^\lambda u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\lambda| \le m \right\}. \tag{2}$$

Les poids v_λ, w_λ valent : $v_\lambda(x) = |x|^{\beta+|\lambda|-m}$, $w_\lambda(x) = \rho(x)^{\beta+|\lambda|-m}$. L'espace $W_\beta^m(\Omega_\varepsilon)$ est définie de façon similaire à $W_\beta^m(\Omega)$ en remplaçant w_λ par w_λ^ε : $w_\lambda^\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(x)^{\beta+|\lambda|-m}$.
Le rôle des poids est triple. Tout d'abord, ils fixent le comportement à l'infini. Ils sont aussi choisis de manière à obtenir des inégalités de coercivité de type Poincaré. Enfin, leur introduction dans les espaces W_β^m ne modifie pas le comportement des éléments à l'origine : de cette façon, les propriétés locales restent identiques à celle des espaces classiques.
Si on note Δ_{Dir} l'opérateur Laplacien Δ avec condition aux limites de Dirichlet homogène, son inverse agit continûment de $V_\beta^m(\Omega)$ dans $V_\beta^{m+2}(\Omega)$ lorsque $\beta - m + 1 \notin \mathbb{Z}^*\alpha$ (cf. [5,6]). Soit $f \in V_\beta^m(\Omega)$ la donnée et $u_0 = {\Delta_{Dir}}^{-1} f$. Lorsque $f \equiv 0$ au voisinage de l'origine, le comportement asymptotique ($r \longrightarrow 0^+$) de u_0 est déterminé par la régularité locale de u_0. Introduisons pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\varphi_\ell(\theta) = \sqrt{2\alpha/\pi}\sin\ell\alpha\theta$, la base orthonormale de $L^2(]0,\pi/\alpha[)$ obtenue à partir du Laplacien 1D avec conditions de Dirichlet, et définissons $s_D^\ell(r,\theta) = r^{-\ell\alpha}\varphi_\ell(\theta)$ et $\phi_\ell(r,\theta) = r^{\ell\alpha}\varphi_\ell(\theta)$ avec (r,θ) les coordonnées polaires par rapport à O.
Proposition 2.2 *(D'après [5]) On suppose que $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et que $f \equiv 0$ au voisinage de O.*
Il existe des coefficients $(\lambda_\ell)_{\ell \ge 1}$ tels que pour tout $m \in \mathbb{N}, m \ge 1, u_0$ présente le comportement suivant au voisinage de O :

$$u_0(r,\theta) = \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \phi_\ell(r,\theta) + \mathcal{O}(r^{(m+1)\alpha}), r \longrightarrow 0^+. \tag{3}$$

[1] Pour des raisons pratiques, on choisit une forme parabolique. On peut vérifier que toute forme de frontière obtenue avec φ régulière respectant $\varphi(0) \neq 0$, et $\varphi'(0) = 0$ convient, voir [3].

Les coefficients λ_ℓ *sont donnés par la formule suivante :* $\lambda_\ell = \dfrac{1}{2\ell\alpha}\displaystyle\int_\Omega f s_D^\ell \,\mathrm{d}x$.
Lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}$, des termes logarithmiques appraissent dans le développement (3) pour tout indice ℓ tel que $\ell\alpha \in \mathbb{N}$. Dans la suite, on choisit donc $\alpha \notin \mathbb{Q}$ pour simplifier la présentation.
Plus généralement, lorsque f est régulière et satisfait une propriété de décroissance rapide [6, Chap. 7] au voisinage de O, le développement asymptotique (3) de u_0 reste vrai.

3. Problème de Dirichlet dans le cône "arrondi" $\boldsymbol{\Omega_\varepsilon}$

Tout d'abord, on a le résultat
Proposition 3.1 *L'opérateur* ${\Delta_{Dir}}^{-1}$ *agit continûment de* $W_1^0(\Omega_\varepsilon)$ *dans* $W_1^2(\Omega_\varepsilon)$*. De plus, le module de continuité est indépendant de* ε*.*
Passons ensuite au développement asymptotique de la solution. On considère $\xi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+), 0 \leq \xi \leq 1$ valant 1 pour $t \leq a$ (avec $a = \sqrt{1+c^2}$) et 0 pour $t \geq 2a$, et on note χ_ε la fonction $x \longrightarrow \xi(|x|/\varepsilon)$.
Théorème 3.2 *On suppose que* $f \equiv 0$ *au voisinage de* O*.*
Il existe des fonctions $(y_\ell)_{\ell\geq 1}$ *vérifiant :* $-\Delta y_\ell = 0$ dans $\omega, y_\ell = 0$ sur $\partial\omega$, *et* $y_\ell(\zeta) - \phi_\ell(\zeta) = O(|\zeta|^{-\alpha})$ *quand* $|\zeta| \longrightarrow +\infty$*, telles que, pour tout* $m \geq 1$*, si* U_ε^m *est définie par*

$$U_\varepsilon^m = (1-\chi_\varepsilon)\left(u_0 - \sum_{\ell=1}^{\ell=m}\lambda_\ell\phi_\ell\right) + \sum_{\ell=1}^{\ell=m}\lambda_\ell\varepsilon^{\ell\alpha}y_\ell\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right), \tag{4}$$

alors on a l'erreur d'approximation suivante : $\|u_\varepsilon - U_\varepsilon^m\|_{W_1^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_m\varepsilon^{(m+1)\alpha}$.
Les y_ℓ sont uniques à un coefficient multiplicatif près, et les coefficients $(\lambda_\ell)_\ell$ sont ceux de la Prop. 2.2.
En domaine borné Ω_ε^b, on aboutirait à l'erreur d'approximation $\|u_\varepsilon - U_\varepsilon^m\|_{W_1^2(\Omega_\varepsilon^b)} \leq C_m\varepsilon^{(m+1)\alpha}$, en multipliant la somme $\sum_\ell \lambda_\ell\varepsilon^{\ell\alpha}y_\ell(\cdot/\varepsilon)$ par χ_R dans (4), avec R fixé et tel que $\mathrm{supp}(\chi_R) \subset \Omega_\varepsilon^b$.
Corollaire 3.3 *Lorsque* $\varepsilon \to 0^+$*, on a l'estimation suivante :* $\partial_n u_\varepsilon(O_\varepsilon) = \lambda_1\partial_n y_1(O_1)\varepsilon^{\alpha-1} + O(\varepsilon^{2\alpha-1})$.
Pour la valeur limite $\alpha = 1/2$, on retrouve pour $\varepsilon = \mathrm{r}_c$ le comportement mesuré expérimentalement (loi de Peek) en considérant $E_{\max} = \partial_n u_\varepsilon(O_\varepsilon)$.
On peut aussi fournir une représentation intégrale de la dérivée normale. Pour $x \neq y \in \mathbb{R}^2$, on définit $E_2(x,y) = (-1/2\pi)\log(|x-y|)$, vérifiant $-\Delta_x E_2(\cdot,y) = \delta_y$ au sens des distributions, δ_y étant la masse de Dirac au point y. La fonction de Green G_ε de Ω_ε s'écrit : $G_\varepsilon(x,y) = \eta(|x|/|y|)E_2(x,y) + H_\varepsilon(x,y)$, où η est une fonction de troncature, positive sur $\mathbb{R}^+$, valant 1 au voisinage de 1, nulle dans un voisinage de 0 et $+\infty$, $H_\varepsilon(\cdot,y)$ vérifiant le problème aux limites adéquat. L'interêt principal de la fonction de Green est d'exprimer la solution u_ε au moyen d'une formule intégrale qui s'écrit ici : $u_\varepsilon(x) = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} f(y)G_\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}y$.
Nous pouvons alors énoncer :
Proposition 3.4 *Soit* $\sigma \in \Gamma_\varepsilon$*. On a la formule de représentation :* $\partial_n u_\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} f(y)\partial_{n_\sigma}G_\varepsilon(\sigma,y)\,\mathrm{d}y$.
Pour caractériser la fonction $\mathcal{G}' = \partial_{n_\sigma}G_\varepsilon(\sigma,\cdot)$ lorsque $\sigma \in \Gamma_\varepsilon$, nous la décomposons en somme d'une partie singulière lorsque $y \longrightarrow \sigma$ et d'une partie appartenant à $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_\varepsilon)$: $\mathcal{G}'(y) = (n_x(\sigma)\cdot\nabla_x)\,G_\varepsilon(\sigma,y) = (n_x(\sigma)\cdot\nabla_x)\,E_2(\sigma,y) + \mathcal{G}''(\sigma,y)$. La fonction $\mathcal{G}'$ vérifie le problème aux limites suivant :

$$\Delta\mathcal{G}' = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon,\ \mathcal{G}' = 0 \text{ sur } \Gamma_\varepsilon - \{\sigma\}. \tag{5}$$

Supposons (ce qui est toujours le cas, sauf aux deux points de raccord) qu'au voisinage de σ, Γ_ε soit de classe $\mathcal{C}^2$ de sorte que $\partial_{n_\sigma}E_2(\sigma,\cdot)|_{\Gamma_\varepsilon} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Gamma_\varepsilon)$ et considérons le problème suivant :

$$-\Delta\mathcal{G}'' = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon,\ \mathcal{G}'' = -\partial_{n_\sigma}E_2(\sigma,\cdot) \text{ sur } \Gamma_\varepsilon. \tag{6}$$

A la condition que $\partial_{n_\sigma} E_2(\sigma,\cdot)|_{\Gamma_\varepsilon} \in W_0^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, le problème (6) est bien posé dans $W_0^1(\Omega_\varepsilon)$. Pour le point qui nous intéresse, i.e. celui de plus forte courbure $\sigma = O_\varepsilon$, $\partial_{n_\sigma} E_2(\sigma,\cdot)$ possède une trace régulière sur Γ_ε qui, par une estimation directe (cf. [4]), est telle que : $\|\partial_{n_\sigma} E_2(\sigma,\cdot)\|_{W_0^{1/2}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$: $\mathcal{G}''$ existe bien.

4. Résultats numériques.

On considère deux secteurs angulaires Ω de rayon $R = 5$, d'angle au sommet $2\pi/3$ et $3\pi/4$, et dont la partie anguleuse est remplacée par un arrondi parabolique comme expliqué à la Section 2 et on note Ω_ε les domaines obtenus. On utilise les éléments finis de Lagrange P^1 sur un maillage régulier. Le domaine polygonal construit sur cette triangulation est noté $\Omega_{\varepsilon,h}$. Le pas du maillage h est choisi tel que $h = \mathcal{O}(\varepsilon)$. On obtient une approximation de $\mathcal{G}' = \partial_n G_\varepsilon(O_\varepsilon,\cdot)$ en calculant une approximation $\mathcal{G}''_h$ de la solution de (6), par éléments finis et en prenant pour $\mathcal{G}'_h$: $\mathcal{G}'_h = \mathcal{G}''_h + \partial_n E_2(O_\varepsilon,\cdot)$. En domaine borné, le coefficient λ_1 vaut $\lambda_1 = \frac{1}{2\alpha}\int_\Omega f p_s dx$, où p_s est la singularité duale pour le Laplacien : $p_s \in L^2(\Omega)$, $\Delta p_s = 0$ dans Ω, $p_s = 0$ sur $\partial\Omega$. Cette quantité est approchée par $\lambda_1^h = \frac{1}{2\alpha}\int_\Omega f p_s^h dx$, où p_s^h est obtenue en discrétisant uniquement la partie régulière de p_s, avec l'estimation $|\lambda_1 - \lambda_1^h| = \mathcal{O}(h^{2\alpha})$ (cf. [2]). Par comparaison,

$$\varepsilon^{1-\alpha}\left(\frac{1}{\lambda_1}\int_{\Omega_\varepsilon} f\mathcal{G}' dx - \frac{1}{\lambda_1^h}\int_{\Omega_{\varepsilon,h}} f\mathcal{G}'_h dx\right) = \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\alpha}), \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0^+.$$

Le second membre f est de la forme $f(x) = 0, |x| < 2$, et $f(x) = (1+|x|^2)^{-1}, |x| \geq 2$. Il est à noter que Ω, p_s et λ_1 sont indépendants de ε, la seule dépendance apparaissant dans le pas du maillage. En revanche, Ω_ε et $\mathcal{G}'$, dont l'approximation nécessite le maillage d'un arrondi par un maillage polygonal variant avec ε, sont explicitement dépendant de ε.

α \ ε	0.500	0.250	0.125	0.062
2/3	-0.856	-0.868	-0.862	-0.862
3/4	-0.918	-0.883	-0.887	-0.890

TAB. 1
Evolution du rapport $\left(\lambda_1^h \varepsilon^{\alpha-1}\right)^{-1}\int_{\Omega_{\varepsilon,h}} f\mathcal{G}'_h dx$ lorsque ε varie, pour $\alpha = \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$. Behavior of the ratio $\left(\lambda_1^h \varepsilon^{\alpha-1}\right)^{-1}\int_{\Omega_{\varepsilon,h}} f\mathcal{G}'_h dx$ as a function of ε, with $\alpha = \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$.

Références

[1] K. Adamiak, P. Atten : Simulation of corona discharge in point-plane configuration. J. Electrostat., **61**, 85–98 (2004).

[2] P. Ciarlet, Jr, J. He : The Singular Complement Method for 2D problems. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. 1 **336**, 353–358 (2003).

[3] P. Ciarlet, Jr, S. Kaddouri : Multiscaled asymptotic expansions for the electric potential : surface charge densities and electric fields at rounded corners. Submitted.

[4] S. Kaddouri : Thèse de troisième cycle, Ecole Polytechnique & ENSTA 2006.

[5] V. A. Kondrat'ev : Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. Trans. Moscow Math. Soc., **16**, 227–313 (1967).

[6] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskii : Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Problems : Volume I. Operator Theory. Advances and Applications, Vol. 111, Birkhaser (2000).