

Modèles et méthodes pour les équations de Maxwell

(Année 2003)

Franck Assous

Patrick Ciarlet

CEA-DAM/DIF

ENSTA/UMA

BP12

32, boulevard Victor

91680 Bruyères-le-Châtel

75739 Paris Cedex 15

Table des matières

Introduction	7
1 Quelques exemples d'applications des équations de Maxwell	9
1.1 Les problèmes d'évolution	9
1.1.1 Problèmes de propagation	9
1.1.2 Exemples de problèmes couplés	11
1.1.3 Formulation en potentiels des équations	12
1.2 Les problèmes statiques	14
1.2.1 Electrostatique	14
1.2.2 Magnétostatique	15
1.3 Quelques modèles "intermédiaires"	15
1.3.1 Une hiérarchie de modèles approchés	16
1.3.2 Le modèle quasiélectro/magnétostatique	17
1.3.3 Le modèle de Darwin	17
1.3.4 Induction magnétique dans un plasma	18
1.4 Les problèmes stationnaires ou "en fréquence"	19
1.4.1 Les problèmes extérieurs	19
1.4.2 Les problèmes intérieurs	20
2 Modélisation et outils mathématiques	33
2.1 Eléments de modélisation : considérations physiques	34
2.2 Dépendance en espace	35
2.2.1 Dans $\mathbb{R}^3$	35
2.2.2 Conditions de transmission	39
2.2.3 Dans un domaine borné	40
2.3 Existence d'une solution : cas statique	41
2.3.1 Electrostatique	41
2.3.2 Magnétostatique	44
2.4 Dépendance en temps	46
2.4.1 Eléments de modélisation : hypothèses sur les données	47
2.4.2 Les équations de Maxwell reformulées	48
2.4.3 Existence d'une solution	52
2.5 Cas stationnaire	57
2.5.1 Etude du système en ω^2 en $\mathbf{e}$ et en $\mathbf{h}$	63
Annexe : espaces fonctionnels	71
Espaces de Sobolev standards	71
Espaces de Sobolev en électromagnétisme	75
Espaces fonctionnels généraux en électromagnétisme	78

3	Méthodes numériques et résolution	83
3.1	Quelques formulations (possibles) du problème	83
3.1.1	Une formulation du premier ordre	83
3.1.2	Deux formulations ordre1-ordre2	85
3.1.3	Une formulation de type équation des ondes	86
3.1.4	Conséquences numériques	86
3.2	Rappels sur les problèmes mixtes	87
3.3	Une méthode d'éléments finis dans $H(\mathbf{rot}, \Omega)$	91
3.3.1	Élément fini $H_{\mathbf{rot}}$ de Raviart-Nédélec	93
3.3.2	Avantages et inconvénients de l'élément fini $H_{\mathbf{rot}}$	95
3.4	Une méthode d'éléments finis dans $H(\mathbf{rot}, \text{div}, \Omega)$	96
3.4.1	Première étape : de $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ à $\mathcal{X} \times L^2(\Omega)$	96
3.4.2	Deuxième étape : une formulation en Lagrangien augmenté	98
3.4.3	Troisième étape : une formulation dans $H^1(\Omega)^3$	99
3.5	Une méthode d'éléments finis conformes dans $H^1(\Omega)^3$	100
3.5.1	Élément fini de Hood-Taylor	101
3.5.2	Prise en compte de la condition aux limites $\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0$	103
3.5.3	Utilisation des formules de quadrature	109
3.6	Quelques résultats de discrétisation en temps	111
3.6.1	Utilisation d'une méthode de projection	113
3.6.2	Etude de la stabilité	115
	Annexe : une méthode de pénalisation	119
4	Les équations de Maxwell bidimensionnelles	121
1	Invariance par rotation	122
1.1	Le domaine et les opérateurs différentiels	122
1.2	Les équations de Maxwell	125
1.3	Existence et unicité de solutions invariantes par rotation	126
2	Invariance par translation	128
2.1	Le domaine et les opérateurs différentiels	128
2.2	Les équations de Maxwell	130
2.3	Le cas statique	131
2.4	Le cas temporel	133
2.5	Commentaires	136
3	Conclusion	137
5	Singularités dans les équations de Maxwell	139
1	Caractérisation des singularités en espace	140
2	Caractérisation des singularités en temps	144
3	Discrétisation	146
3.1	En espace : partie régulière	147
3.2	En espace : partie singulière	147
3.3	Résolution du problème d'évolution	152
3.4	Quelques détails d'intégration numérique	155
4	Le cas d'une condition aux limites de Silver-Müller	156
4.1	Décomposition de la solution en parties régulière et singulière	156
5	Résultats numériques	157
5.1	Calcul numérique de la partie singulière	158
5.2	Cas d'évolution	158
	Annexe : méthode Dirichlet-Neumann	161

Introduction

Les phénomènes électromagnétiques dans le vide (respectivement dans les milieux continus) sont décrits à l'aide de deux (respectivement quatre) fonctions dépendant du temps t et des coordonnées d'espace $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, définies dans l'espace tout entier, et à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}^3$. Ces fonctions sont (1 et 2 pour le vide, 1 à 4 pour les milieux continus)

1. le champ électrique $\mathcal{E}$,
2. l'induction magnétique $\mathcal{B}$,
3. le champ magnétique $\mathcal{H}$,
4. l'induction électrique $\mathcal{D}$.

Ces fonctions sont reliées entre elles par les équations de Maxwell (système d'unités SI) :

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} - \mathbf{rot} \mathcal{H} = -\mathcal{J}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathcal{E} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \mathcal{R}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0, \quad (4)$$

où $\mathcal{R}$ est une fonction (à valeurs dans $\mathbb{R}$) appelée la densité de charge électrostatique, qui résulte de la présence de charges électriques, et $\mathcal{J}$ est une fonction (à valeurs dans $\mathbb{R}^3$) appelée la densité de courant, qui est non nulle dès qu'il y a déplacement de charges, autrement dit un courant électrique. Ces équations peuvent aussi bien modéliser une étude à l'échelle microscopique qu'une étude à l'échelle macroscopique des phénomènes (voir exemples 1.1.2).

Cependant, elles ne suffisent pas à caractériser le champ électromagnétique. On est amené à rajouter à ces équations des relations qui permettent de décrire la nature du milieu dans lequel les phénomènes se produisent. Ce sont les lois de comportement, qui relient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ d'une part, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{H}$ d'autre part. Nous nous restreindrons ici au cas de milieux *parfaits*, dans lesquels les lois de comportement sont *linéaires* et *isotropes*.

- Par milieu *parfait*, on entend que la loi reliant l'induction électrique $\mathcal{D}$ (resp. l'induction magnétique $\mathcal{B}$) au champ électrique $\mathcal{E}$ (resp. au champ magnétique $\mathcal{H}$) est locale en espace et en temps : $\mathcal{D}(\mathbf{x}, t)$ ne dépend que de $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$.
- L'hypothèse *d'isotropie* signifie que la loi reliant $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{B}$) à $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{H}$) est indépendante de la direction de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{B}$).
- Enfin, cette loi est *linéaire*, ce qui est toujours justifié lorsqu'on considère des champs d'intensité "suffisamment faible" (un développement de Taylor à l'ordre 1 est donc valable).

Ainsi, pour un tel milieu, les relations s'écrivent :

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon(\mathbf{x}) \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(\mathbf{x}, t) = \mu(\mathbf{x}) \mathcal{H}(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

où ε et μ désignent respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du milieu considéré. On peut donc par exemple réécrire les relations (1-4) en fonction de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ uniquement (chapitre 1), ou de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ uniquement (chapitre 2).

Lorsque le milieu est au surplus *homogène*, ε et μ sont constantes. Il est à noter que le vide est un cas particulier de milieu parfait, isotrope, homogène et isolant. C'est essentiellement dans ce cas que nous travaillerons. La permittivité électrique et la perméabilité magnétique dans le vide sont notées ε_0 ($\varepsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1}$) et μ_0 ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$), et on a la relation $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$, où $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ désigne la vitesse de la lumière.

Il faut également décrire les propriétés de conduction du milieu, à l'aide d'une relation entre la densité de courant $\mathcal{J}$ et le champ électrique $\mathcal{E}$. Si le milieu considéré est *conducteur*, la loi d'Ohm est vérifiée, soit :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = \sigma(\mathbf{x}) \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) , \quad (6)$$

où σ est appelée conductivité. Lorsqu'un milieu est *isolant*, on a $\sigma = 0$, et donc $\mathcal{J} = 0$, autrement dit, il n'y a pas de courant électrique circulant dans ce milieu. Nous rencontrerons souvent dans la suite le cas d'un *conducteur parfait*, c'est-à-dire dans lequel la conductivité est (supposée) infinie : les champs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ y sont nuls.

Pour conclure cette introduction, mentionnons le cas important où l'on cherche des solutions particulières des équations de Maxwell (1-4), dont la dépendance en temps est harmonique : c'est le cas du régime périodique établi. Ces solutions particulières, harmoniques en temps, sont de la forme

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}(\mathbf{e}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)) ,$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}(\mathbf{h}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)) ,$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}(r(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)) ,$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}(\mathbf{j}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)) .$$

On obtient alors pour les équations de Maxwell, à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^3$

$$i\omega \varepsilon \mathbf{e} - \text{rot } \mathbf{h} = -\mathbf{j} , \quad (7)$$

$$i\omega \mu \mathbf{h} + \text{rot } \mathbf{e} = 0 , \quad (8)$$

$$\text{div}(\varepsilon \mathbf{e}) = r , \quad (9)$$

$$\text{div}(\mu \mathbf{h}) = 0 . \quad (10)$$

Dans le chapitre suivant, nous allons voir plusieurs exemples d'applications de ces différentes formes d'équations.

Chapitre 1

Quelques exemples d'applications des équations de Maxwell

Les applications industrielles pour lesquelles sont utilisées les équations de Maxwell, ou des modèles dérivés de ces équations, sont nombreuses et variées. On va en présenter ici quelques exemples ainsi que les modèles associés. En ce sens, ce n'est pas un cours de mathématiques ou de physique, mais un cours de modélisation. Pour certains modèles, on considérera des applications précises, et parfois même des résultats numériques de simulation. Si le choix des exemples est arbitraire, l'ordre de la présentation suit une certaine structure. Ainsi, nous commencerons par présenter des exemples de problèmes généraux, en ce sens qu'ils dépendent explicitement du temps : ce sont les problèmes d'évolution, de type hyperbolique. Dans une seconde section, nous examinerons quelques exemples de modèles dans lesquels il n'y a pas de dépendance explicite du temps : ce sont des modèles statiques, de type elliptique. Nous consacrerons la section suivante à la présentation de quelques modèles intermédiaires, obtenus à l'aide d'approximations souvent liées à un développement asymptotique. Suivant l'ordre du développement asymptotique retenu, on verra apparaître des problèmes de nature elliptique, parabolique ou hyperbolique. Enfin, la dernière section sera consacrée à des exemples stationnaires, pour lesquels la dépendance en temps est connue et possède une forme particulière (en $\exp(i\omega t)$).

1.1 Les problèmes d'évolution

1.1.1 Problèmes de propagation

Exemple en domaine intérieur : un guide d'ondes "à stubs"

On se propose de déterminer le champ électromagnétique $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ qui se propage dans un guide d'ondes, dans le vide, c'est-à-dire dans un domaine borné suivant les 2 directions transverses à la direction de propagation (voir par exemple la figure 1.1).

Dans le cas où la dépendance en temps est spécifiée et connue (en général, en $\exp(i\omega t)$), l'étude de ces phénomènes peut être effectuée en résolvant le système d'équations stationnaires (voir section 1.4). Mais souvent, l'onde incidente qui se propage dans le guide est transitoire, et le modèle d'équations à utiliser est celui des équations de Maxwell (1-4), qui s'écrivent dans le vide

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - c^2 \operatorname{rot} \mathcal{B} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{J}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathcal{E} = 0, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{R}, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0. \quad (1.4)$$

Pour modéliser les bords physiques du guide, on utilise des conditions aux limites. Dans ce cas, il s'agit des conditions aux limites de conducteur parfait, qui simulent la présence d'un bord métallique parfaitement conducteur, et qui s'énoncent

$$\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur le bord du domaine} \quad (1.5)$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale unitaire sortante à la frontière du domaine. En d'autres termes, les composantes tangentielles du champ électrique $\mathcal{E}$ s'annulent au bord. Dans les cas de guides d'ondes à géométrie très simple (section circulaire ou rectangulaire), et pour une onde incidente dont la dépendance en temps est en $\exp(i\omega t)$, $\omega > 0$ fixé, on peut facilement calculer des solutions analytiques de ce problème (en résolvant des problèmes spectraux, ce qui détermine des modes, comme les modes TE, TM, TEM, etc. voir entre autres [46], [51, Chapitre X]). Dans les cas plus réalistes, ce n'est évidemment pas possible, et on a recourt à un calcul numérique. Très souvent, du fait de l'aspect propagatif du phénomène que l'on modélise, on résout ce problème réécrit sous forme de deux équations des ondes en $\mathcal{E}$ et en $\mathcal{B}$ (on découple ainsi le problème). Dans l'exemple que nous présentons ici, ce guide d'onde en forme de peigne est en fait un filtre en fréquence (utilisé par exemple dans des satellites) et qu'on désire miniaturiser. Nous présentons sur la figure 1.2 le résultat d'une simulation obtenue pour ce type de géométrie. On peut remarquer dès à présent que l'existence d'arêtes dans la géométrie de ce guide, nous amènera à être confronté à un problème de champs singuliers.

Exemple en domaine extérieur : un dispositif sélectif en fréquence

On va voir maintenant un second cas de propagation d'ondes dans le vide, mais cette fois-ci en domaine extérieur. Il s'agit de la transmission d'une onde (plane) incidente à travers une plaque perforée, d'épaisseur finie, non négligeable devant la longueur d'onde (cf. figure 1.3).

Ce dispositif, suivant la taille et la répartition des trous, laissera passer certaines fréquences, et en arrêtera d'autres. En général, on cherche à calculer la part d'énergie transmise par rapport à celle qui est diffractée ou réfléchi. Le signal incident (en temps) aura un spectre (en fréquence) correspondant à la plage de fréquence que l'on veut analyser. Là encore, on résout le système des équations de Maxwell, mais pour une onde provenant de l'infini. Une des difficultés numériques de ce type calcul est qu'il faut convenablement "clore" le domaine, c'est-à-dire mettre la plaque dans une boîte qui limite le domaine dans lequel on effectue le calcul. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 3, consacré aux méthodes numériques.

Remarque 1.1.1 *Là encore, on pourrait résoudre la forme stationnaire (i.e. en fréquence) des équations de Maxwell. Mais cela nécessiterait de faire autant de calculs que de fréquences ω que l'on veut examiner. L'approche en temps est, en ce sens, plus globale et plus efficace.*

Cet exemple est l'occasion d'introduire dès à présent le vecteur $\mathbf{S}$, appelé vecteur de Poynting, défini par

$$\mathbf{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H},$$

et qui permet de mesurer l'énergie électromagnétique transmise. Ce vecteur peut s'interpréter comme le vecteur flux de l'énergie électromagnétique. On définit également le flux d'énergie entrant (+) ou sortant (−) dans un volume D de bord ∂D par

$$\pm \int_{\partial D} (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma,$$

ainsi que le coefficient de transmission

$$\tau = \frac{\int_{\Gamma_s} (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma}{\int_{\Gamma_e} (\mathcal{E}_i \times \mathcal{H}_i) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma},$$

où Γ_e est la surface entrante, Γ_s la surface sortante, et où l'indice i désigne les champs incidents. On a représenté sur la figure 1.4 le coefficient de transmission calculé en fonction de la fréquence, pour un signal incident donné.

1.1.2 Exemples de problèmes couplés

Les équations de Maxwell-Vlasov

Considérons un ensemble de particules de charge e et de masse m . Il est bien connu qu'une particule chargée en mouvement crée un champ électromagnétique. Réciproquement, un champ électromagnétique a une action sur le mouvement des particules chargées : la force de Lorentz, d'expression $\mathbf{F} = e (\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(t) \times \mathcal{B}(\mathbf{x}, t))$ agit sur les particules ($\mathbf{v}(t)$ désigne la vitesse de la particule). Si on désigne par $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ la trajectoire d'une particule, l'expression de la charge et du courant correspondants sont

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}, t) = e \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = e \mathbf{v}(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)),$$

où $\delta(\mathbf{x}_0)$ est la masse de Dirac en $\mathbf{x}_0$. De même, le champ électromagnétique créé par le mouvement de N particules chargées a pour source les densités de charge et de courant

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N e \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N e \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)).$$

Si on considère maintenant le cas d'un ensemble de particules, décrites par une fonction de distribution (également appelée fonction de représentation ou probabilité de présence) $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, on a cette fois les relations

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{x}, t) &= e \int_{\mathbb{R}_v^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \, d\mathbf{v} \\ \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) &= e \int_{\mathbb{R}_v^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} \, d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

La fonction $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ vérifie une équation de transport, dite équation de Vlasov

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + \frac{e}{m} (\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathcal{B}(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla_v f = 0.$$

On a utilisé ci-dessus le principe fondamental de la dynamique, c'est-à-dire

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Le couplage entre l'équation de Vlasov et les équations de Maxwell (entre f d'une part, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$ d'autre part) introduit évidemment une non-linéarité. Comme exemple d'application du système de Maxwell-Vlasov, nous présentons un cas de klystron, dont une géométrie type est représentée sur la figure 1.5. Le principe est le suivant : on accélère, à l'aide d'un champ électromagnétique extérieur, des paquets de particules (représentés en noir sur la figure 1.6) qui libèrent de l'énergie lors de leur passage devant la cavité. Ainsi, on peut voir, en point de la cavité, l'amplification (d'une composante) du champ électrique en fonction du temps (voir la figure 1.7).

Les équations de la Magnéto-HydroDynamique (MHD)

La Magnéto-HydroDynamique (MHD) est l'étude de l'écoulement d'un plasma (c'est-à-dire d'un fluide compressible, *conducteur*) soumis à un champ électromagnétique. Les exemples sont très nombreux et concernent des échelles de phénomènes très variées (de l'entrée d'une comète dans l'atmosphère à un commutateur à plasma). En général, il s'agit de coupler les équations fluides (par exemple de la dynamique des gaz) qui sont typiquement

1. l'équation de conservation de la masse (ou de la densité),
2. l'équation de conservation de la quantité de mouvement,
3. l'équation de conservation de l'énergie,

avec les équations de Maxwell, dans lesquelles on néglige le courant dit de déplacement $1/c^2 \partial_t \mathcal{E}$. On arrive ainsi à éliminer le champ $\mathcal{E}$ à l'aide de la loi d'Ohm (6) dans l'expression de la force, dans les équations de la MHD. Cela devient rapidement très compliqué. Nous renvoyons l'étudiant intéressé aux deux ouvrages de références [21] et [48].

1.1.3 Formulation en potentiels des équations

Pour conclure cette section, nous allons présenter une autre formulation possible des équations de Maxwell. Pour simplifier, on se place dans le vide : on prend donc les équations de Maxwell formulées en (1.1-1.4). On utilise tout d'abord la propriété selon laquelle le champ $\mathcal{B}$ est à divergence nulle. Ainsi, il existe un potentiel vecteur $\mathcal{A}$ tel que

$$\mathcal{B} = \text{rot } \mathcal{A} .$$

Avec la loi de Faraday (1.2), on en déduit que

$$\text{rot} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \mathcal{E} \right) = 0 .$$

Il existe donc un potentiel scalaire ϕ tel que

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \mathcal{E} = -\text{grad } \phi .$$

On obtient ainsi une formulation en variables $(\mathcal{A}, \phi)$ appelées respectivement potentiels vecteur et scalaire, vérifiant

$$\mathcal{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} , \tag{1.6}$$

$$\mathcal{B} = \text{rot } \mathcal{A} . \tag{1.7}$$

L'intérêt de cette formulation est qu'elle porte sur 4 inconnues ($\mathcal{A}$ et ϕ), au lieu de 6 ($\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$). La difficulté tient au fait que l'équation (1.7) ne détermine $\mathcal{A}$ qu'au gradient d'une fonction scalaire arbitraire près. Il y a alors plusieurs façons de lever cette indétermination. Nous allons présenter les deux plus classiques. Pour des fonctions $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ données par (1.6) et (1.7), les équations (1.2) et (1.4) sont automatiquement satisfaites. On reporte alors ces expressions dans les équations (1.1) et (1.3), et on utilise l'identité

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} - \mathbf{grad} \operatorname{div} \equiv -\Delta .$$

On obtient

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathcal{A} + \mathbf{grad} (c^2 \operatorname{div} \mathcal{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{J} , \quad (1.8)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathcal{A}) - \Delta \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{R} . \quad (1.9)$$

Ces équations font apparaître de façon naturelle deux conditions qui permettent de lever l'indétermination.

1. Condition (ou jauge) de Lorentz :

On choisit un couple $(\mathcal{A}, \phi)$ qui annule le terme "dans le gradient" de l'équation (1.8), soit

$$c^2 \operatorname{div} \mathcal{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 . \quad (1.10)$$

de sorte que les équations (1.8-1.9) s'écrivent alors

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathcal{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{J} , \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \phi = \frac{c^2}{\varepsilon_0} \mathcal{R} . \quad (1.12)$$

Il faut cependant remarquer que $(\mathcal{A}, \phi)$ solutions de (1.11-1.12) ne sont pas définis de manière unique, pour $\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$ donnés. En effet, il suffit de considérer F vérifiant

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \Delta F = 0 .$$

Alors, le couple $(\mathcal{A}', \phi')$ défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &:= \mathcal{A} + \mathbf{grad} \frac{\partial F}{\partial t} \\ \phi' &:= \phi - c^2 \Delta F \end{aligned}$$

vérifie également les équations (1.10) et (1.11-1.12). Il n'y a donc pas unicité de la solution. Cette jauge est cependant souvent utilisée d'une part, parce qu'elle conduit à résoudre une équation des ondes tant pour $\mathcal{A}$ que pour ϕ , et d'autre part, parce que c'est un concept indépendant du système de coordonnées choisi, ce qui est très utile pour des problèmes liés à la théorie de la relativité.

2. Condition (ou jauge) de Coulomb :

Une autre solution naturelle consiste à annuler le premier terme de l'équation (1.9).

On choisit alors $\mathcal{A}$ tel que

$$\operatorname{div} \mathcal{A} = 0 .$$

Les équations (1.8-1.9) s'écrivent alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathcal{A} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{J} - \mathbf{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \\ \Delta \phi &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{R}.\end{aligned}$$

L'intérêt de ce choix de jauge est que ϕ et $\mathcal{R}$ sont reliés par une équation statique (mais ϕ et $\mathcal{R}$ peuvent dépendre du temps).

On utilise souvent ce modèle lorsqu'il n'y a pas de charges. Dans ces conditions (l'hypothèse d'un problème posé dans l'espace tout entier devient ici cruciale), on choisit $\phi = 0$ comme solution (définie à une constante près). Ainsi $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ vérifient dans ce cas

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}, \quad \mathcal{B} = \mathbf{rot} \mathcal{A}, \quad \text{avec } \operatorname{div} \mathcal{A} = 0.$$

Remarque 1.1.2 *Les calculs présentés ici de façon formelle se justifient simplement pour des problèmes posés dans tout l'espace. Par contre, il apparait des difficultés dans le cas d'un domaine Ω borné, essentiellement dans la détermination des conditions aux limites que doivent vérifier les potentiels $(\mathcal{A}, \phi)$ à partir de celles vérifiées par les champs $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$.*

1.2 Les problèmes statiques

¹ La présentation ci-dessus a l'intérêt d'introduire naturellement (en imposant $\partial_t \cdot = 0$) les problèmes statiques. C'est l'objet de cette section. On va s'intéresser maintenant à des problèmes (et à des solutions) qui sont indépendantes du temps : autrement dit on impose $\partial_t \cdot = 0$ dans les équations de Maxwell. On obtient ainsi, dans le cas avec charges

$$\begin{aligned}\mathbf{rot} \mathcal{E} &= 0, & \mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathcal{B} &= \mathcal{J}, \\ \operatorname{div} (\varepsilon \mathcal{E}) &= \mathcal{R}, & \operatorname{div} \mathcal{B} &= 0.\end{aligned}$$

1.2.1 Electrostatique

De l'équation $\mathbf{rot} \mathcal{E} = 0$, on déduit que $\mathcal{E} = -\mathbf{grad} \phi$, où ϕ représente le (très classique) potentiel électrostatique. Comme $\operatorname{div} (\varepsilon \mathcal{E}) = \mathcal{R}$, ϕ est solution du problème elliptique

$$\begin{aligned}-\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{grad} \phi) &= \mathcal{R}, \\ &+ \text{condition aux limites.}\end{aligned}$$

De plus, lorsque ε est indépendant de $\mathbf{x}$ (en particulier dans le vide), on retrouve le système d'équations, dont la solution $\mathcal{E}$ est le champ électrostatique

$$\begin{aligned}-\Delta \phi &= \frac{\mathcal{R}}{\varepsilon}, \\ \mathcal{E} &= -\mathbf{grad} \phi, \\ &+ \text{condition aux limites.}\end{aligned}$$

C'est le modèle de Poisson en ϕ (voir par ex. [32, Tome II, Chapitre 3]), qui est de nature elliptique, indépendant du temps par définition, et bien plus simple (et bien moins couteux numériquement) à résoudre que le système complet des équations de Maxwell.

¹Noter $_{stat}$ ou stat pour $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$, ϕ , etc.

Remarque 1.2.1 Dans le cadre du régime périodique établi (voir l'introduction), on cherche des solutions particulières, harmoniques en temps, et les équations de Maxwell s'expriment alors sous la forme (7-10). Les équations statiques peuvent être vues comme des équations harmoniques à fréquence nulle, soit $\omega = 0$. Ce point de vue peut être utile (souvent pour une analyse asymptotique), mais ce n'est pas "physique".

Un exemple d'application : la C.D.A.

Parmi les nombreux exemples d'applications (industrielles) de ce modèle, prenons celui de l'analyse de la distribution des charges [10] (Charge Distribution Analysis, d'où C.D.A.). Le but est d'analyser la charge électrique présente dans un isolant, afin de mesurer la qualité d'isolation de ce matériau. Ceci se fait à partir de la mesure de la force à laquelle il est soumis, lorsqu'il est plongé dans un champ électrique non uniforme (voir la planche 1.8).

Le principe tient en trois points

1. On mesure la force $\mathbf{F}$ résultante, lorsque le diélectrique considéré D , de permittivité (ε_D), est plongé dans un champ électrique,
2. on calcule numériquement le potentiel ϕ puis le champ $\mathcal{E}$, avec le modèle électrostatique, pour un ε_D donné,
3. avec une formule du type

$$\mathbf{F} = \varepsilon_D \int_{\partial D} [(\mathcal{E} \cdot \mathbf{n})\mathcal{E} - 1/2|\mathcal{E}|^2\mathbf{n}] d\gamma ,$$

on en déduit la force $\mathbf{F}$ en fonction de $\mathcal{E}$, que l'on compare à des mesures expérimentales sur des échantillons (point 1).

Nous présentons sur la figure 1.9 un exemple de résultat.

1.2.2 Magnétostatique

De façon analogue, on peut écrire un problème statique pour le champ magnétique $\mathcal{B}$. En prenant le rotationnel de l'équation $\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathcal{B} \right) = \mathcal{J}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathcal{B} &= \mathbf{rot} \mathcal{J} , \\ \mathbf{div} \mathcal{B} &= 0 . \end{aligned}$$

Dans le cas où μ est indépendant de $\mathbf{x}$, par exemple si $\mu = \mu_0$, et en utilisant à nouveau l'identité

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} - \mathbf{grad} \mathbf{div} \equiv -\Delta ,$$

on a alors le modèle suivant, dont la solution est le champ magnétostatique $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} -\Delta \mathcal{B} &= \mu_0 \mathbf{rot} \mathcal{J} , \\ &+ \text{condition aux limites.} \end{aligned}$$

1.3 Quelques modèles "intermédiaires"

De nombreux problèmes que l'on rencontre aujourd'hui dans les applications font appel au modèle complet des équations de Maxwell. Dans certains cas cependant, seule une partie de la solution est significative, l'autre partie étant négligeable, au vu des échelles des

phénomènes physiques étudiés. Ainsi, on utilise un modèle statique lorsqu'on s'intéresse à une échelle de temps qui justifie l'approximation $\partial_t \cdot = 0$, et qui "correspond" à des variations lentes en temps, c'est-à-dire à des phénomènes basse fréquence. Nous allons un peu préciser tout ceci.

1.3.1 Une hiérarchie de modèles approchés

En suivant cette idée, on peut construire, à partir d'un développement asymptotique des équations de Maxwell, une suite de modèles qui approchent (en un sens à définir) le modèle complet d'équations [65]. C'est pourquoi on les appelle des modèles intermédiaires. A chaque fois que l'on ajoute un terme supplémentaire dans le développement, on obtient un modèle d'ordre supérieur. Ce principe n'est pas nouveau. On en trouve une utilisation (par exemple!) dans la construction de modèles dits paraxiaux, en géophysique, pour la migration de données sismiques (voir en autres [12], [25]). En pratique, ces modèles intermédiaires n'ont d'intérêt que si ils correspondent d'une part à une approximation physique, et si, d'autre part, ils sont plus simples à résoudre que le modèle complet. Dans cette section, on va construire (formellement) un ensemble de modèles basés sur une analyse asymptotique des équations de Maxwell. On va comme cela retrouver les modèles statiques, mais aussi d'autres modèles... intermédiaires. On considère les équations de Maxwell dans le vide (1.1-1.4). On commence par effectuer une mise à l'échelle de ces équations, avec les facteurs d'échelles suivants :

$$\begin{aligned} \bar{l} &: \text{longueur caractéristique ,} \\ \bar{v} &: \text{vitesse caractéristique, avec } \bar{t} = \bar{l}/\bar{v}, \\ \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{B}} &: \text{facteur d'échelle pour } \mathcal{E} \text{ et } \mathcal{B}. \end{aligned}$$

On suppose que $\bar{v}$, la vitesse caractéristique du phénomène étudié, est petite devant c . On introduit alors un petit paramètre η défini par

$$\eta = \frac{\bar{v}}{c} \ll 1.$$

Cette hypothèse est souvent appelée "hypothèse basse fréquence", car elle suppose des variations lentes en temps, qui correspondent, dans le domaine de Fourier, à des phénomènes basses fréquences. On choisit alors $\bar{\mathcal{E}} = c\bar{\mathcal{B}}$, $\bar{\mathcal{J}} = c\bar{\mathcal{R}}$, $\bar{\mathcal{E}} = \frac{\bar{l}\bar{\mathcal{R}}}{\varepsilon_0}$, et on effectue le changement de variables

$$\mathbf{x} = \bar{l}\mathbf{x}', \quad t = \bar{t}t', \quad \text{etc.}$$

de sorte que les équations de Maxwell adimensionnées s'écrivent (en supprimant les ') :

$$\begin{aligned} \eta \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \mathbf{rot} \mathcal{B} &= -\mathcal{J}, \\ \eta \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathcal{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathcal{E} &= \mathcal{R}, \\ \operatorname{div} \mathcal{B} &= 0. \end{aligned}$$

On reconnaît alors le modèle statique pour $\eta = 0$ dans ces équations, qui apparaît donc comme une approximation d'ordre 0. En suivant la même idée, on va, dans la section suivante, faire un peu mieux.

1.3.2 Le modèle quasiélectro/magnétostatique

Lorsqu'on ne peut négliger que le terme $\partial_t \mathcal{B}$ dans l'équation de Faraday, on obtient le modèle quasiélectrostatique : on distingue ici le $\eta \mathcal{E}$ devant $\partial_t \mathcal{E}$ du $\eta \mathcal{B}$ devant $\partial_t \mathcal{B}$, en supposant uniquement que $\eta \mathcal{B} = 0$.

De même, si on ne peut négliger que le terme $\partial_t \mathcal{E}$ (ce qui revient à supposer que le courant de déplacement est négligeable par rapport au courant induit), on obtient le modèle quasimagnétostatique. Une application très fréquente est le calcul des courants induits dans un matériau (ou courants de Foucault) (par exemple [15]). Dans ce cas, on dispose de la relation supplémentaire $\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$, de sorte que $\mathcal{B}$ peut être écrit comme la solution d'une équation parabolique. On va détailler ce point lors d'un exemple particulier dans la section 1.3.4.

A priori, on ne voit pas de différence entre le modèle statique (cf. section 1.2) et le modèle quasi-statique (c'est-à-dire quasiélectrostatique ou quasimagnétostatique). Ce modèle est généralement appelé statique lorsque le (ou les) second(s) membre(s) ne dépendent pas du temps, et quasi-statique autrement. En fait, l'indépendance des seconds membres par rapport au temps résulte de l'indépendance du champ électromagnétique par rapport au temps.

Prenons l'exemple du modèle quasi-électrostatique ($\partial_t \mathcal{B} \simeq 0$). Le second membre $\mathcal{R}$ de l'équation de Poisson dépend explicitement du temps, étant relié à $\mathcal{E}$ par $\text{div}(\varepsilon \mathcal{E}) = \mathcal{R}$. Avec l'hypothèse supplémentaire $\partial_t \mathcal{E} = 0$, $\mathcal{R}$ est indépendant du temps et le problème quasi-statique devient un problème statique.

D'un point de vue numérique, cette remarque va au-delà d'une simple question de terminologie. En effet, lorsque l'on s'intéresse à un problème quasi-statique, la dépendance en temps du second membre requiert une suite de résolution de problèmes statiques au cours du temps.

Une autre différence importante provient de la condition aux limites. En fait, le terme $\partial_t \mathcal{B}$ est négligeable, mais non nul. On peut donc prendre la trace normale sur le bord conducteur parfait de l'équation $\eta \mathcal{B} \partial_t \mathcal{B} + \mathbf{rot} \mathcal{E} = 0$. On peut vérifier (voir remarque 2.3.2), à partir de la condition aux limites $\mathcal{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_C} = 0$ que l'on obtient $\eta \mathcal{B} \partial_t \mathcal{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_C} = 0$, ce qui donne la condition aux limites $\mathcal{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_C} = 0$ si $\mathcal{B}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_C} = 0$. Il s'agit de la condition de conducteur parfait d'un problème quasi-statique, c'est-à-dire obtenu comme la limite en temps long d'un problème dépendant du temps. Par contre, pour un problème statique (par exemple en ferromagnétique), cette condition aux limites n'est pas valable, et on aura parfois une condition aux limites de nature totalement différente, de la forme $\mathcal{B} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_C} = 0$.

1.3.3 Le modèle de Darwin

On introduit une décomposition (de Helmholtz) du champ électrique $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^L + \mathcal{E}^T$$

où $\mathcal{E}^L$ est appelée partie longitudinale, caractérisée par $\mathbf{rot} \mathcal{E}^L = 0$, et $\mathcal{E}^T$ est appelée partie transverse, caractérisée par $\text{div} \mathcal{E}^T = 0$.

On néglige la partie transverse du courant de déplacement, c'est-à-dire $\eta \partial_t \mathcal{E}^T$, et on ne conserve que le terme en $\eta \partial_t \mathcal{E}^L$. On obtient alors le modèle de Darwin

$$-\Delta \phi = \mathcal{R}, \quad \mathcal{E}^L = -\mathbf{grad} \phi,$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathcal{B} = \mathbf{rot} \mathcal{J},$$

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0 ,$$

$$\mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathcal{E}^T = -\eta \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{rot} \mathcal{B} ,$$

$$\operatorname{div} \mathcal{E}^T = 0 ,$$

ce qui revient à résoudre 3 problèmes elliptiques. C'est l'intérêt de ce modèle simplifié, puisqu'il n'y a plus de problèmes dépendant explicitement du temps ($\partial_t \mathbf{rot} \mathcal{B}$ est un second membre, c'est-à-dire une donnée). Dans ces conditions, on peut utiliser un pas de discrétisation en temps assez grand, qui correspond bien à l'échelle du phénomène physique étudié.

A contrario, résoudre un problème qui dépendrait explicitement du temps, nécessiterait

- soit un pas de discrétisation en temps très petit (contrainte de stabilité de type CFL), si on choisit d'utiliser un schéma de discrétisation explicite,
- soit l'inversion d'un système linéaire à chaque pas de temps, si on choisit d'utiliser un schéma implicite.

La difficulté, dans la mesure où ce modèle est justifié, reste la prise en compte des conditions aux limites, qui n'est pas évidente, car il faut partager celle qui porte sur $\mathcal{E}$ en deux (cf. [31]).

Un exemple d'application : l'instabilité de Weibel

Il s'agit d'un exemple d'instabilité dans un plasma magnétisé, dénommée instabilité de Weibel [69], qui se produit en présence d'une distribution anisotrope des vitesses pour les électrons dans un plasma homogène, sans collisions. Cette instabilité est entièrement de nature électromagnétique, et met en jeu des phénomènes assez basses fréquences. En la simulant à l'aide d'un code de calcul construit sur le modèle de Darwin [67], on observe l'apparition au cours du temps de cette instabilité (voir la figure 1.10). Ainsi, ce modèle semble bien adapté à l'étude de ce type de problème.

1.3.4 Induction magnétique dans un plasma

On cherche à déterminer l'induction magnétique dans un tokamak, c'est-à-dire un tore dans lequel circule un plasma confiné par un champ magnétique, ce qui induit une création d'énergie. On considère les équations de Maxwell écrites dans un milieu (qui n'est pas le vide, d'où l'utilisation de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{H}$), soit

$$-\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathcal{H} = \mathcal{J} \quad \text{avec} \quad \mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}.$$

On suppose que le courant de déplacement est négligeable par rapport au courant induit, ce qui permet de négliger le terme en $\partial_t \mathcal{D}$. On obtient alors

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathcal{H} = \mathcal{J} \\ \mathcal{B} = \mu \mathcal{H} \\ \mathcal{J} = \sigma \mathcal{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathcal{B} = \sigma \mathcal{E}.$$

Ainsi, l'équation $\partial_t \mathcal{B} + \mathbf{rot} \mathcal{E} = 0$ devient

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathcal{B} \right) \right) = 0 ,$$

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0 .$$

Si μ et σ sont indépendants de la variable d'espace $\mathbf{x}$, on a

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathcal{B} = 0.$$

On retrouve ici une équation de la diffusion (de type parabolique) analogue à une équation de la chaleur. Toujours dans le cas où μ est constante, on peut également voir cette équation comme une équation des ondes amorties en $\mathcal{B}$, dans laquelle on a négligé le terme en $\varepsilon\mu \partial_{t^2}^2 \mathcal{B}$, par exemple parce que ε est petit devant le reste. En effet, avec

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon\mu \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \mu\sigma \mathcal{E} + \operatorname{rot} \mathcal{B} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathcal{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} - \Delta \mathcal{B} = 0,$$

d'où le résultat.

1.4 Les problèmes stationnaires ou "en fréquence"

On s'intéresse maintenant aux solutions particulières (déjà évoquées dans l'introduction) dont la dépendance en temps est de la forme $\exp(i\omega t)$.

1.4.1 Les problèmes extérieurs

Pour une onde incidente donnée, provenant de l'infini, on cherche à calculer l'effet de cette onde sur un objet (et réciproquement). Ce type de problème se divise essentiellement en deux grandes catégories. La première, qui représente environ 30% des problèmes rencontrés, est constituée par le

Calcul de la Signature Electromagnétique Radar (S.E.R.)

On cherche à déterminer le champ diffracté par un objet (avion, etc.). En général, on émet, donc on connaît l'onde incidente, et c'est pourquoi on utilise souvent la décomposition du champ total en

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^i + \mathcal{E}^d$$

où les indices i et d désignent respectivement les champs incident (en l'absence d'objet) et diffracté (par l'objet). L'objet diffractant ayant souvent une géométrie complexe, on préfère l'éclairer avec une onde incidente haute fréquence (ω grand, fixé), et ce, pour deux raisons.

1. On utilise la propriété qu'une antenne (source de l'onde incidente) est d'autant plus directive que le signal qu'elle émet est haute fréquence. Ainsi, on cible mieux (le morceau de) l'objet que l'on désire éclairer.
2. Un signal haute fréquence n'éclairant qu'une petite partie d'un objet, on sait reconstruire l'ensemble de la géométrie d'un objet de forme complexe, à partir d'algorithmes de reconstruction par morceaux. Ce serait beaucoup plus difficile, voire impossible, à partir d'une émission basse fréquence qui éclairerait plus globalement l'ensemble de cet objet.

On peut ainsi faire l'approximation hautes fréquences et utiliser les expressions (7-10) des équations. On va chercher à ne calculer que la partie diffractée $\mathcal{E}^d$ du champ électrique. Un point important est le matériau de surface de l'objet diffractant, puisqu'il détermine la condition aux limites à imposer sur l'objet, ainsi,

- pour un matériau métallique, on applique une condition aux limites de conducteur parfait, du type $\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0$,
- pour un autre matériau, ce sera une condition d'impédance, du type $\mathbf{n} \times \mathcal{E} + Z_s \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathcal{H}) = 0$, où $Z_s \in \mathbb{C}$ désigne l'impédance surfacique du matériau.

Du fait qu'on travaille avec un modèle en fréquence des équations posé en domaine extérieur, on est confronté au problème d'unicité de la solution. Pour sélectionner une solution, on doit ajouter une condition de radiation en l'infini. Il existe sur ce sujet une très vaste bibliographie. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage de référence [66], ainsi qu'à sa bibliographie.

La seconde grande famille d'applications de ces problèmes extérieurs en fréquence est constituée par

Les antennes

Un antenne est essentiellement une structure métallique, excitée par une source extérieure (une onde!) qui rayonne. Le cas le plus simple d'antenne est celui d'un fil vertical. Mais on peut bien sûr avoir des géométries beaucoup plus complexes (tournantes, etc., voir la figure 1.11).

Par contre, la condition aux limites sur cet "obstacle" sera toujours de type conducteur parfait. On cherche à calculer le courant circulant dans l'antenne. On s'appuie sur le principe de Huygens-Kirchoff (voir par ex. [46]), qui dit que "le champ électromagnétique rayonné est entièrement déterminé par les courants appliqués", c'est-à-dire une fois $\mathcal{J}$ connu, on peut calculer le champ diffracté en tout point. Le problème essentiel est donc le calcul de $\mathcal{J}$. Pour cela, il existe bon nombre d'approximations qui sortent du cadre de ce cours, la plus simple étant l'approximation filaire. Nous renvoyons l'étudiant intéressé à [9], [49].

Pour conclure ce rapide survol concernant des exemples d'applications des équations de Maxwell, on va regarder maintenant un exemple qui utilise un modèle en fréquence, dans le cadre des problèmes intérieurs.

1.4.2 Les problèmes intérieurs

les lignes microrubans

Les lignes microrubans sont des guides d'ondes utilisés en microélectronique, pour confectionner des circuits planaires (dans le but de les miniaturiser) réalisant des fonctions données (amplification, filtrage, etc.). Une géométrie type est donnée par la figure 1.12. Sur un plan de masse conducteur se trouve un substrat diélectrique, sur la surface duquel est posé une ligne conductrice. L'ensemble est enfermé dans un boîtier qui sert de blindage. Le guide est ainsi formé par la partie en dessous de la ligne. On suppose que la propagation se fait suivant la direction de l'axe x_3 , et est bornée dans les directions perpendiculaires. On note alors $\Omega_\perp \subset \mathbb{R}^2$ la section transverse de ce guide, dont on suppose, du fait du blindage, que la frontière est un conducteur parfait. Le milieu de propagation (qui n'est pas le vide) est ici caractérisé par sa permittivité diélectrique ε et sa perméabilité magnétique μ qui

respectent l'invariance du milieu par rapport à x_3 , soit :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{x}_\perp, x_3) &= \varepsilon(\mathbf{x}_\perp) , \\ \mu(\mathbf{x}_\perp, x_3) &= \mu(\mathbf{x}_\perp) ,\end{aligned}$$

où $\mathbf{x}_\perp$ désigne les variables transverses (x_1, x_2) . On cherche l'onde électromagnétique guidée qui se propage (sans atténuation) suivant la direction x_3 à la vitesse ω/k_3 , où ω désigne la fréquence et k_3 le nombre d'onde dans la direction x_3 . Il s'agit donc d'une solution particulière des équations de Maxwell de la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{x}_\perp, x_3, t) &= Re(\mathcal{E}(\mathbf{x}_\perp)e^{i(\omega t - k_3 x_3)}) , \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}_\perp, x_3, t) &= Re(\mathcal{H}(\mathbf{x}_\perp)e^{i(\omega t - k_3 x_3)}) .\end{aligned}$$

En tenant compte de la forme particulière de cette solution, on peut se ramener à la section transverse du guide $\Omega_\perp$, dans laquelle les inconnues sont $\mathcal{E}(\mathbf{x}_\perp)$ et $\mathcal{H}(\mathbf{x}_\perp)$, solutions de

$$\begin{aligned}i\omega\mu\mathcal{H} &= -\mathbf{rot}_{k_3}\mathcal{E} \quad \text{dans } \Omega_\perp , \\ i\omega\varepsilon\mathcal{E} &= \mathbf{rot}_{k_3}\mathcal{H} \quad \text{dans } \Omega_\perp ,\end{aligned}$$

où $\mathbf{rot}_{k_3}$ désigne l'opérateur rotationnel dans lequel on a transformé la dérivation ∂_3 en la multiplication par $-ik_3$.

cavité résonnante

On considère une cavité résonnante cubique de longueur L , c'est-à-dire un domaine borné Ω en forme de cube, dont la frontière Γ est un conducteur parfait. Les champs électromagnétiques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ sont des produits de fonctions sinus et cosinus dans chaque direction, car chaque composante est un mode propre de l'équation des ondes. Les équations de Maxwell et les conditions aux limites $\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0$ et $\mathcal{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ imposent donc

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \cos(\omega t) \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos(\frac{k_1 \pi x}{L}) \sin(\frac{k_2 \pi y}{L}) \sin(\frac{k_3 \pi z}{L}) \\ \lambda_2 \sin(\frac{k_1 \pi x}{L}) \cos(\frac{k_2 \pi y}{L}) \sin(\frac{k_3 \pi z}{L}) \\ \lambda_3 \sin(\frac{k_1 \pi x}{L}) \sin(\frac{k_2 \pi y}{L}) \cos(\frac{k_3 \pi z}{L}) \end{pmatrix} , \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{c} \sin(\omega t) \begin{pmatrix} \mu_1 \sin(\frac{k_1 \pi x}{L}) \cos(\frac{k_2 \pi y}{L}) \cos(\frac{k_3 \pi z}{L}) \\ \mu_2 \cos(\frac{k_1 \pi x}{L}) \sin(\frac{k_2 \pi y}{L}) \cos(\frac{k_3 \pi z}{L}) \\ \mu_3 \cos(\frac{k_1 \pi x}{L}) \cos(\frac{k_2 \pi y}{L}) \sin(\frac{k_3 \pi z}{L}) \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Les vecteurs $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ et le vecteur d'onde $\mathbf{k}\pi/L$ ($\mathbf{k}$ a des composantes entières) vérifient les équations de Maxwell sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\lambda} - \frac{\pi c}{\omega L} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\mu} = 0 , \\ \boldsymbol{\mu} + \frac{\pi c}{\omega L} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\lambda} = 0 , \\ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0 , \\ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu} = 0 . \end{array} \right.$$

En éliminant $\boldsymbol{\mu}$, on retrouve la relation de dispersion classique (voir par exemple [48], Introduction p. 9-10) :

$$\frac{\pi^2 |\mathbf{k}|^2}{L^2} = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.13)$$

Si cette relation est vérifiée, tout vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ tel que $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0$ est solution, et $\boldsymbol{\mu}$ s'en déduit facilement. On a ainsi accès aux solutions analytiques - les modes propres - de la cavité résonnante cubique.

Ces solutions peuvent permettre, par comparaison, de tester un code de calcul. Si ce dernier résout la forme instationnaire des équations de Maxwell, on peut initialiser, en $t = 0$, les champs $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{B}_0$ de manière aléatoire, en imposant cependant les conditions aux limites. En laissant évoluer la solution pendant un certain temps, puis en effectuant une transformée de Fourier sur les données enregistrées en fonctions du temps (en des points arbitrairement fixés), on obtient le spectre en fréquence, que l'on peut comparer aux solutions analytiques (voir des exemples dans [44]).

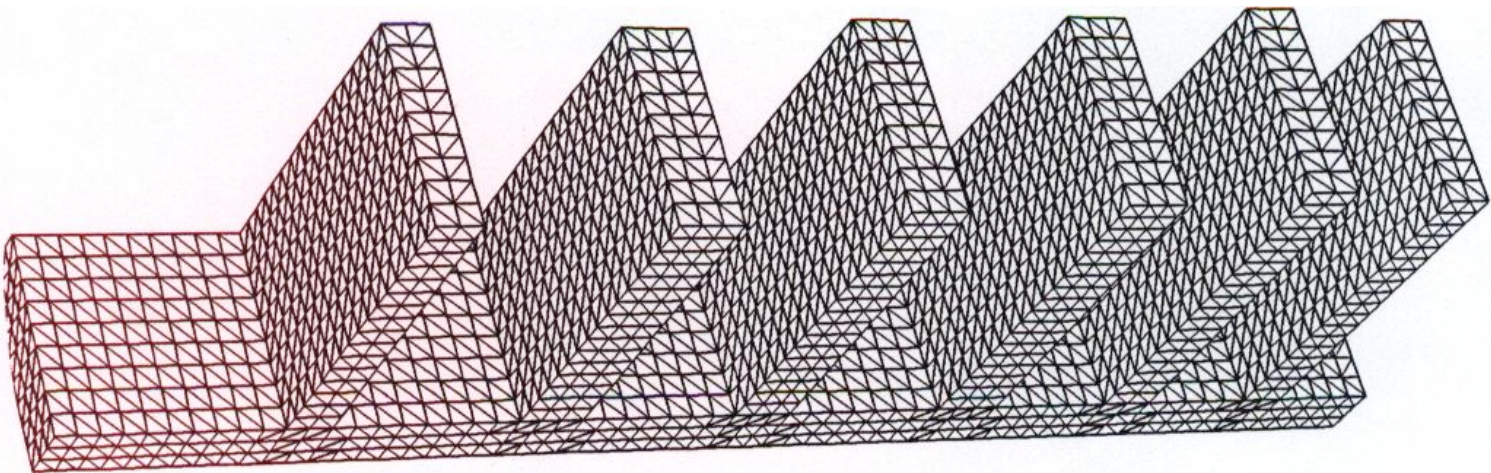


Figure 1.1 : Géométrie et maillage d'un filtre à stubs.

E_x

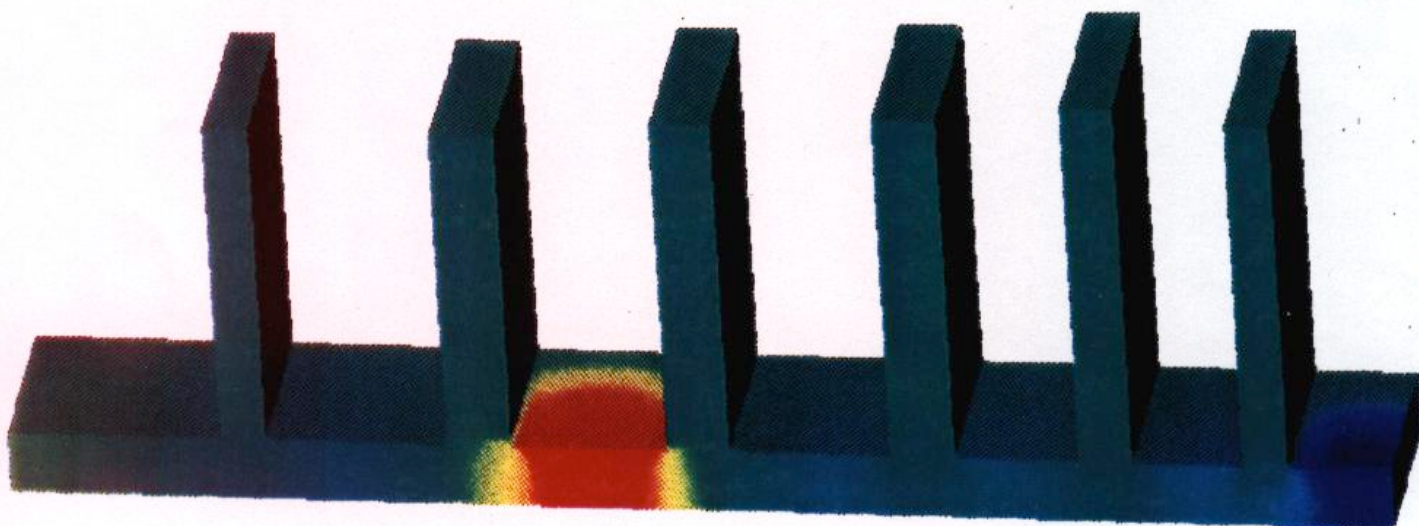


Figure 1.2 : Composante E_x du champ se propageant dans le guide.

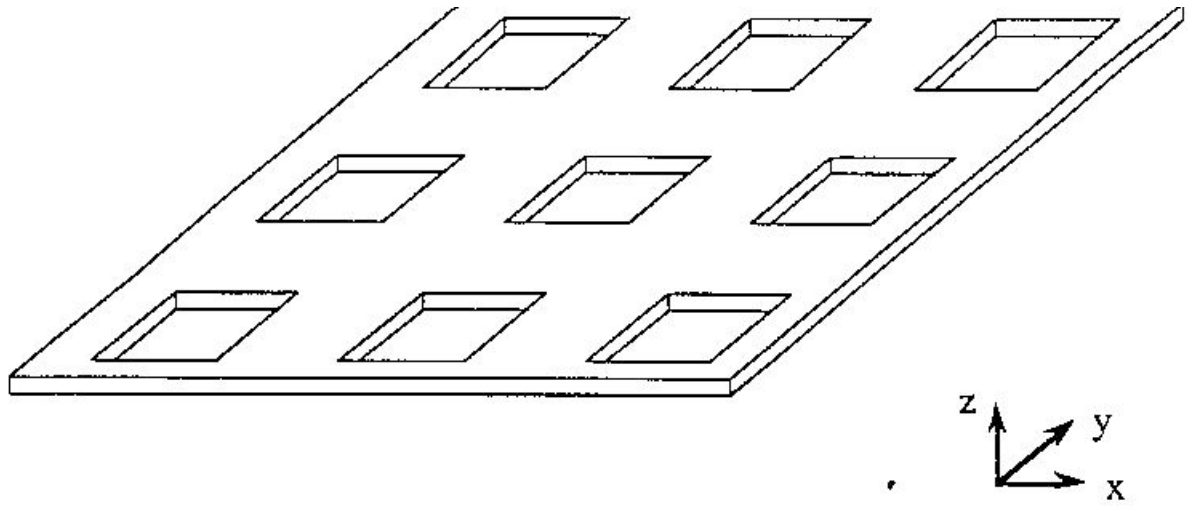


Figure 1.3 : Structure bi-périodique de la plaque perforée.

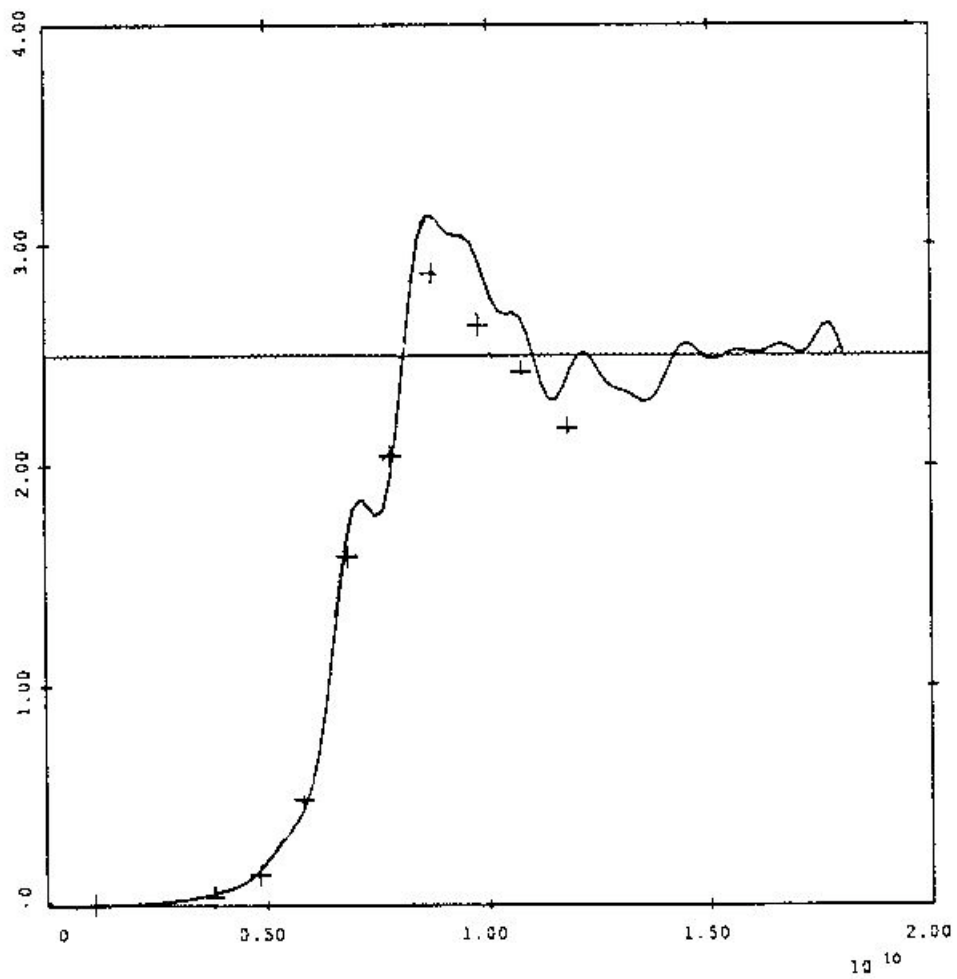


Figure 1.4 : Coefficient de transmission en fonction de la fréquence.

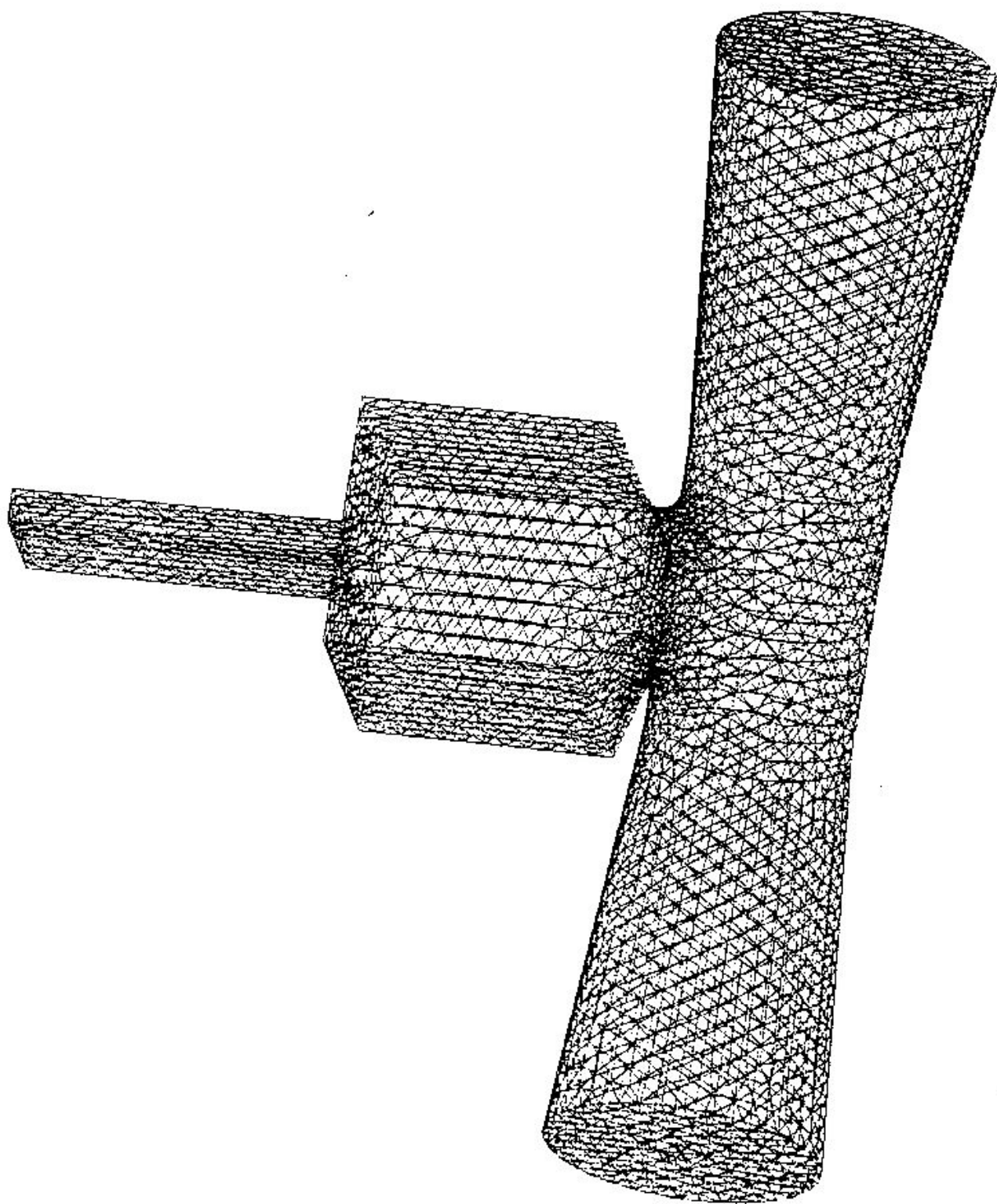


Figure 1.5 : Géométrie et maillage d'un klystron.

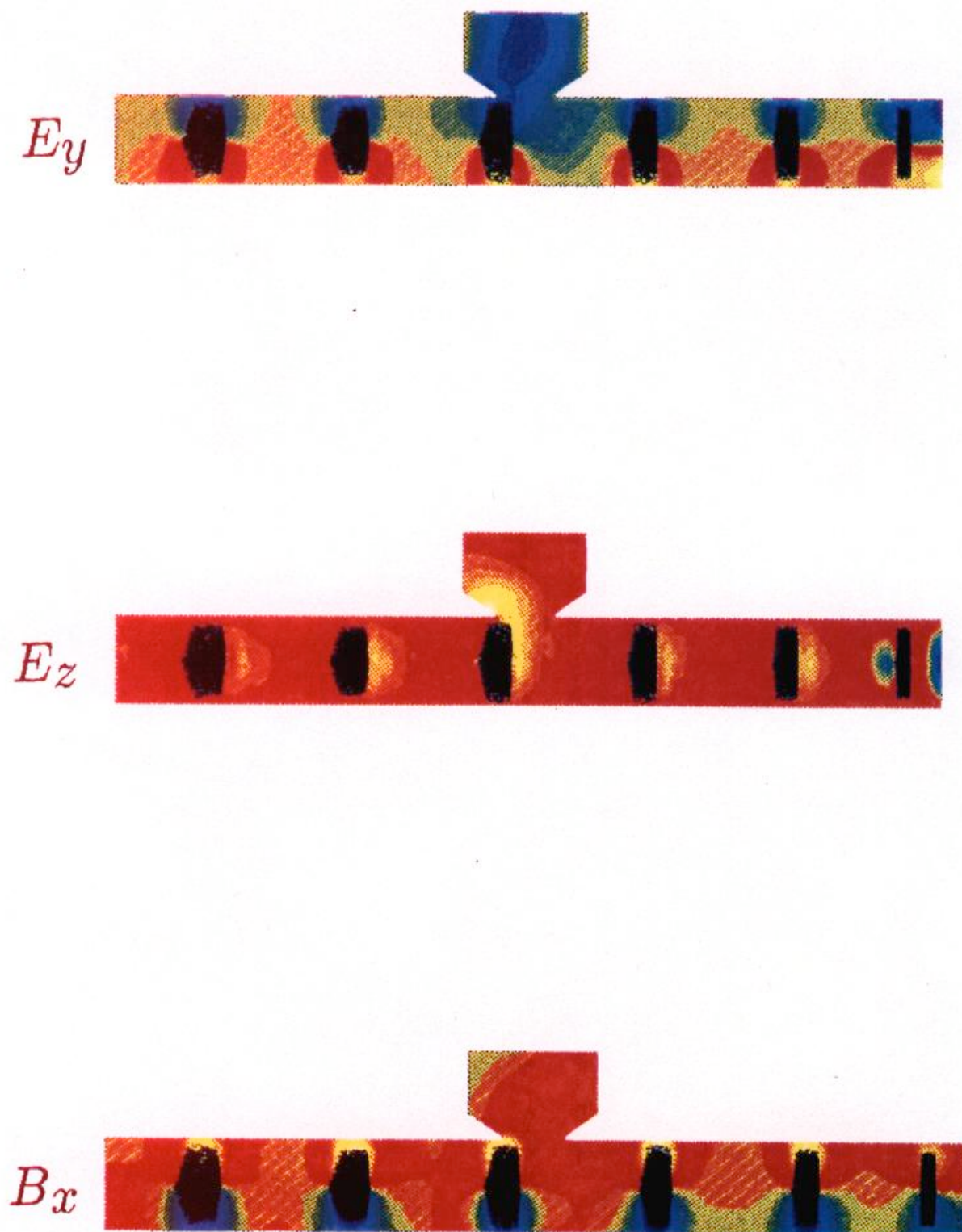


Figure 1.6 : Cartes du champ électromagnétique et position des paquets de particules.

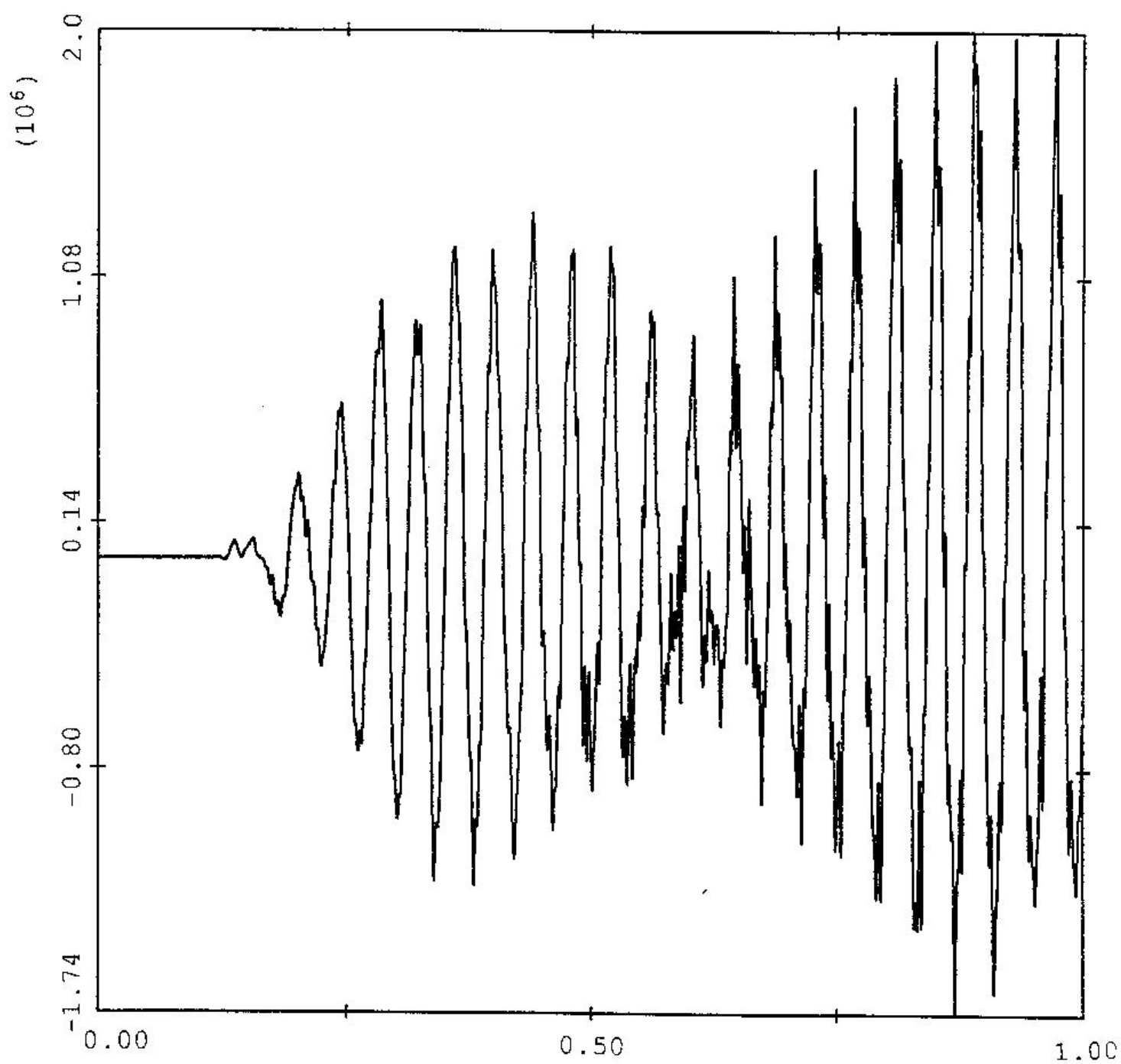


Figure 1.7 : Amplification, en un point de la cavité, d'une composante du champ en fonction du temps.

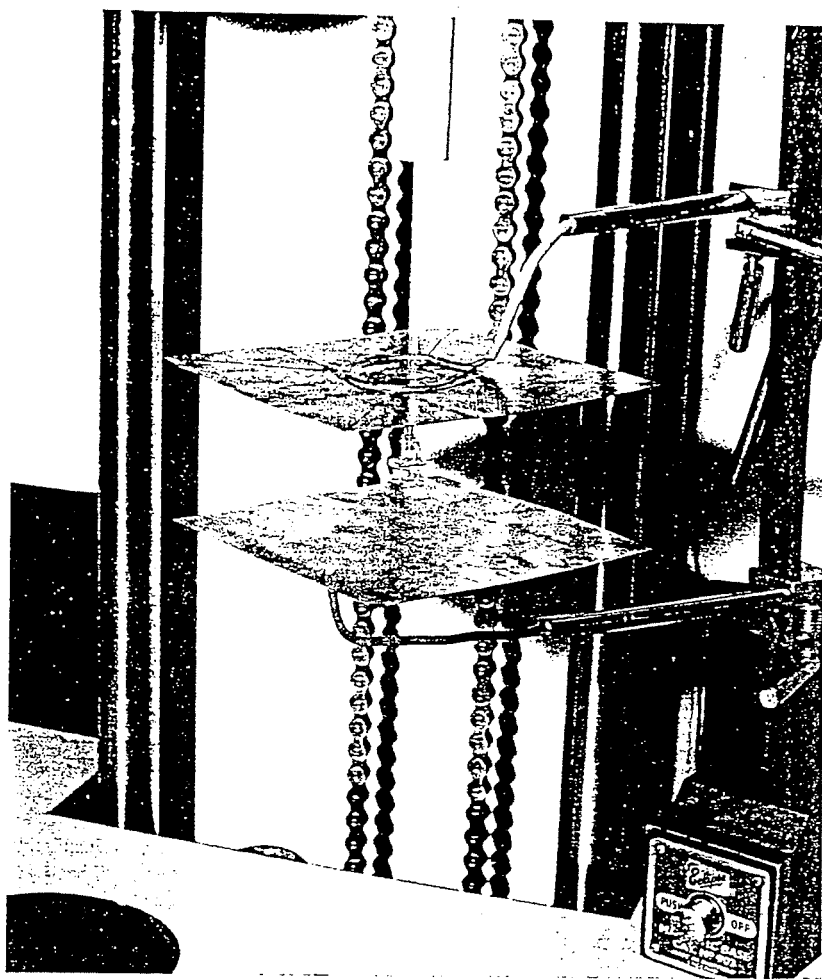


Figure 1.8 : Dispositif expérimental pour la C.D.A.

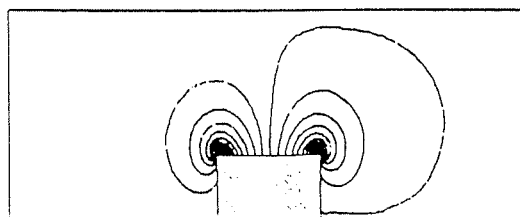
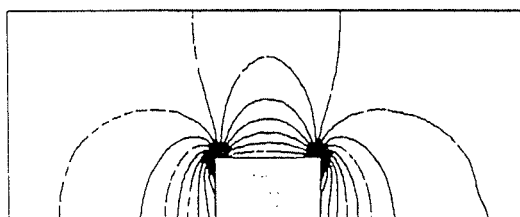


Figure 1.9 : Isovaleurs des composantes E_z et E_r du champ électrostatique.

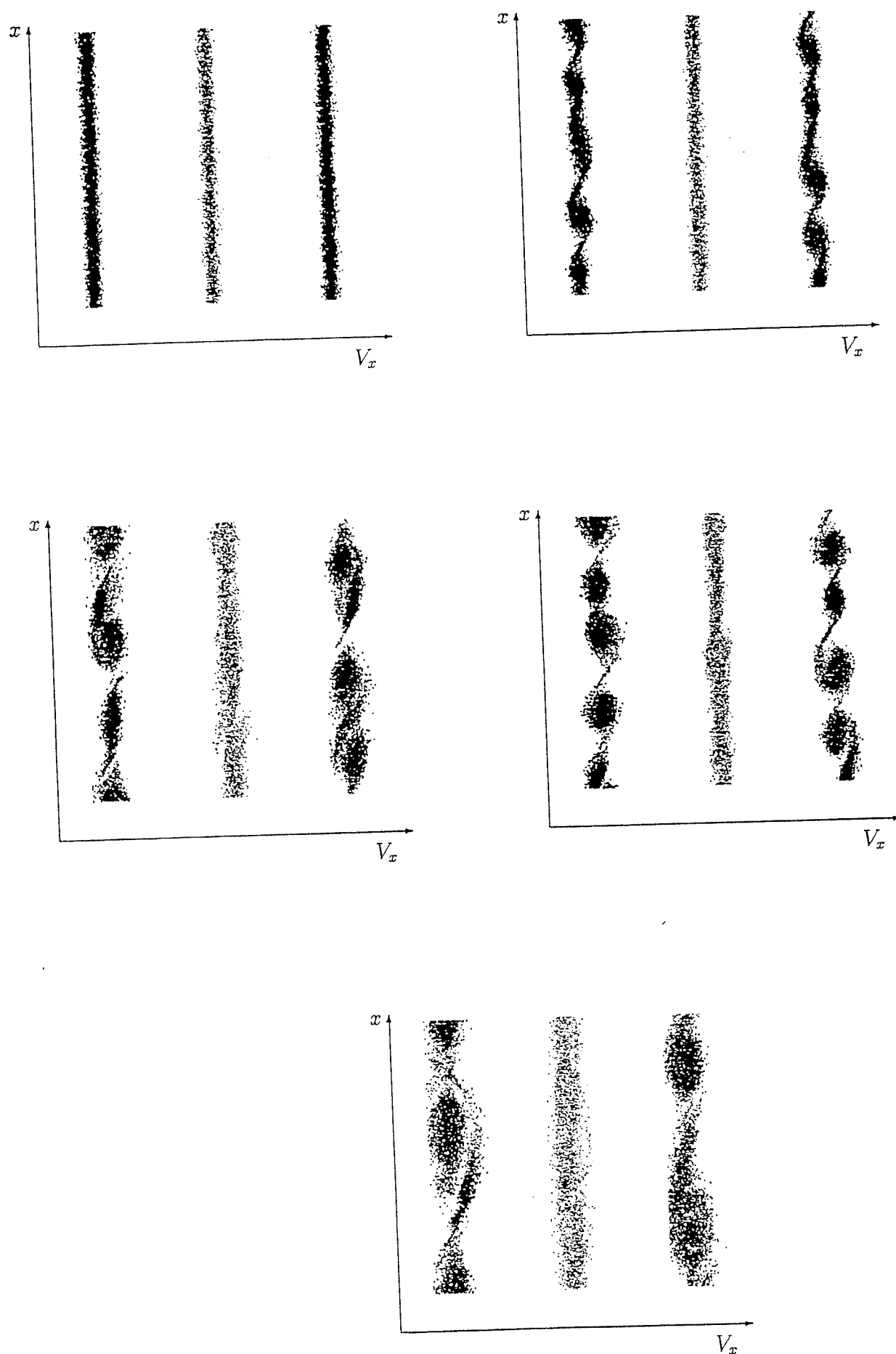


Figure 1.10 : Evolution en temps des particules dans l'espace des phases (V_x, x) , avec des vitesses croissantes de gauche à droite.

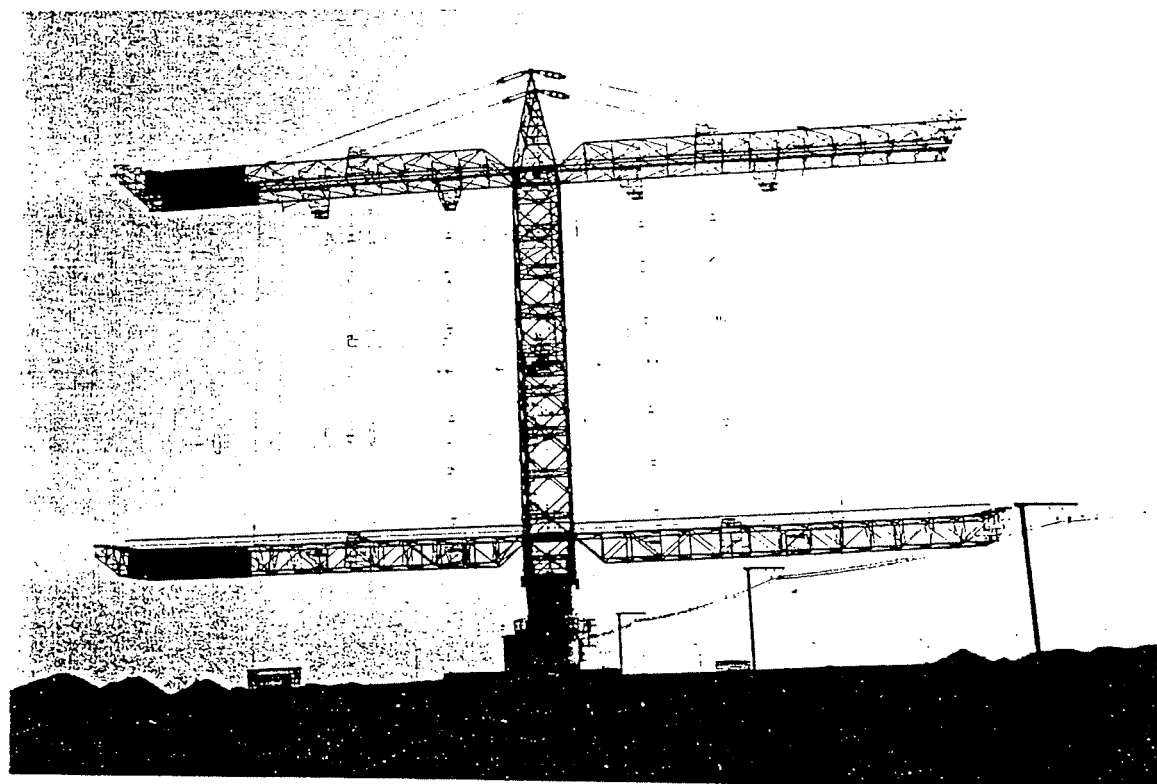
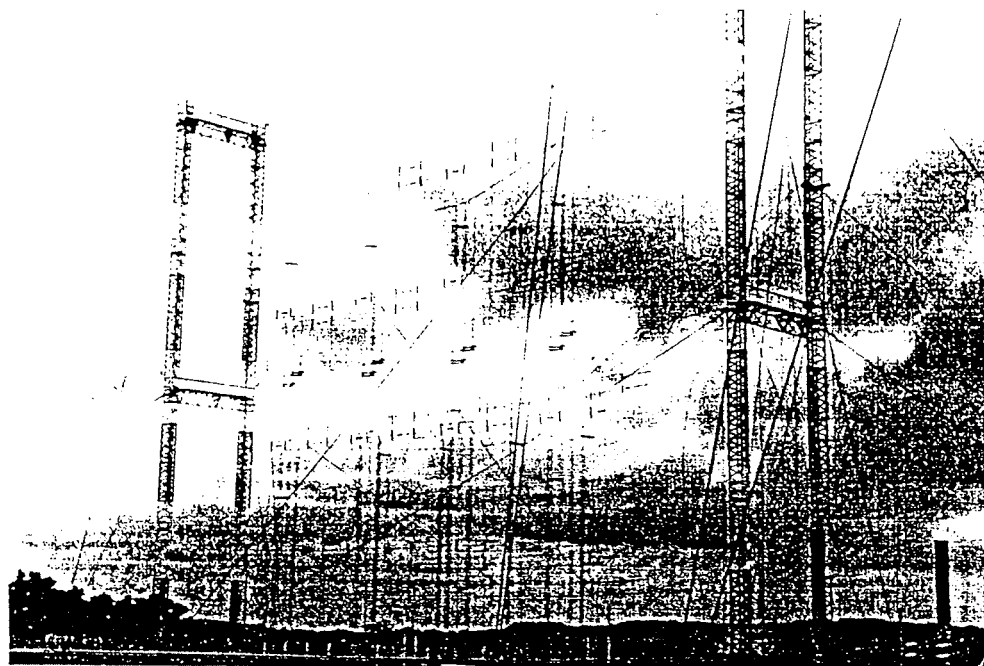


Figure 1.11 : Deux exemples d'antennes : rideau (haut) et tournante (bas).

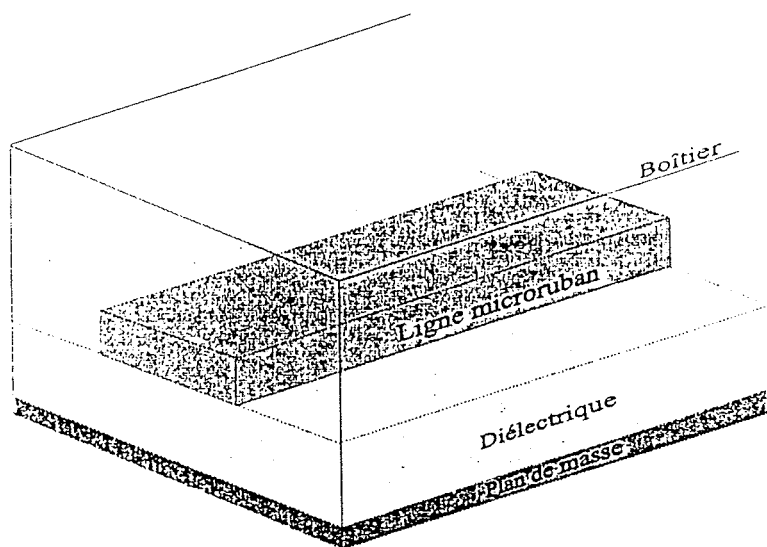


Figure 1.12 : Géométrie type d'un guide microruban.

Chapitre 2

Modélisation et outils mathématiques

Dans ce chapitre, nous allons détailler les outils mathématiques nécessaires à la bonne compréhension de équations de Maxwell, lorsque l'on veut résoudre des problèmes numériques en électromagnétisme. Tout d'abord, considérons les équations de Maxwell (1-4) dans un milieu parfait, linéaire et isotrope. Comme on l'a remarqué, on peut par exemple éliminer les inductions magnétique $\mathcal{B}$ et électrique $\mathcal{D}$, pour trouver

$$\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \mathbf{rot} \mathcal{H} = -\mathcal{J}, \quad (2.1)$$

$$\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathcal{E} = 0, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathcal{E}) = \mathcal{R}, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathcal{H}) = 0, \quad (2.4)$$

où $\mathcal{R}$ est la densité de charge, et $\mathcal{J}$ est la densité de courant.

Dans la suite, nous ne nous attarderons pas sur la justification de la forme même de ces équations. Une étude 'classique' de leur détermination peut être trouvée dans [46]. Une étude plus 'moderne', qui fait appel à la théorie de la relativité restreinte, et qui permet entre autres de justifier la loi empirique de BIOT et SAVART, a été réalisée dans [62].

Par contre, nous allons définir précisément les espaces mathématiques auxquels les champs, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$, et les densités, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$, appartiennent : ceci est indispensable pour obtenir des résultats d'existence, voire d'unicité. Pour cela, nous utilisons des résultats de modélisation 'physiques', qui portent sur l'énergie électromagnétique et ses variations par rapport au temps. Nous commençons donc par des rappels de modélisation, qui proviennent d'ouvrages traitant de physique (voir par exemple [35, 45, 46]), de physique théorique [50] et/ou de modélisation mathématique ([29], etc.). Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, les 'fonctions' $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$ dépendent à la fois de la variable d'espace $\mathbf{x}$ et du temps t . Nous nous plaçons ensuite dans le cas statique, c'est-à-dire que nous négligeons la dépendance en temps : ceci permet de démontrer l'existence et l'unicité du champ électromagnétique 'statique'. Puis, nous poursuivons par le cas dépendant du temps, en mettant l'accent sur les questions mathématiques d'appartenance à des espaces fonctionnels, ainsi que d'existence et d'unicité de la solution électromagnétique. Enfin, nous considérons le cas stationnaire ou harmonique, pour lequel la dépendance en temps est connue, et est de la forme $\exp(i\omega t)$, avec $\omega \in \mathbb{R}^*$. L'existence ou la non existence du champ, ainsi que son éventuelle unicité, sont étudiées en détail.

Des rappels concernant les espaces de Sobolev sont faits dans une Annexe, à la fin du chapitre.

2.1 Éléments de modélisation : considérations physiques

Nous allons principalement nous intéresser dans cette section aux résultats de modélisation physique de l'énergie électromagnétique.

Tout d'abord, la *densité d'énergie électromagnétique* :

$$w = \frac{1}{2} \{ \varepsilon |\mathcal{E}|^2 + \mu |\mathcal{H}|^2 \}. \quad (2.5)$$

Notons que cette quantité dépend de la position, et de l'instant à laquelle on la considère. Ceci permet de définir l'*énergie totale électromagnétique* par

$$W_{tot} = \int_{\mathbb{R}^3} w \, d\mathbf{x}, \quad (2.6)$$

qui ne dépend plus, elle, que du temps. De la même façon, on peut définir l'énergie électromagnétique W dans un volume quelconque V .

Pour ce qui est de l'équation de conservation de l'énergie, on peut l'écrire sous forme différentielle, ou sous forme intégrale

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathcal{E} \cdot \mathcal{J}, \quad (2.7)$$

$$-\frac{dW}{dt} = \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma + \int_V \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} \, d\mathbf{x}. \quad (2.8)$$

Ici, $\mathbf{S}$ est le vecteur de Poynting, introduit au chapitre précédent : $\mathbf{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}$.

Pour paraphraser Feynman [35], il n'est pas certain que ces définitions soient les bonnes ; ceci étant, si l'on examine les autres possibilités, on trouve toujours des expressions qui comportent des dérivées du champ. On conserve donc celles qui sont les plus simples, c'est-à-dire (2.5-2.8) ci-dessus : ceci reste néanmoins une *hypothèse de modélisation*...

Lorsque le champ électromagnétique est constant, c'est-à-dire qu'il ne varie pas au cours du temps, on peut définir l'énergie électrostatique d'un ensemble de charges, sous la forme

$$W_E^{stat} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{R} \phi \, d\mathbf{x}, \quad (2.9)$$

avec ϕ le potentiel électrostatique, tel que $\mathcal{E}^{stat} = -\mathbf{grad} \, \phi$. On peut également établir une formule équivalente pour l'énergie magnétique (sans nécessairement supposer que le champ est constant), de la forme

$$W_M = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{J} \cdot \mathcal{A} \, d\mathbf{x}, \quad (2.10)$$

où cette fois, $\mathcal{A}$ est le potentiel magnétique vecteur, c'est-à-dire tel que $\mathcal{B} = \mathbf{rot} \, \mathcal{A}$.

NB. Le fait que l'expression (2.9) est restreinte au cas statique, s'explique entre autres parce que $\mathcal{E}$ ne peut s'écrire sous la forme $-\mathbf{grad} \, \phi$ que si la relation d'Ampère est de la

forme $\mathbf{rot} \mathcal{E} = 0$ (voir (1.6)).

Pour finir cette section, notons que, comme il n'y a pas de champ électromagnétique ni de charges à l'infini, les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\frac{dW_{tot}}{dt} + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} d\mathbf{x} = 0 ; \quad (2.11)$$

$$\text{dans le cas statique, } \phi \text{ s'annule à l'infini.} \quad (2.12)$$

2.2 Dépendance en espace

Les équations statiques en $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ sont

$$\mathbf{rot} \mathcal{H} = \mathcal{J}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{rot} \mathcal{E} = 0, \quad (2.14)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathcal{E}) = \mathcal{R}, \quad (2.15)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathcal{H}) = 0. \quad (2.16)$$

2.2.1 Dans $\mathbb{R}^3$

Nous commençons par considérer les équations ci-dessus *localement*, ce qui signifie que l'on se trouve dans un petit volume, en *s'abstrayant de toute condition de bord* (voir la sous-section 2.2.3 pour la prise en compte des conditions de bord) : de façon équivalente, ceci revient à poser ces équations dans tout l'espace, $\mathbb{R}^3$, et à supposer que toutes les quantités s'annulent à l'infini (en particulier, il n'y a pas de charges à l'infini). Enfin, on suppose aussi que l'énergie électromagnétique totale est *finie*.

Examinons tout d'abord la provenance de (2.14-2.15), encore une fois à l'aide d'un raisonnement physique. Nous nous plaçons dans l'air, c'est-à-dire que $\varepsilon \equiv \varepsilon_a$, et nous considérons deux particules chargées p_0 et p , de positions respectives $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}$, et de charges respectives q_0 et q . Rappelons la loi de COULOMB, qui permet de déterminer l'expression de la force $\mathbf{F}$ de nature électromagnétique exercée par la particule p_0 sur la particule p . La force est :

(i) répulsive si les charges sont de même signe, attractive sinon ;

(ii) proportionnelle à q_0 et à q ;

(iii) en $\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}$;

(iv) dirigée selon la droite joignant $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}$.

En appelant $1/4\pi\varepsilon_a$ le coefficient de proportionnalité, on trouve (cf. [32]) l'expression suivante

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{q q_0}{4 \pi \varepsilon_a} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3}.$$

Or, on sait que $\mathbf{F} = q \mathcal{E}$, et ainsi

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{4 \pi \varepsilon_a} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3}.$$

Si l'on considère maintenant le cas de N particules chargées, de positions et de charges $(\mathbf{x}_i, q_i)_{i=1, \dots, N}$, le champ électromagnétique créé en $\mathbf{x}$ est

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{q_i}{4 \pi \varepsilon_a} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^3}.$$

Par ailleurs, un calcul simple ($\mathbf{grad}(\frac{1}{r}) = -\frac{\vec{e}_r}{r^2}$ en coordonnées sphériques) montre que l'on a l'identité

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|} \right) = -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^3}.$$

On en déduit alors que

$$\mathcal{E} = -\mathbf{grad}_{\mathbf{x}}\phi, \text{ avec } \phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{q_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}.$$

En particulier, il existe bien un potentiel électrostatique qui s'annule à l'infini.

Enfin, pour une densité de charge $\mathcal{R}(\mathbf{x}')$, $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$, on aboutit à

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int \mathcal{R}(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} d\mathbf{x}'.$$

D'un point de vue mathématique, on peut réécrire cette expression sous la forme d'un *produit de convolution*, c'est-à-dire sous la forme $f \star g(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}')g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$. On trouve

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \mathcal{R} \star \mathbf{g}, \text{ avec } \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^3}.$$

Une des propriétés du produit de convolution (cf. [16]) est que $\mathbf{grad}_{\mathbf{x}}(f \star g) = f \star \mathbf{grad}_{\mathbf{x}}g$. Si l'on prend $g(\mathbf{y}) = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|}$, on arrive à

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_a} \mathcal{R} \star \mathbf{grad}_{\mathbf{x}}g = -\mathbf{grad}_{\mathbf{x}}\phi, \text{ avec } \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \mathcal{R} \star g. \quad (2.17)$$

Encore une fois, ϕ est le potentiel électrostatique. Il s'annule à l'infini dès lors qu'il n'y a pas de charges à l'infini, puisque dans ce cas le support de la densité de charge $\mathcal{R}$ est borné. A partir de là, on vérifie facilement que :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathcal{E} &= -\mathbf{rot}(\mathbf{grad} \phi) = 0 ; \\ \text{div} \mathcal{E} &= -\Delta \phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_a} \Delta(\mathcal{R} \star g) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_a} \mathcal{R} \star (\Delta g) = \frac{1}{\epsilon_a} \mathcal{R} \star \delta_0 = \frac{1}{\epsilon_a} \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Ci-dessus, on a utilisé la propriété [29, page 283] selon laquelle g est une solution élémentaire (au facteur -4π près) du Laplacien dans $\mathbb{R}^3$, i.e. $\Delta g = -4\pi\delta_0$; ici δ_0 est la distribution définie par $\langle \delta_0, f \rangle = f(0)$, pour tout élément f de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, neutre pour le produit de convolution. On a donc bien retrouvé (2.14-2.15).

L'énergie électrostatique (que l'on a supposé finie) d'un ensemble de charges est égale à

$$W_E^{stat} = \frac{1}{2} \int \mathcal{R}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

On peut utiliser (2.15) pour trouver, après intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int \mathcal{R}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int \text{div}(\epsilon \mathcal{E})(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= - \int \epsilon(\mathbf{x}) \mathcal{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \text{ puisque } \phi \text{ s'annule à l'infini} \\ &= \int \epsilon(\mathbf{x}) |\mathcal{E}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Cette intégration par parties permet d'aboutir à la partie électrique de l'énergie.

Nous allons maintenant préciser les hypothèses que nous ferons sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{R}$ et ϕ dans la suite du cours, pour que, dans un cadre général, ces objets vérifient en un sens mathématique les relations (2.14), (2.15), (2.17) et (2.18). Pour cela, nous allons utiliser l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$, ainsi que les espaces de Sobolev que l'on peut définir à partir de là (voir l'Annexe).

Hypothèse (H0) : nous supposons dans la suite que ε et μ sont telles que

- ε et μ sont (Lebesgue-)mesurables.
- ε et μ sont uniformément bornées et strictement positives, c'est-à-dire :
 $\exists(\varepsilon_*, \varepsilon^*) \in \mathbb{R}_*^{+2}$, telles que $\varepsilon_* \leq \varepsilon(\mathbf{x}) \leq \varepsilon^*$, $\forall \mathbf{x}$.
 $\exists(\mu_*, \mu^*) \in \mathbb{R}_*^{+2}$, telles que $\mu_* \leq \mu(\mathbf{x}) \leq \mu^*$, $\forall \mathbf{x}$.

On peut écrire la suite d'inégalités

$$\text{pour } j = 1, 2, 3, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}_j^2 d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{E}|^2 d\mathbf{x} \leq \frac{1}{\varepsilon_*} \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon |\mathcal{E}|^2 d\mathbf{x}.$$

Par hypothèse, l'énergie électrique est finie : il est donc naturel de considérer que, pour $j = 1, 2, 3$, $\mathcal{E}_j \in L^2(\mathbb{R}^3)$, ce que l'on écrit

$$\mathcal{E} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3.$$

De (2.17), et du fait que ϕ s'annule à l'infini, on déduit que le potentiel ϕ est tel que

$$\phi \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

L'égalité (2.18) signifie alors que $\mathcal{R}$ appartient à l'espace dual de $H^1(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire

$$\mathcal{R} \in H^{-1}(\mathbb{R}^3).$$

Remarque 2.2.1 *L'hypothèse mathématique faite ci-dessus sur $\mathcal{R}$ peut ne pas être 'vérifiée'. En effet, on peut montrer, par un calcul élémentaire, qui relie l'expression de $\mathcal{R}$ et son appartenance à $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$, que l'on exclut certaines 'singularités' de charge, telles que les charges ponctuelles ou linéiques : si on considère $\mathcal{R}$ en fonction de la distance r à la charge, on vérifie qu'elle est très singulière en $r = 0$. Ceci pose le problème de la modélisation physique. Les modèles obtenus restent-ils valables quelle que soit la situation considérée ? En particulier, que se passe-t-il si l'on s'approche toujours plus près d'une charge ponctuelle et/ou linéique, i.e. $r \rightarrow 0$? Une réponse possible à ces questions est qu'il convient de changer de modèle : lorsque les distances deviennent petites, on passe en effet du modèle dit 'macroscopique' à celui dit 'microscopique', qui repose sur les outils et concepts de la mécanique quantique et de la physique statistique... En d'autres termes, on sort du cadre du cours (voir par exemple [46]) !*

Finalement, d'après (2.14), il est naturel de considérer

$$\mathcal{E} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3).$$

En effet, montrons que $\mathbf{rot} \mathcal{E} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$. Pour cela, on raisonne au sens des distributions : pour tout élément $\mathbf{f}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$,

$$\langle \mathbf{rot} \mathcal{E}, \mathbf{f} \rangle \stackrel{\text{déf. A.5}}{=} \langle \mathcal{E}, \mathbf{rot} \mathbf{f} \rangle \stackrel{(2.17)}{=} - \langle \mathbf{grad} \phi, \mathbf{rot} \mathbf{f} \rangle = \langle \phi, \text{div} \mathbf{rot} \mathbf{f} \rangle = 0,$$

car $\text{div} \mathbf{rot} \mathbf{f} = 0$. En conséquence, $\mathbf{rot} \mathcal{E} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3$. Comme 0 appartient à $L^2(\mathbb{R}^3)^3$, on a bien $\mathbf{rot} \mathcal{E} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$.

Dans la suite, nous ferons souvent l'hypothèse *supplémentaire* que $\mathcal{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire $\operatorname{div}(\varepsilon \mathcal{E}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ d'après (2.15). On trouve alors

$$\mathcal{E} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div} \varepsilon, \mathbb{R}^3). \quad (2.19)$$

Lorsque le milieu est au surplus *homogène* (cas de l'air ou du vide), ε est constant et, par voie de conséquence, ceci implique que

$$\mathcal{E} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3).$$

NB. Puisque $\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E}$, on a également $\mathcal{D} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$.

Pour ce qui est du champ magnétique $\mathcal{H}$, reprenons (2.10) et (2.13)

$$\begin{aligned} W_M &= \frac{1}{2} \int \mathcal{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int \mathbf{rot} \mathcal{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int \mathcal{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{rot} \mathcal{A}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \text{ puisque le champ électromagnétique s'annule à l'infini} \\ &= \frac{1}{2} \int \mu(\mathbf{x}) |\mathcal{H}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

où $\mathcal{A}$ est le potentiel vecteur (cf. (2.16)) tel que

$$\mu \mathcal{H} (= \mathcal{B}) = \mathbf{rot} \mathcal{A}. \quad (2.21)$$

En ce qui concerne les hypothèses mathématiques sur $\mathcal{H}$, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{A}$, nous allons utiliser cette fois (2.13), (2.16), (2.20) et (2.21). Lorsque le raisonnement est semblable à celui effectué pour la partie électrostatique, nous condenseons les calculs.

Nous déduisons du second membre de (2.20) que

$$\mathcal{H} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3.$$

Ensuite, la relation d'Ampère entraîne, au sens des distributions,

$$\langle \operatorname{div} \mathcal{J}, f \rangle = - \langle \mathcal{J}, \mathbf{grad} f \rangle \stackrel{(2.13)}{=} - \langle \mathbf{rot} \mathcal{H}, \mathbf{grad} f \rangle = - \langle \mathcal{H}, \mathbf{rot}(\mathbf{grad} f) \rangle = 0,$$

et ce, pour tout élément f de $\mathcal{D}(\Omega)$. En d'autres termes, on a démontré la loi de conservation de la charge statique

$$\operatorname{div} \mathcal{J} = 0. \quad (2.22)$$

Remarque 2.2.2 On déduit de ce raisonnement, ainsi que de celui sur $\mathbf{rot} \mathcal{E}$, que les relations bien connues $\operatorname{div}(\mathbf{rot} \cdot) = 0$ et $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} \cdot) = 0$ sont également valables pour les distributions.

La relation (2.21) liant $\mathcal{H}$ et $\mathcal{A}$ est satisfaite dès lors que (condition *suffisante*)

$$\mathcal{A} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3).$$

L'égalité (2.20) suggère cette fois de prendre $\mathcal{J}$ dans l'espace dual de $H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$, noté $H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)'$; par commodité nous supposons en général

$$\mathcal{J} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3.$$

Ainsi, d'après (2.13) et (2.16)

$$\mathcal{H} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div} \mu, \mathbb{R}^3). \quad (2.23)$$

Lorsque le milieu est *homogène*, μ est également constant, et on en conclut que

$$\mathcal{H} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3).$$

NB. Puisque $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$, on en déduit dans ce cas que $\mathcal{B} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$.

En résumé, sous réserve que (H0) est satisfaite, on a

Les régularités 'minimales'

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{R} \in H^{-1}(\mathbb{R}^3) \quad \mathcal{J} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)', \quad \operatorname{div} \mathcal{J} = 0 \\ \mathcal{E} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \quad \mathcal{H} \in H(\operatorname{div} \mu, \mathbb{R}^3) \end{array}} ;$$

ainsi que les régularités 'usuelles'

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{R} \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \mathcal{J} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3, \quad \operatorname{div} \mathcal{J} = 0 \\ \mathcal{E} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div} \varepsilon, \mathbb{R}^3) \quad \mathcal{H} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div} \mu, \mathbb{R}^3) \end{array}} .$$

2.2.2 Conditions de transmission

Nous nous plaçons dans un ouvert Ω , tel que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, où $(\Omega_i)_{i=1,2}$ sont deux ouverts disjoints, de bord Γ_1 et Γ_2 . On définit l'interface Σ par $\Sigma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, et $\mathbf{n}_\Sigma$ la normale unitaire à Σ , dirigée de Ω_1 vers Ω_2 .

ε et μ sont respectivement telles que $\varepsilon|_{\Omega_i} = \varepsilon_i$ et $\mu|_{\Omega_i} = \mu_i$, pour $i = 1, 2$, avec $(\varepsilon_i, \mu_i)_{i=1,2}$ constantes.

- On choisit des valeurs distinctes sur Ω_1 et Ω_2 , i.e. $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ et $\mu_1 \neq \mu_2$.
- ε et μ ne sont pas définis sur Σ . Ceci n'est pas grave! En effet, la mesure de Σ (selon $d\mathbf{x}$) est nulle, ce qui signifie en particulier que la contribution sur Σ de tout élément de $L^2(\Omega)$ est égale à zéro.

Nous allons retrouver les conditions de saut sur $\mathcal{E}$, au travers de l'interface. Si l'on note $\mathbf{E}_T$ la partie tangentielle de $\mathcal{E}$, et B_n la composante normale de $\mathcal{B}$, les manuels de physique nous apprennent que

$$[\mathbf{E}_T]_\Sigma = 0, \quad [B_n]_\Sigma = 0. \quad (2.24)$$

Précisons les notations. Soit f une fonction définie sur Ω , on veut déterminer $[f]_\Sigma$, qui est elle définie sur Σ . Pour cela, on désigne par $f_i = f|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$ les restrictions de f à Ω_1 et Ω_2 . S'il est possible de considérer, pour chaque i , sa trace $f_{i|_\Sigma}$, on pose

$$[f]_\Sigma = f_{2|_\Sigma} - f_{1|_\Sigma}.$$

C'est donc bien une fonction définie sur Σ .

Or, dans (2.24), on a pris la partie tangentielle de $\mathcal{E}$, ainsi que la partie normale de $\varepsilon \mathcal{E}$. D'après ce qui est décrit dans l'Annexe, ceci est possible puisque, par restriction de $\mathbb{R}^3$ à Ω , on trouve que $\mathcal{E}$ est élément de $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ et $\mathcal{B}$ est élément de $H(\operatorname{div}, \Omega)$.

Obtention de (2.24a) : Soit $\mathbf{x}_\Sigma$ un point de Σ , et $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$, non nulle uniquement dans un voisinage de $\mathbf{x}_\Sigma$. Ecrivons la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
0 & \stackrel{(2.88)}{=} \int_{\Omega} \{\mathcal{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} - \mathbf{rot} \mathcal{E} \cdot \mathbf{v}\} d\mathbf{x} \\
& = \int_{\Omega_1} \{\mathcal{E}_1 \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_1 - \mathbf{rot} \mathcal{E}_1 \cdot \mathbf{v}_1\} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \{\mathcal{E}_2 \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_2 - \mathbf{rot} \mathcal{E}_2 \cdot \mathbf{v}_2\} d\mathbf{x} \\
& \stackrel{(2.88)}{=} \int_{\Gamma_1} \mathcal{E}_1 \times \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \mathcal{E}_2 \times \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v}_2 d\Gamma \\
& = \int_{\Sigma} \mathcal{E}_1 \times \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}_1 d\Sigma + \int_{\Sigma} \mathcal{E}_2 \times \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v}_2 d\Sigma, \text{ car } \mathbf{v}_i \text{ s'annule sur } \Gamma_i \setminus \Sigma, i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Et, sur Σ :

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 (= \mathbf{v})$, comme $\mathbf{v}$ est régulière,
- $\mathcal{E}_i \times \mathbf{n}_i = (\mathbf{E}_T)_i \times \mathbf{n}_i$, par définition du produit vectoriel,
- $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_\Sigma$.

Ainsi,

$$0 = \int_{\Sigma} (((\mathbf{E}_T)_1 - (\mathbf{E}_T)_2) \times \mathbf{n}_\Sigma) \cdot \mathbf{v} d\Sigma = - \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_T]_\Sigma \times \mathbf{n}_\Sigma) \cdot \mathbf{v} d\Sigma.$$

Ceci est valable pour tout $\mathbf{v}$ tel que nous l'avons choisi ci-dessus. En conséquence, $[\mathbf{E}_T]_\Sigma \times \mathbf{n}_\Sigma = 0$ au voisinage de $\mathbf{x}_\Sigma$. Comme c'est vrai pour tout $\mathbf{x}_\Sigma$, on en déduit que la propriété est vraie (presque) partout et on conclut en remarquant que $[\mathbf{E}_T]_\Sigma = 0$ est en fait équivalent à $[\mathbf{E}_T]_\Sigma \times \mathbf{n}_\Sigma = 0$, puisque la composante normale de $\mathbf{E}_T$ est nulle par définition.

NB. Par commodité, nous avons laissé des intégrales sur Γ_i et sur Σ , au lieu des crochets de dualité *ad hoc*.

Obtention de (2.24b) : en utilisant (2.87) sur $\mathcal{B}$ et $\mathbf{v}$, on peut aisément vérifier que l'on arrive à

$$0 = \int_{\Sigma} [B_n]_\Sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\Sigma d\Sigma.$$

On en conclut alors que

$$[B_n]_\Sigma = 0 \iff [B_n]_\Sigma = 0 \iff (B_n)_{2|\Sigma} - (B_n)_{1|\Sigma} = 0.$$

Remarque 2.2.3 *En particulier, on justifie la condition de conducteur parfait (1.5). En effet, le champ électrique appartient à $H(\mathbf{rot}, \Omega)$, et l'on sait que $\mathcal{E}_1 = 0$ si par exemple Ω_1 est un conducteur parfait. On déduit alors de (2.24a) que la trace tangentielle du champ restreint à Ω_2 , i.e. $(\mathbf{E}_T)_2$, s'annule sur Σ ; ou, de façon équivalente, que $\mathcal{E}_2 \times \mathbf{n}_{2|\Sigma} = 0$.*

2.2.3 Dans un domaine borné

Lorsque $\mathbb{R}^3$ est remplacé par un domaine ouvert borné Ω de bord Γ , on arrive à des conclusions très semblables à celles de la sous-section 2.2.1, la seule différence portant sur les *conditions aux limites*. On appelle dans la suite $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à Ω sur Γ . Comme mentionné précédemment, les résultats se transposent : si l'on suppose que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$ appartiennent respectivement à $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)^3$, on retrouve

$$\mathcal{E} \in \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \mathbf{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)\}, \quad (2.25)$$

$$\mathcal{H} \in \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \mathbf{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \operatorname{div}(\mu \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)\}. \quad (2.26)$$

Par ailleurs, une condition aux limites de type conducteur parfait (voir la remarque ci-dessus), $\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0$ sur le bord Γ , signifie que $\mathcal{E}$ appartient à

$$\mathcal{E} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega).$$

Pour pouvoir affirmer que $\mathcal{E}$ *dérive d'un potentiel* de régularité 'usuelle', il est nécessaire de supposer que le domaine Ω est *simplement connexe* [34]. Nous ferons donc cette hypothèse dans la suite, dès lors que nous passons en potentiel. Alors, de (2.17), on déduit que $\phi \in H^1(\Omega)$ puisque $\mathcal{E} \in L^2(\Omega)^3$, puis que $\phi \in H_0^1(\Omega)$ si le bord Γ est connexe.

En effet, (1.5) se réécrit sous la forme $\mathbf{grad} \phi \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0$, soit $\mathbf{grad}_\Gamma \phi = 0$, où $\mathbf{grad}_\Gamma$ est le gradient surfacique sur le bord Γ . En d'autres termes, ϕ ne varie pas sur Γ : $\phi|_\Gamma$ prend donc une valeur constante. Comme ϕ est déterminé à une constante près (c'est un potentiel scalaire), on peut effectivement le choisir dans $H_0^1(\Omega)$. Si le bord n'est pas connexe, on le découpe en l'union $\cup_{k=0}^K \Gamma^k$, où Γ^k sont les composantes connexes maximales, et on trouve que $\phi|_{\Gamma^k} = c_k$ une constante, pour $0 \leq k \leq K$. Comme ϕ est connu à une constante près, on peut choisir $c_0 = 0$.

D'après (2.26), $\mathcal{B}$ est élément de $H(\text{div}, \Omega)$. Si on impose (cf. la discussion de la sous-section 1.3.2) la condition $\mathcal{B} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0$,

$$\mathcal{B} \in H_0(\text{div}, \Omega).$$

Par ailleurs, d'après [39, Thm 3.6, chapitre 1, p. 48], on peut choisir le potentiel vecteur $\mathcal{A}$ (2.21) tel que $\mathcal{A} \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0$, ce qui signifie que $\mathcal{A} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$.

En résumé, les différences portent sur les conditions au bord des champs, inductions et potentiels électromagnétiques.

2.3 Existence d'une solution : cas statique

Pour l'instant, nous avons déduit, à l'aide de connaissances physiques, certains résultats mathématiques portant sur le champ électromagnétique. Dans cette section, nous allons prouver que, grâce à ces résultats, qui *caractérisent* les espaces fonctionnels auxquels le champ électromagnétique 'statique' appartient, il existe une solution unique au problème (2.13-2.16). De plus, on vérifiera que le champ dépend *continûment* des données, c'est-à-dire qu'il tend vers zéro lorsque les données tendent vers zéro.

Nous supposons que Ω est un domaine de type (H3), voir l'Annexe, simplement connexe et, pour simplifier, que son bord Γ est connexe. En particulier, Ω est *borné*. Nous nous plaçons en outre dans le cas où le domaine est entouré par un conducteur parfait.

2.3.1 Electrostatique

Nous considérons le potentiel électrostatique ϕ défini par (2.17), dont nous avons vu qu'il appartient à $H_0^1(\Omega)$. D'après (2.14), nous pouvons donc écrire que ϕ est solution du problème :

Trouver $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$-\text{div}(\varepsilon \mathbf{grad} \phi) = \mathcal{R}.$$

Nous allons maintenant démontrer l'existence et l'unicité de ϕ , ce qui équivaut à démontrer qu'il existe une solution, et une seule, au problème électrostatique. En effet, ϕ étant un potentiel scalaire, est déterminé à une constante près. Et dire que ϕ est un élément de $H_0^1(\Omega)$ signifie en particulier que sa trace est nulle sur le bord, ce qui fixe la constante. L'identité $\mathcal{E} = -\mathbf{grad} \phi$ permet de conclure.

Pour cela, nous construisons la formulation variationnelle associée, et nous utilisons le théorème de Lax-Milgram pour prouver qu'il existe une solution unique au problème écrit sous forme variationnelle. Enfin, nous concluons en vérifiant que cette forme est bien équivalente au problème de départ. Ce raisonnement est assez classique en modélisation

mathématique, et il faut bien se souvenir que chacune des trois étapes¹ est absolument nécessaire à l'obtention du résultat final.

◦ Formulation variationnelle :

on prend une fonction ψ de $H_0^1(\Omega)$, et l'on forme

$$\int_{\Omega} \mathcal{R} \psi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{grad} \phi) \psi \, d\mathbf{x} \stackrel{(2.87)}{=} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \psi \, d\mathbf{x}.$$

Ceci est valable pour tout élément de $H_0^1(\Omega)$. Nous avons donc obtenu la formulation variationnelle :

Trouver $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{R} \psi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

◦ Théorème de LAX-MILGRAM :

la formulation variationnelle ci-dessus peut-être inscrite dans le cadre général suivant

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.27)$$

avec

- V un espace de Hilbert ;
- a une forme bilinéaire, continue et coercitive sur $V \times V$, c'est-à-dire :
 - $\exists \beta > 0, \forall (u, v) \in V \times V, |a(u, v)| \leq \beta \|u\| \|v\|$ (continuité) ;
 - $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$ (coercivité) ;
- l une forme linéaire et continue sur V .

Alors, le résultat ci-dessous (voir par exemple [16] pour une preuve) permet de conclure à l'existence et à l'unicité d'une solution au problème (2.27), ainsi qu'à la dépendance continue de cette solution par rapport aux données (ici, la forme linéaire et continue l).

Théorème 2.3.1 *Sous réserve que les hypothèses ci-dessus sont satisfaites, alors il existe une solution et une seule u au problème (2.27), et il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\| \leq C \|l\|_{V'}$, pour tout $l \in V'$, dual de V .*

Si nous posons $V = H_0^1(\Omega)$, $a(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \psi \, d\mathbf{x}$ et $l(\psi) = \int_{\Omega} \mathcal{R} \psi \, d\mathbf{x}$, nous en arrivons à l'existence, l'unicité et la dépendance continue de ϕ par rapport à $\mathcal{R}$, c'est-à-dire

$$\exists C > 0, \quad \forall \mathcal{R} \in L^2(\Omega), \quad \|\phi\|_1 \leq C \|\mathcal{R}\|_0.$$

En effet, concernant la forme bilinéaire a :

- Continuité

$$\begin{aligned} |a(\phi, \psi)| &= \left| \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \psi \, d\mathbf{x} \right| \leq \int_{\Omega} |\varepsilon| |\mathbf{grad} \phi| |\mathbf{grad} \psi| \, d\mathbf{x} \\ &\stackrel{(H0)}{\leq} \varepsilon^* \int_{\Omega} |\mathbf{grad} \phi| |\mathbf{grad} \psi| \, d\mathbf{x} \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \varepsilon^* \left\{ \int_{\Omega} |\mathbf{grad} \phi|^2 \, d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Omega} |\mathbf{grad} \psi|^2 \, d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \leq \varepsilon^* \|\phi\|_1 \|\psi\|_1. \end{aligned}$$

¹Le théorème de Lax-Milgram que l'on utilise à la seconde étape, peut être avantageusement remplacé par tout résultat mathématique mieux adapté, le cas échéant.

– Coercivité

$$a(\phi, \phi) = \int_{\Omega} \varepsilon |\mathbf{grad} \phi|^2 d\mathbf{x} \geq \varepsilon_* |\phi|_1^2 \geq \varepsilon_* C_0^2 \|\phi\|_1^2,$$

puisque, d'après l'inégalité de Poincaré (corollaire A.1), $|\cdot|_1$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_1$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Pour ce qui est de la forme linéaire l :

$$|l(\psi)| \leq \int_{\Omega} |\mathcal{R}| |\psi| d\mathbf{x} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\mathcal{R}\|_0 \|\psi\|_0 \leq \|\mathcal{R}\|_0 \|\psi\|_1.$$

Enfin, en ce qui concerne la dépendance continue par rapport à la donnée $\mathcal{R}$, on écrit directement :

$$\varepsilon_* C_0^2 \|\phi\|_1^2 \leq \int_{\Omega} \varepsilon |\mathbf{grad} \phi|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{R} \phi d\mathbf{x} \leq \|\mathcal{R}\|_0 \|\phi\|_1.$$

D'où on déduit

$$\|\phi\|_1 \leq \frac{1}{\varepsilon_* C_0^2} \|\mathcal{R}\|_0.$$

CQFD

◦ Retour au problème de départ :

Si maintenant nous prouvons l'assertion

ϕ solution de la formulation variationnelle $\implies \phi$ solution du problème de départ,

la boucle est bouclée...

Pour cela, on procède habituellement de la façon suivante.

Pour tout ψ élément de $\mathcal{D}(\Omega)$, on a l'égalité

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \psi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{R} \psi d\mathbf{x} ;$$

ce qui s'écrit, au sens des distributions :

$$\langle \mathcal{R}, \psi \rangle = \langle \varepsilon \mathbf{grad} \phi, \mathbf{grad} \psi \rangle = - \langle \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{grad} \phi), \psi \rangle .$$

Ainsi, $\mathcal{R} = -\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{grad} \phi)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme $\mathcal{R}$ est un élément de $L^2(\Omega)$, un sous-ensemble de $\mathcal{D}'(\Omega)$ (cf. (2.80)), $\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{grad} \phi)$ appartient aussi à $L^2(\Omega)$. Et, de l'égalité $\mathcal{R} = -\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{grad} \phi)$ dans $L^2(\Omega)$, on déduit finalement que $\mathcal{R} = -\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{grad} \phi)$ presque partout, d'après la proposition A.1.

Comme $\phi \in H_0^1(\Omega)$ par hypothèse, nous sommes bien revenus au point de départ.

Remarque 2.3.1 D'après (2.18), $\mathcal{R}$ est initialement supposé appartenir à $H^{-1}(\Omega)$, qui est le dual de $H_0^1(\Omega)$. Dans ce cas plus général, dit de la régularité 'minimale', il est tout à fait possible de reprendre la procédure ci-dessus, la seule différence étant que la formulation variationnelle a pour second membre

$$H^{-1}(\Omega) \langle \mathcal{R}, \psi \rangle_{H_0^1(\Omega)},$$

c'est-à-dire des crochets de dualité. En effet, pour tout élément ψ de $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\psi_k)_k$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi_k \rightarrow \psi$ dans $H_0^1(\Omega)$. A partir de là, on écrit la suite d'égalités

$$\begin{aligned} H^{-1}(\Omega) \langle \mathcal{R}, \psi \rangle_{H_0^1(\Omega)} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} H^{-1}(\Omega) \langle \mathcal{R}, \psi_k \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{R}, \psi_k \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle -\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{grad} \phi), \psi_k \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \varepsilon \mathbf{grad} \phi, \mathbf{grad} \psi_k \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \psi_k d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \psi d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

(Ce raisonnement est souvent appelé raisonnement par densité.)

Nous avons donc démontré l'existence et l'unicité de $\mathcal{E}$. De la relation constitutive $\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E}$, nous dérivons un résultat identique d'existence et d'unicité pour l'induction électrique $\mathcal{D}$, puisque $\varepsilon(\mathbf{x}) \neq 0$ presque pour tout $\mathbf{x}$ (cf. (H0)).

Théorème 2.3.2 *Soit Ω un domaine simplement connexe de type (H3). Il existe un, et un seul, couple électrostatique $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ solution des équations de Maxwell statiques. De plus il dépend continûment de la densité de charge $\mathcal{R}$.*

2.3.2 Magnétostatique

Pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{H}$, liés par la relation $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$, nous pouvons également passer par le potentiel (vecteur) $\mathcal{A}$ (2.21). Ceci étant, contrairement au cas électrostatique, $\mathcal{A}$ n'est pas unique à une constante près, mais à un gradient près!

Pour remplacer le problème de l'existence et de l'unicité de $\mathcal{B}$ par un problème identique pour $\mathcal{A}$, il est donc nécessaire de *caractériser* $\mathcal{A}$.

Faisons encore une fois appel aux manuels de physique : nous savons que $\mathcal{A}$ est entièrement déterminé dès lors qu'une *condition de jauge* est fixée, d'après la sous-section 1.1.3.

Mathématiquement, il en est de même, d'après le théorème ci-dessous (voir [39, Thm 3.6, chapitre 1, p. 48]).

Théorème 2.3.3 *Soit $\mathcal{B} \in H(\text{div}, \Omega)$ tel que $\text{div } \mathcal{B} = 0$ dans Ω et $\mathcal{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$. Alors,*

$$\exists! \mathcal{A} \in L^2(\Omega)^3, \mathcal{B} = \text{rot } \mathcal{A}, \text{div } \mathcal{A} = 0, \mathcal{A} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0.$$

Remarque 2.3.2 *La condition aux limites sur $\mathcal{A}$ entraîne la condition aux limites sur $\mathcal{B}$. En effet, pour tout élément ξ de $H^2(\Omega)$, $\text{grad } \xi \in H^1(\Omega)^3$ et on peut écrire*

$$\int_{\Gamma} (\text{rot } \mathcal{A} \cdot \mathbf{n}) \xi \, d\Gamma \stackrel{(2.87)}{=} \int_{\Omega} \text{rot } \mathcal{A} \cdot \text{grad } \xi \, d\mathbf{x} \stackrel{(2.88)}{=} \int_{\Gamma} (\mathcal{A} \times \mathbf{n}) \cdot \text{grad } \xi \, d\Gamma = 0.$$

Comme $H^2(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$, $\gamma_0(H^2(\Omega))$ est dense dans $H^{1/2}(\Gamma) = \gamma_0(H^1(\Omega))$. On a donc bien $\text{rot } \mathcal{A} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$.

Si nous notons

$$\mathcal{X} := H_0(\text{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega),$$

le potentiel $\mathcal{A}$ appartient alors, par choix, à

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{v} \in \mathcal{X} : \text{div } \mathbf{v} = 0\}.$$

D'après (2.13), nous pouvons écrire que $\mathcal{A}$ est solution de

Trouver $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ tel que

$$\text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathcal{A}) = \mathcal{J}.$$

NB. D'après (H0), $\frac{1}{\mu^*} \leq \mu^{-1}(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{\mu_*}$ pour tout $\mathbf{x}$, et μ^{-1} est Lebesgue-mesurable.

Ceci étant posé, nous allons suivre le même chemin que précédemment. Comme nous le verrons, la dernière étape, très différente de celle de l'électrostatique, est fort instructive.

◦ Formulation variationnelle :

on prend une fonction de $\mathbf{v}$ de $\mathcal{V}$, et on forme

$$\int_{\Omega} \mathcal{J} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathcal{A}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \stackrel{(2.88)}{=} \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{rot } \mathcal{A} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

La formulation variationnelle est alors

Trouver $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ tel que

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{J} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

◦ Application du théorème de Lax-Milgram :

- $V = \mathcal{V}$
- $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$
- $l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{J} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$

Pour vérifier les propriétés sur a et l , il est commode de définir une norme équivalente sur $\mathcal{V}$. On utilise une inégalité de Weber (corollaire A.3) :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad C_0 \|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}} \leq |\mathbf{v}|_{\mathbf{rot}, \text{div}} = \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_0 \leq \|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}}.$$

Ainsi, on peut remplacer la norme canonique $\|\cdot\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}}$ par $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_0$. Les vérifications inhérentes aux hypothèses du théorème se font alors sans problèmes particuliers. Pour la dépendance par rapport à $\mathcal{J}$, on trouve

$$\|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}} \leq \frac{\mu^*}{C_0^2} \|\mathcal{J}\|_0.$$

◦ Retour au problème de départ :

il est prudent de réaliser cette étape avec attention, car elle est plus complexe que pour l'électrostatique ; en particulier, il est absolument nécessaire de faire appel à la condition (2.22), i. e. $\text{div} \mathcal{J} = 0$, au cours de la reconstruction...

Nous partons de la forme variationnelle. Pour revenir à la forme initiale, nous voulons passer par les distributions. La *difficulté*, ici, est que $\mathcal{D}(\Omega)^3$ n'est pas inclus dans $\mathcal{V}$, à cause de la condition de divergence nulle. Pour la contourner, nous recourons au procédé ci-dessous :

soit $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$. Nous voulons nous ramener à un élément de $\mathcal{V}$. Pour cela, il faut donc 'annuler' la divergence. Nous définissons $q_{\mathbf{w}}$ comme étant l'unique solution de

Trouver $q_{\mathbf{w}} \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\Delta q_{\mathbf{w}} = \text{div} \mathbf{w},$$

et nous posons $\mathbf{v}_{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \mathbf{grad} q_{\mathbf{w}}$. Quelles sont les propriétés satisfaites par $\mathbf{v}_{\mathbf{w}}$?

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_{\mathbf{w}} \in L^2(\Omega)^3 \\ \mathbf{rot} \mathbf{v}_{\mathbf{w}} = \mathbf{rot} \mathbf{w} : \mathbf{rot} \mathbf{v}_{\mathbf{w}} \in L^2(\Omega)^3 \\ \mathbf{v}_{\mathbf{w}} \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0 \\ \text{div} \mathbf{v}_{\mathbf{w}} = \text{div} \mathbf{w} - \Delta q_{\mathbf{w}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{v}_{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}.$$

Il est licite d'injecter $\mathbf{v}_{\mathbf{w}}$ dans la formulation variationnelle, puis de le remplacer par la différence $\mathbf{w} - \mathbf{grad} q_{\mathbf{w}}$. On obtient

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{J} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathcal{J} \cdot \mathbf{grad} q_{\mathbf{w}} \, d\mathbf{x} \stackrel{(2.87)}{=} \int_{\Omega} \mathcal{J} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x},$$

puisque $q_{\mathbf{w}}$ s'annule sur le bord et puisque $\text{div} \mathcal{J} = 0$. On a donc

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{J} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)^3.$$

On trouve alors, au sens des distributions

$$\langle \mathcal{J}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{A}), \mathbf{w} \rangle, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)^3.$$

En d'autres termes,

$$\mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{A}) = \mathcal{J}.$$

Remarque 2.3.3 Si on a simplement $\mathcal{J} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)'$ (cf. (2.20)), on remplace le second membre de la formulation variationnelle par

$${}_{\mathcal{V}'} \langle \mathcal{J}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}},$$

puisque $\mathcal{V} \subset H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ implique $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' \subset \mathcal{V}'$, i. e. $\mathcal{J}$ appartient bien au dual de $\mathcal{V}$. Pour la première étape, il faut passer par les crochets de dualité ${}_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' } \langle \mathcal{J}, \mathbf{v} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)}$. Pour tout $\mathbf{v}$ de $\mathcal{V}$, on utilise la densité de $\mathcal{D}(\Omega)^3$ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ (dont un sous-espace est $\mathcal{V}$) : soit $(\mathbf{v}_k)_k$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)^3$ telle que $\mathbf{v}_k \rightarrow \mathbf{v}$ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$. On a

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{V}'} \langle \mathcal{J}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}} &= {}_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' } \langle \mathcal{J}, \mathbf{v} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} {}_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' } \langle \mathcal{J}, \mathbf{v}_k \rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{J}, \mathbf{v}_k \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{A}), \mathbf{v}_k \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{A}, \mathbf{rot} \mathbf{v}_k \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_k \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Pour la troisième étape, on reprend le raisonnement ci-dessus, en utilisant le fait que $\mathcal{J}$ appartient à $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)'$ et que $\operatorname{div} \mathcal{J} = 0$, ce qui permet d'éliminer le terme ${}_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' } \langle \mathcal{J}, \mathbf{grad} q_{\mathbf{w}} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)}$, par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (si on prend $(q_k)_k$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui tend vers $q_{\mathbf{w}}$ dans $H_0^1(\Omega)$, alors $(\mathbf{grad} q_k)_k$ tend vers $\mathbf{grad} q_{\mathbf{w}}$ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ et l'on a $\langle \mathcal{J}, \mathbf{grad} q_k \rangle = 0$ pour tout k .)

Remarque 2.3.4 Il existe une preuve alternative de l'existence et de l'unicité de $\mathcal{A}$, et donc de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{H}$. Pour cela, on se place dans l'espace $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, et l'on introduit une formulation variationnelle de type point-selle, ou problème mixte (cf. chapitre 3).

Théorème 2.3.4 Soit Ω un domaine simplement connexe de type (H3). Il existe un, et un seul, couple magnétostatique $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$ solution des équations de Maxwell statiques. De plus il dépend continûment de la densité de courant $\mathcal{J}$.

2.4 Dépendance en temps

Nous revenons aux équations de Maxwell complètes (2.1-2.4). Nous allons commencer par examiner les éléments de modélisation physique de la section 2.1, d'un point de vue mathématique. A l'aide de quelques hypothèses sur les données $\mathcal{J}$ et $\mathcal{R}$, ceci nous permettra de préciser *a priori* l'appartenance du champ électromagnétique à des espaces de Sobolev. Dans un second temps, nous déterminerons une forme équivalente de ces équations, qui découple dans une certaine mesure les champs électrique et magnétique. La question de l'existence du champ sur un *intervalle de temps* sera examinée par la suite.

Dans les deux dernières sous-sections, nous nous plaçons dans un ouvert Ω de type (H3).

2.4.1 Éléments de modélisation : hypothèses sur les données

Il est à noter que nous nous intéressons ici principalement au champ électromagnétique dans l'espace $\mathbb{R}^3$, sur un intervalle de temps de la forme $[0, T]$, avec $T \in \mathbb{R}_*^+$. Sous réserve de quelques hypothèses sur l'énergie et sur les données, nous allons construire des 'bons candidats', en terme d'espaces fonctionnels du champ électromagnétique. A un instant t , si on suppose que l'énergie électromagnétique totale est *finie*, on a d'après (2.6)

$$W_{tot}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \{ \varepsilon(\mathbf{x}) |\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)|^2 + \mu(\mathbf{x}) |\mathcal{H}(\mathbf{x}, t)|^2 \} d\mathbf{x} < \infty.$$

Par voie de conséquence, nous en déduisons que la fonction (de la variable d'espace), qui à $\mathbf{x}$ associe $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$, est un élément de $L^2(\mathbb{R}^3)^3$. Il en est de même pour le champ magnétique, ce que nous écrivons

$$\mathcal{E}(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^3)^3, \quad \mathcal{H}(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^3)^3.$$

Maintenant, d'après (2.11), si $\mathcal{J} \equiv 0$, W_{tot} ne varie pas, ce qui signifie que l'énergie électromagnétique totale est conservée. Dans le cas général ($\mathcal{J} \not\equiv 0$), il est naturel de supposer que les variations de W_{tot} restent *bornées* sur $[0, T]$. Si, de plus, W_{tot} est *mesurable* sur $]0, T[$, alors

$$W_{tot} \in L^2(0, T; \mathbb{R}).$$

On peut alors en déduire, si $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{H}$ est *mesurable*,

$$\mathcal{E} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3) \text{ et } \mathcal{H} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3).$$

On réécrit la variation de l'énergie par rapport au temps (2.11), sous la forme :

$$- \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} W_{tot}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \{ \varepsilon \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mu \mathcal{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \} d\mathbf{x}. \quad (2.28)$$

Dans la suite, nous faisons l'**hypothèse** que la densité de courant $\mathcal{J}$, qui est une *donnée*, est *mesurable* sur $]0, T[$, et que, de plus²

$$\mathcal{J} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3). \quad (2.29)$$

Dans ce cas, $\mathcal{E} \cdot \mathcal{J}$ appartient à l'espace $L^1(0, T; L^1(\mathbb{R}^3))$. Ainsi, W_{tot} est une fonction $\mathcal{C}^0$ en temps. Enfin, on considère que

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3) \text{ et } \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3),$$

pour 'justifier' l'écriture de la dernière égalité de (2.28). A partir de là, nous utilisons les équations de Maxwell (2.1-2.4). D'après la relation exprimant l'absence de monopoles (2.4), nous trouvons que

$$\mathcal{H} \in L^2(0, T; H(\operatorname{div} \mu, \mathbb{R}^3)).$$

Par ailleurs, l'équation de Faraday (2.2) permet d'affirmer que

$$\mathcal{E} \in L^2(0, T; H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)).$$

²pour justifier les 'estimations en énergie' à venir (cf. (2.37) et (2.45) *infra*), nous ferons l'**hypothèse** plus forte

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3).$$

On écrit la loi d'Ampère (2.1) sous la forme $\mathbf{rot} \mathcal{H} = \mathcal{J} + \varepsilon \partial_t \mathcal{E}$, d'où l'on tire que

$$\mathcal{H} \in L^2(0, T; H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div} \mu, \mathbb{R}^3)).$$

Ci-dessus, nous avons établi les résultats de régularité dite 'minimale', *sous réserve* de l'hypothèse (2.29) sur la donnée $\mathcal{J}$.

Rappelons maintenant que la loi de conservation de la charge, qui est obtenue en dérivant la loi de Coulomb par rapport au temps et en prenant la divergence de la relation d'Ampère, s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{J} = 0. \quad (2.30)$$

Il faut donc bien garder à l'esprit que *les régularités des données $\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$ sont liées*. En effet, (2.29) implique la régularité suivante sur $\mathcal{R}$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t}(\cdot, t) \in H^{-1}(\mathbb{R}^3), \text{ presque pour tout } t \in]0, T[$$

puisque $\operatorname{div} : L^2(\mathbb{R}^3)^3 \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{J}(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ p. p.

Comme dans le cas statique, nous ferons souvent l'**hypothèse supplémentaire** de régularité 'usuelle' (en espace), c'est-à-dire que

$$(\partial_t) \mathcal{R} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)), \quad (2.31)$$

ce qui permet de *symétriser* le résultat portant sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$, puisque

$$\mathcal{E} \in L^2(0, T; H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div} \varepsilon, \mathbb{R}^3)).$$

Bien sûr, nous n'avons *démontré* aucun résultat dans cette sous-section. Nous avons simplement inféré des résultats d'appartenance à partir d'une part de considérations 'raisonnables' sur l'énergie et d'autre part d'*hypothèses sur les données* (2.29) et (2.31). Nous affinerons ces résultats lorsque nous établirons l'existence du champ électromagnétique (cf. sous-section 2.4.3).

2.4.2 Les équations de Maxwell reformulées

Nous nous plaçons dans la suite, dans un ouvert Ω de type (H3). Comme pour le champ 'statique', on choisit d'entourer le domaine par un conducteur parfait. En plus des équations de Maxwell (2.1-2.4) et de la loi de conservation de la charge (2.30), nous ajoutons donc :

- Une condition aux limites de type conducteur parfait

$$\mathcal{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \quad (2.32)$$

- Deux conditions initiales

$$\mathcal{E}(\cdot, 0) = \mathcal{E}_0 \quad (2.33)$$

$$\mathcal{H}(\cdot, 0) = \mathcal{H}_0. \quad (2.34)$$

Les conditions (2.33-2.34) décrivent l'état du champ à l'instant (initial) $t = 0$. Nous nous intéressons à son évolution sur un intervalle de temps du type $]0, T[$ ($T < +\infty$), dans Ω .

Théorème 2.4.1 Dans le problème du premier ordre en temps (2.1-2.4), (2.32-2.34), on peut remplacer (2.1) par

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E}) = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}, \text{ et} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(\cdot, 0) = \mathcal{E}_1 := \varepsilon^{-1} [\mathbf{rot} \mathcal{H}_0 - \mathcal{J}(\cdot, 0)]. \quad (2.36)$$

Preuve : En dérivant (2.1) par rapport à t , on trouve, dans $\mathcal{D}'([0, T] \times \mathbb{R}^3)^3$,

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - \mathbf{rot} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \xrightarrow{(2.2)} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E}) = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}.$$

En considérant (2.1) à $t = 0$, on retrouve $\partial_t \mathcal{E}(\cdot, 0) = \mathcal{E}_1$.

On remarque que, la variable auxiliaire

$$\mathbf{U} := \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \mathbf{rot} \mathcal{H} + \mathcal{J}$$

étant nulle (cf. (2.1)), il est licite de la supposer régulière !

Dans la réciproque, on utilise cette régularité, ainsi que les relations (2.2) et (2.35), pour trouver

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - \mathbf{rot} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \stackrel{(2.2)}{=} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E}) + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \stackrel{(2.35)}{=} 0.$$

$\mathbf{U}$ est donc une constante. Par ailleurs,

$$\mathbf{U}(\cdot, 0) = \varepsilon \mathcal{E}_1 - \mathbf{rot} \mathcal{H}_0 + \mathcal{J}(\cdot, 0) = 0.$$

Ainsi, $\mathbf{U} \equiv 0$, ce qu'il fallait démontrer. ■

A partir de là, nous allons construire une borne supérieure de la variation du champ électrique $\mathcal{E}$ au cours du temps, entre les instants 0 et T . En d'autres termes, il s'agit de borner uniformément la valeur de $\mathcal{E}$ à un instant donné t_0 en fonction d'une part de sa valeur initiale, et d'autre part des données. Pour cela, à l'aide de la technique dite d'*estimation en énergie*, commençons par former l'intégrale du produit scalaire de (2.35) et $\partial_t \mathcal{E}(\cdot, t)$:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E}) \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} d\mathbf{x}.$$

Grâce à la condition aux limites (2.32) qui est également valable pour $\partial_t \mathcal{E}(\cdot, t)$, on déduit de la formule d'intégration par parties (2.86) que

$$\int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E} \cdot \mathbf{rot} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} d\mathbf{x}.$$

Or, on sait que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \varepsilon \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right|^2 d\mathbf{x} \right] &= 2 \int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} d\mathbf{x}, \text{ et} \\ \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathcal{E}|^2 d\mathbf{x} \right] &= 2 \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E} \cdot \mathbf{rot} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'identité suivante

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \left\{ \varepsilon \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathcal{E}|^2 \right\} d\mathbf{x} \right] = -2 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} d\mathbf{x}.$$

D'après l'inégalité $-2(u, v) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$, avec $u = \varepsilon^{-1/2} \partial_t \mathcal{J}$ et $v = \varepsilon^{1/2} \partial_t \mathcal{E}$, on en déduit que

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \left\{ \varepsilon \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathcal{E}|^2 \right\} d\mathbf{x} \right] \leq \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \right|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \varepsilon \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right|^2 d\mathbf{x}.$$

Si l'on intègre cette inégalité entre les instants 0 et t , on arrive à

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathcal{E}|^2 \right\}(\cdot, t) d\mathbf{x} \\ & \leq \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon |\mathcal{E}_1|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathcal{E}_0|^2 \right\} d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \right|^2 d\mathbf{x} ds + \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right|^2 d\mathbf{x} ds. \end{aligned}$$

Pour progresser dans l'obtention d'une borne supérieure, nous utilisons maintenant un résultat dit lemme de GRONWALL.

Lemme 2.4.1 Soient $g \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathbb{R}^+)$ donnée, et $\varphi \in \mathcal{C}^0(0, T)$, telles que

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + \int_0^t \varphi(s) ds + \int_0^t g(s) ds.$$

Alors, il existe une constante $C_T > 0$, qui ne dépend que de T , telle que

$$\sup_{t_0 \in [0, T]} \varphi(t_0) \leq C_T \left[\varphi(0) + \int_0^T g(s) ds \right].$$

Preuve : On considère $\psi(t) = K_T + \int_0^t \varphi(s) ds$, avec $K_T = \varphi(0) + \int_0^T g(s) ds$:

$$\psi'(t) = \varphi(t) \leq \varphi(0) + \int_0^t \varphi(s) ds + \int_0^t g(s) ds \stackrel{g \geq 0}{\leq} K_T + \int_0^t \varphi(s) ds = \psi(t).$$

Ainsi, $(\ln \psi)'(t) \leq 1$ pour tout t . En conséquence, $\psi(t) \leq \psi(0) e^t \leq \psi(0) e^T = K_T e^T$. De plus, par construction, φ et ψ vérifient l'inégalité $\varphi(t) \leq \psi(t)$, pour tout t . Finalement,

$$\sup_{t_0 \in [0, T]} \varphi(t_0) \leq e^T \left[\varphi(0) + \int_0^T g(s) ds \right].$$

■

On pose ici

$$\varphi(t) = \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathcal{E}|^2 \right\}(\cdot, t) d\mathbf{x}, \text{ et } g(t) = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(\cdot, t) \right|^2 d\mathbf{x}.$$

Le lemme de Gronwall nous permet d'affirmer qu'il existe une constante $C_T > 0$ telle que

$$\begin{aligned} & \sup_{t_0 \in [0, T]} \left\{ \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathcal{E}|^2 \right\}(\cdot, t_0) d\mathbf{x} \right\} \\ & \leq C_T \left[\int_{\Omega} \left\{ \varepsilon |\mathcal{E}_1|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathcal{E}_0|^2 \right\} d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \right|^2 d\mathbf{x} ds \right]. \quad (2.37) \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1 *Le calcul que nous venons d'effectuer est formel, au sens où les régularités sur les fonctions g et φ du lemme de Gronwall ne sont pas satisfaites a priori. Ceci étant, cette majoration intervient de façon fondamentale (et justifiée !) dans la démonstration du théorème de Lions et Magenes que nous introduisons dans la prochaine sous-section, et elle permet de bien comprendre de quelles quantités (données et/ou conditions initiales) dépend la solution.*

On a prouvé un résultat qui concerne le champ électrique, sous les hypothèses de régularité 'minimale'. Sous les hypothèses de régularité 'usuelle' – $\mathcal{R}(\cdot, t)$ dans $L^2(\Omega)$, en supposant que $\mathcal{R}$ est continue en temps – la loi de Coulomb (2.3) nous permet d'obtenir immédiatement

$$\sup_{t_0 \in [0, T]} \int_{\Omega} \operatorname{div} (\varepsilon \mathcal{E}(\cdot, t_0))^2 d\mathbf{x} = \sup_{t_0 \in [0, T]} \int_{\Omega} \mathcal{R}(\cdot, t_0)^2 d\mathbf{x}. \quad (2.38)$$

On peut reprendre le même procédé pour le champ magnétique $\mathcal{H}$, et arriver au système du second ordre en temps ci-dessous

Théorème 2.4.2 *Dans le problème du premier ordre en temps (2.1-2.4), (2.32-2.34), on peut remplacer (2.2) par les trois conditions*

$$\mu \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} + \operatorname{rot} (\varepsilon^{-1} (\operatorname{rot} \mathcal{H} - \mathcal{J})) = 0, \quad (2.39)$$

$$\varepsilon^{-1} (\operatorname{rot} \mathcal{H} - \mathcal{J}) \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0, \text{ et} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(\cdot, 0) = \mathcal{H}_1 := -\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{E}_0. \quad (2.41)$$

En ce qui concerne les estimations d'énergie, on veut contrôler des quantités semblables à (2.37-2.38) pour $\mathcal{H}$. L'estimation en énergie (2.37) obtenue pour $\mathcal{E}$ nous permet de conclure directement, par retour à (2.1), (2.2) et (2.4).

Remarque 2.4.2 *Notons que, et ceci sera fort utile dans la suite, les résultats sur le champ électrique $\mathcal{E}$ contribuent à déterminer leur contrepartie sur $\mathcal{H}$. Ce point sera à nouveau mis en évidence dans la prochaine sous-section...*

On écrit tout simplement que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right|^2 d\mathbf{x} &\stackrel{(2.2)}{=} \int_{\Omega} \mu^{-1} |\operatorname{rot} \mathcal{E}|^2 d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\operatorname{rot} \mathcal{H}|^2 d\mathbf{x} &\stackrel{(2.1)}{=} \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon^{1/2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \varepsilon^{-1/2} \mathcal{J} \right\}^2 d\mathbf{x}, \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right|^2 + \varepsilon^{-1} |\mathcal{J}|^2 \right\} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

D'après (2.4), (2.37), et la définition de $\mathcal{E}_1$ et de $\mathcal{H}_1$, on vérifie facilement que l'on est parvenu à l'estimation (à un facteur 2 près)

$$\begin{aligned} &\sup_{t_0 \in [0, T]} \left\{ \int_{\Omega} \left\{ \mu \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right|^2 + \varepsilon^{-1} |\operatorname{rot} \mathcal{H}|^2 + (\operatorname{div} (\mu \mathcal{H}))^2 \right\}(\cdot, t_0) d\mathbf{x} \right\} \\ &\leq C_T \left[\int_{\Omega} \{ \mu |\mathcal{H}_1|^2 + \varepsilon^{-1} |\operatorname{rot} \mathcal{H}_0|^2 \} d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \right|^2 d\mathbf{x} ds \right] \\ &\quad + \sup_{t_0 \in [0, T]} \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\mathcal{J}|^2(\cdot, t_0) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

On a donc borné $\mathcal{H}$ en fonction des données initiales $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$, ainsi que de la donnée $\mathcal{J}$.

2.4.3 Existence d'une solution

Dans cette section, nous supposons que le domaine Ω est simplement connexe. Sous réserve que cette hypothèse supplémentaire est satisfaite, nous allons prouver qu'il existe une solution unique aux équations de Maxwell (2.1-2.4), complétées par (2.30) et (2.32-2.34). De plus, nous vérifierons que cette solution dépend continûment des données $\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$, et des valeurs initiales $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{H}_0$.

Nous bornons les seconds membres des estimations en énergie sur $\mathcal{E}$ (2.37)-(2.38) (et par voie de conséquence (2.42)) :

- $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ pour borner (2.37).
- $\mathcal{R} \in \mathcal{C}^1(0, T; L^2(\Omega))$ pour borner (2.38) ainsi que la norme de l'expression dérivée³, c'est-à-dire

$$\sup_{t_0 \in [0, T]} \|\operatorname{div}(\varepsilon \partial_t \mathcal{E}(\cdot, t))\|_0^2 = \sup_{t_0 \in [0, T]} \|\partial_t \mathcal{R}(\cdot, t)\|_0^2.$$

En conséquence, d'après (2.30), $\mathcal{J} \in \mathcal{C}^0(0, T; H(\operatorname{div}, \Omega))$.

Pour récapituler

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R} \text{ et } \mathcal{J} \text{ vérifient (2.30)} \\ \mathcal{R} \in \mathcal{C}^1(0, T; L^2(\Omega)) \\ \mathcal{J} \in \mathcal{C}^0(0, T; H(\operatorname{div}, \Omega)) ; \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3). \end{array} \right. \quad (2.43)$$

On suppose par ailleurs que les données initiales sont telles que (cf. hypothèses 'usuelles' de régularité et conditions aux limites de type conducteur parfait)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_0 \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \text{ tel que } \operatorname{div}(\varepsilon \mathcal{E}_0) = \mathcal{R}(0), \\ \mathcal{H}_0 \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div} \mu, \Omega) \text{ tel que } \operatorname{div}(\mu \mathcal{H}_0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.44)$$

NB. La valeur initiale du champ magnétique $\mathcal{H}_0$ intervient dans la définition de $\mathcal{E}_1$, cf. (2.36).

A partir de là, nous allons prouver l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données du champ électrique $\mathcal{E}$. On a vu que, pour déterminer une estimation en énergie telle que (2.37), il a fallu utiliser une formulation du second ordre en temps (2.35). Nous procédons de même pour la démonstration de l'existence d'une solution. Pour arriver au résultat, nous allons donc remplacer la relation (2.1) du premier ordre en temps sur $\mathcal{E}$ par la relation (2.35) du second ordre en temps sur $\mathcal{E}$, complétée par la condition initiale (2.36). Une fois le résultat d'existence prouvé pour le champ électrique $\mathcal{E}$, nous vérifierons que l'on peut retrouver la formulation originelle en $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$, incluant en particulier la relation d'Ampère, ce qui permet alors de démontrer l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données du champ magnétique $\mathcal{H}$.

Notre schéma de preuve est similaire à celui du cas 'statique', cf. section 2.3 : construction de la formulation variationnelle associée, utilisation de la théorie développée cette fois

³L'obtention d'une borne de type (2.38) requiert simplement que $\mathcal{R} \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$. Nous aurons besoin de la régularité additionnelle, de type $\mathcal{C}^1$, pour conclure notre preuve, ce qui nous permettra de 'symétriser' le résultat de régularité portant sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$.

par Lions et Magenes pour prouver qu'il existe une solution unique au problème écrit sous forme variationnelle, puis retour au problème de départ. De fait, nous allons voir que le théorème de Lions et Magenes regroupe ces trois étapes en une seule, et nous expliquerons rapidement pourquoi, après l'énoncé du-dit théorème. Autant que faire se peut, nous cacherons la dépendance en temps, en nous concentrant sur la valeur des champs à un instant donné, c'est-à-dire $\mathbf{u}(t) : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Théorème de LIONS-MAGENES [54, Thm 8.2, p. 296] :

les équations de Maxwell du second ordre en $\mathcal{E}$ s'inscrivent dans le cadre

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ tel que } u''(t) + Au(t) = f(t) \text{ dans } V', \ 0 < t < T \\ \text{avec les données de Cauchy } u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1. \end{array} \right. \quad (2.45)$$

On choisit

- V, H deux espaces de Hilbert, $H' \equiv H$, V dense dans H .
- a une forme bilinéaire, continue et symétrique sur V ; on suppose qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $a + \lambda(\cdot, \cdot)_H$ est coercitive sur V , c'est-à-dire

$$\exists \alpha > 0, \quad a(v, v) + \lambda \|v\|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

On définit $A \in \mathcal{L}(V, V')$ par $V' \ni Au, v \rangle_V := a(u, v)$.

- f appartenant à $L^2(0, T; H)$.
- $u_0 \in V$ et $u_1 \in H$.

Théorème 2.4.3 *On suppose les hypothèses ci-dessus vérifiées.*

Le problème (2.45) est équivalent à la formulation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ t. q. } V' \ni u''(t), v \rangle_V + a(u(t), v) = (f(t), v)_H \quad \forall v \in V, \ 0 < t < T \\ \text{avec les données de Cauchy } u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1. \end{array} \right. \quad (2.46)$$

Il existe une solution et une seule aux problèmes (2.45) et (2.46).

De plus, l'application η

$$\begin{aligned} \eta : L^2(0, T; H) \times V \times H &\rightarrow \mathcal{C}^0(0, T; V) \times \mathcal{C}^0(0, T; H) \\ (f, u_0, u_1) &\mapsto (u, u') \end{aligned}$$

est continue.

D'après la définition de η , et notamment la structure de l'espace d'arrivée, on constate qu'à un instant donné t , $u(\cdot, t)$ appartient à V , alors que $\partial_t u(\cdot, t) = u'(\cdot, t)$ appartient à H . Pour ce qui est de $\partial_{t^2}^2 u(\cdot, t) = u''(\cdot, t)$, il convient d'utiliser la théorie des espaces dépendant de $(\mathbf{x}, t)$ avec quelques précautions élémentaires. D'après la proposition A.4, Au appartient à $\mathcal{C}^0(0, T; V')$. On en déduit alors que

$$f, Au \in L^2(0, T; V') \implies u'' \in L^2(0, T; V').$$

Ainsi $\partial_{t^2}^2 u(\cdot, t)$ appartient à V' . En conclusion, comme V est strictement inclus dans H , la solution est plus régulière en espace que sa dérivée en temps, elle-même plus régulière

que la dérivée seconde en temps.

NB. Par définition de a et de A , les trois étapes sont regroupées en une seule. En effet, l'aller-retour du problème initial à la formulation variationnelle est immédiat.

Le point *critique* est qu'il convient de définir deux espaces de Sobolev V et H .

Revenons tout d'abord à l'interprétation mathématique de (2.35). Si l'on ne s'intéresse qu'à la dépendance en espace, on remarque que (et ça suffit!) cette égalité est posée au sens des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$; on observe néanmoins que

- $-\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \in L^2(\Omega)^3$.
- $\mathbf{rot} \mathcal{E} \in L^2(\Omega)^3$, ce qui entraîne $\mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E}) \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)'$.
En effet, posons $\mathbf{W} = \mathbf{rot} \mathcal{E}$. Pour tout élément $\mathbf{f}$ de $\mathcal{D}(\Omega)^3$, on trouve, au sens des distributions,

$$\langle \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{W}), \mathbf{f} \rangle = \langle \mu^{-1} \mathbf{W}, \mathbf{rot} \mathbf{f} \rangle = \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{W} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{f} \, d\mathbf{x}.$$

L'intégrale est linéaire et continue en norme $\|\cdot\|_{0, \mathbf{rot}}$. Comme $\mathcal{D}(\Omega)^3$ est dense dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, il est possible de prolonger cette forme linéaire et continue à $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$. De plus,

$$\|\mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{W})\|_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)'} = \sup_{\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{W} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}}} \leq \frac{1}{\mu^*} \|\mathbf{W}\|_0;$$

l'application de $L^2(\Omega)^3$ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)'$, qui à $\mathbf{W}$ associe $\mathbf{rot} \mathbf{W}$, est continue. **CQFD**

- Par différence, $\varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}$ appartient lui aussi à $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)'$.

Il est donc licite de considérer que cette équation est posée dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)'$. On obtient alors son équivalent variationnel (les crochets expriment la dualité dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)^4$), pour tout $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$:

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' &< \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E}), \mathbf{v} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} = -H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' < \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}, \mathbf{v} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} \\ \iff H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' &< \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}, \mathbf{v} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} + H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' < \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E}), \mathbf{v} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} = -\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}, \mathbf{v}\right)_0 \\ \iff H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' &< \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}, \mathbf{v} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} + (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_0 = -\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}, \mathbf{v}\right)_0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Nous nous sommes donc placés dans le formalisme de Lions et Magenes. Vérifions à présent les hypothèses du théorème 2.4.3.

- $V := H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ et $H := L^2(\Omega)^3$ sont deux espaces de Hilbert;
 V est dense dans H , puisque V contient $\mathcal{D}(\Omega)$.
- $a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w} \, d\mathbf{x}$.
 a est donc bilinéaire, continue et symétrique sur V . De plus, on a

$$a(v, v) + \lambda \|v\|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V,$$

avec $\lambda = \alpha = 1/\mu^*$.

- D'après (2.43), la donnée $-\partial_t \mathcal{J}$ appartient à $L^2(0, T; H)$.
- Par définition, on a $\mathcal{E}_0 \in V$ et $\mathcal{E}_1 \in H$.

En conclusion, on vient de démontrer la

⁴Ecrire une FV en temps, $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ en espace et l'indexer...

Proposition 2.4.1 *Il existe une solution et une seule au problème (2.35), complété de la condition aux limites (2.32) et des conditions initiales (2.33) et (2.36), dont la régularité en temps est*

$$(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \in \mathcal{C}^0(0, T; H_0(\mathbf{rot}, \Omega)) \times \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

Qui plus est, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ dépendent continûment des données $\mathcal{J}$, $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ dans ces espaces.

NB. Nous avons donc retrouvé le contrôle en énergie (2.37).

A partir de ce résultat concernant le champ électrique, nous allons en construire un second, portant sur l'existence et l'unicité du champ magnétique $\mathcal{H}$. On pose

$$\begin{aligned} H(\operatorname{div} \mu 0, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{div} \mu, \Omega) : \operatorname{div}(\mu \mathbf{v}) = 0\} \\ H_0(\operatorname{div} \mu 0, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{div} \mu 0, \Omega) : (\mu \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0\} \\ \mathcal{W}(\mu) &:= H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div} \mu 0, \Omega). \end{aligned}$$

Proposition 2.4.2 *Il existe une solution et une seule au problème (2.35-2.36), complété de la relation de Faraday (2.2) et de l'absence de monopoles (2.4), ainsi que des conditions initiales (2.33-2.34) avec $(\mathcal{E}_0, \mathcal{H}_0) \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathcal{W}(\mu)$. La régularité en temps pour $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ est donnée ci-dessus, et celle pour le champ magnétique est*

$$(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathcal{W}(\mu)) \times \mathcal{C}^0(0, T; H_0(\operatorname{div} \mu 0, \Omega)).$$

Qui plus est, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ dépendent continûment des données $\mathcal{J}$, $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{H}_0$ dans ces espaces.

Preuve : Pour commencer, on utilise la relation de Faraday $\mathcal{H}' = -\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E}$, conjointement avec le résultat de la proposition 2.4.1 sur le rotationnel de $\mathcal{E}$. On trouve

$$\mathcal{H}' \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

A l'aide de la condition initiale (2.34) et de l'identité

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + \int_0^t \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(s) ds,$$

on en déduit alors un premier résultat d'existence et de régularité sur le champ magnétique proprement dit :

$$\mathcal{H} \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

D'après la relation d'absence de monopoles, on en déduit immédiatement

$$\mathcal{H} \in \mathcal{C}^0(0, T; H(\operatorname{div} \mu 0, \Omega)), \text{ puis } \mathcal{H}' \in \mathcal{C}^0(0, T; H(\operatorname{div} \mu 0, \Omega)).$$

Si on reprend la relation de Faraday, il est licite d'écrire $(\mu \mathcal{H})' \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = -\mathbf{rot} \mathcal{E} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0$, d'après la condition aux limites de type conducteur parfait. Comme $\mathcal{H}_0$ est également à trace normale nulle par hypothèse, on arrive maintenant à

$$\mathcal{H}' \in \mathcal{C}^0(0, T; H_0(\operatorname{div} \mu 0, \Omega)), \text{ puis } \mathcal{H} \in \mathcal{C}^0(0, T; H_0(\operatorname{div} \mu 0, \Omega)).$$

Si l'on considère à nouveau la variable auxiliaire $\mathbf{U}$ définie par $\mathbf{U} := \varepsilon \partial_t \mathcal{E} - \mathbf{rot} \mathcal{H} + \mathcal{J}$, on a d'après la proposition A.4, la propriété

$$\mathbf{U} \in \mathcal{C}^0(0, T; H^{-1}(\Omega)^3).$$

Qui plus est, d'après la formulation du second ordre en temps et la relation de Faraday

$$\mathbf{U}' \stackrel{\text{Thm A.5}}{=} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - \mathbf{rot} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \stackrel{(2.2)}{=} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E}) + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \stackrel{(2.35)}{=} 0.$$

$\mathbf{U}$ est donc constante. D'après la condition initiale (2.36), $\mathbf{U}(0) = 0$, d'où $\mathbf{U} \equiv 0$, i.e. la relation d'Ampère (2.1). On en conclut que

$$\mathbf{rot} \mathcal{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathcal{J} \in C^0(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

Ainsi :

$$\mathcal{H} \in C^0(0, T; \mathcal{W}(\mu)).$$

■

NB. Au cours de la preuve, on a bien retrouvé la relation d'Ampère (2.1).

Pour pouvoir conclure à l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données du champ électromagnétique, traitons la cas de la relation de Coulomb (2.3). Si on introduit cette fois la variable auxiliaire $\mathbf{V} := \operatorname{div} \varepsilon \mathcal{E} - \mathcal{R}$, on a d'après les hypothèses (2.43) sur $\mathcal{R}$ et les résultats des propositions 2.4.1 et A.4, la propriété

$$\mathbf{V} \in C^0(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Qui plus est

$$\mathbf{V}' \stackrel{\text{Thm A.5}}{=} \operatorname{div} \left(\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} \stackrel{(2.1)}{=} \operatorname{div} \mathcal{J} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} \stackrel{(2.30)}{=} 0 ;$$

$$\mathbf{V}(0) = \operatorname{div} \varepsilon \mathcal{E}_0 - \mathcal{R}(0) \stackrel{(2.44)}{=} 0.$$

Donc $\mathbf{V} \equiv 0$, et la relation de Coulomb est automatiquement vérifiée par la solution $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ de la proposition 2.4.2. C'est donc bien l'unique solution des équations de Maxwell (2.1-2.4), complétées de (2.30) et (2.32-2.34) : c'est le *champ électromagnétique* cherché.

Enfin, d'après (2.43), si on pose

$$\mathcal{X}(\varepsilon) := H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\operatorname{div} \varepsilon, \Omega),$$

on déduit de la régularité de $\mathcal{R}$, i.e. $\mathcal{R} \in C^1(0, T; L^2(\Omega))$, que

$$(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \in C^0(0, T; \mathcal{X}(\varepsilon)) \times C^0(0, T; H(\operatorname{div} \varepsilon, \Omega)),$$

ce qui achève de 'symétriser' les résultats de régularité portant sur $\mathcal{E}$ et sur $\mathcal{H}$.

En conclusion, nous avons démontré le résultat suivant

Théorème 2.4.4 *Soit Ω un domaine simplement connexe de type (H3), et $T > 0$. Supposons que les données $(\mathcal{R}, \mathcal{J})$ satisfassent à (2.43), et que les valeurs initiales $(\mathcal{E}_0, \mathcal{H}_0)$ appartiennent à $\mathcal{X}(\varepsilon) \times \mathcal{W}(\mu)$, avec $\operatorname{div}(\varepsilon \mathcal{E}_0) = \mathcal{R}(0)$. Alors, il existe une solution et une seule au système des équations de Maxwell (2.1-2.4), avec (2.30) et (2.32-2.34), dans le domaine Ω entre les instants 0 et T , telle que*

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}, \mathcal{E}') &\in C^0(0, T; \mathcal{X}(\varepsilon)) \times C^0(0, T; H(\operatorname{div} \varepsilon, \Omega)), \\ (\mathcal{H}, \mathcal{H}') &\in C^0(0, T; \mathcal{W}(\mu)) \times C^0(0, T; H_0(\operatorname{div} \mu, \Omega)). \end{aligned}$$

De plus, $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{H}'$ dépendent continûment des données dans leurs espaces respectifs.

Remarque 2.4.3 (régularité 'minimale') Si on suppose simplement que

$$\mathcal{R} \in \mathcal{C}^0(0, T; H^{-1}(\Omega)) \text{ et } \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

on aboutit à

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}, \mathcal{E}') &\in \mathcal{C}^0(0, T; H_0(\mathbf{rot}, \Omega)) \times \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega)^3), \\ (\mathcal{H}, \mathcal{H}') &\in \mathcal{C}^0(0, T; \mathcal{W}(\mu)) \times \mathcal{C}^0(0, T; H_0(\operatorname{div} \mu, \Omega)). \end{aligned}$$

Corollaire 2.4.1 $\mathcal{D}$ et $\mathcal{B}$ satisfont respectivement aux mêmes résultats de régularité que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$, et dépendent eux-aussi, ainsi que leurs dérivées premières, continûment des données.

Preuve : C'est une conséquence triviale des relations constitutives $\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E}$ et $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$. ■

Remarque 2.4.4 Revenons ici brièvement sur les considérations a priori de la sous-section 2.4.1. Si on les compare avec les résultats du théorème précédent, on constate qu'elles sont beaucoup plus faibles, en termes de régularité, notamment pour ce qui concerne les énergies électrique et magnétique. Le cadre de cette sous-section 2.4.1 était donc, a posteriori, tout à fait raisonnable...

2.5 Cas stationnaire

On considère encore une fois le cas d'un domaine Ω simplement connexe, de type (H3), entouré par un conducteur parfait. Comme on l'a déjà dit, on suppose *a priori* que la dépendance en temps des données et du champ électromagnétique est connue, de valeur $\exp(i\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}^*$, tel que décrit dans les équations (7)-(10), que nous réécrivons ici

$$i\omega \varepsilon \mathbf{e} - \mathbf{rot} \mathbf{h} = -\mathbf{j}, \quad (2.48)$$

$$i\omega \mu \mathbf{h} + \mathbf{rot} \mathbf{e} = 0, \quad (2.49)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{e}) = r, \quad (2.50)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{h}) = 0. \quad (2.51)$$

NB. Le cas $\omega = 0$ correspond au cas *statique*, que nous avons déjà étudié, pour lequel le découplage en $\mathbf{e}$ et en $\mathbf{h}$ est naturel.

La relation de conservation de la charge (2.30) devient

$$i\omega r + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.52)$$

La condition de conducteur parfait s'écrit

$$\mathbf{e} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \quad (2.53)$$

A l'aide de la relation de Faraday, on retrouve sur le bord la seconde condition

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \quad (2.54)$$

Par ailleurs, les champs et les données sont à valeurs complexes, par construction. Ceci signifie en particulier que les espaces fonctionnels seront eux aussi formés de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Rappelons que pour $z \in \mathbb{C}$, on note $|z|$ son module et $\bar{z}$ son conjugué.

Par exemple, $L^2(\Omega)$ sera constitué des fonctions mesurables f sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{C}$, et telles que

$$\|f\|_0 := \left\{ \int_{\Omega} |f|^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} < \infty. \quad (2.55)$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire hermitien associé

$$(f, g)_0 := \int_{\Omega} f \bar{g} d\mathbf{x}. \quad (2.56)$$

Et ainsi de suite...

Pour découpler le système, on procède comme pour le cas dépendant du temps. Notons que, comme la dépendance en temps est explicitement connue, il suffit de multiplier par ω pour dériver.

Proposition 2.5.1 *Dans les équations de Maxwell stationnaires (2.48-2.51), on peut remplacer de façon équivalente (2.48) par*

$$-\omega^2 \varepsilon \mathbf{e} + \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{e}) = -\omega \mathbf{j}. \quad (2.57)$$

Preuve : $\omega \times$ (2.48) additionnée à $\mathbf{rot} (\mu^{-1} (2.49))$ donne (2.57).

Réciproquement, $(\omega)^{-1} \times [(2.57) - \mathbf{rot} (\mu^{-1} (2.49))]$ permet de retrouver (2.48). ■

Si l'on considère la divergence de (2.57), la conservation de la charge permet de passer à la loi de Coulomb (2.50).

Remarque 2.5.1 *De façon similaire, $\mathbf{rot} (\varepsilon^{-1} (2.48))$, à laquelle on retranche $\omega \times$ (2.49) donne cette fois*

$$\omega^2 \mu \mathbf{h} - \mathbf{rot} (\varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{h} - \mathbf{j})) = 0. \quad (2.58)$$

Si l'on considère la divergence de (2.58), on retrouve (2.51).

Enfin, la trace de la relation d'Ampère sur le bord permet d'arriver à la condition suivante :

$$\varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{h} - \mathbf{j}) \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \quad (2.59)$$

Nous procédons de façon semblable au cas dépendant du temps, c'est-à-dire que nous allons raisonner sur le système en ω^2 en $\mathbf{e}$, et en ω en $\mathbf{h}$: les équations (2.57), (2.49-2.51), la relation de conservation de la charge (2.52) et les conditions aux limites (2.53-2.54). Pour cela, nous commençons par le système en $\mathbf{e}$, incluant (2.57), la relation de Coulomb (2.50) et la condition aux limites (2.53). Ensuite, nous revenons au système complet, pour lequel on démontre facilement les résultats attendus. Une alternative, qui prend en compte une formulation en ω^2 en $\mathbf{e}$ et en $\mathbf{h}$, est étudiée à la sous-section 2.5.1.

En ce qui concerne les seconds membres des équations, à l'instar du cas dépendant du temps, on considère

- **régularité 'minimale'** : $\mathbf{j} \in L^2(\Omega)^3$, $r \in H^{-1}(\Omega)$, ou
- **régularité 'usuelle'** : $\mathbf{j} \in H(\text{div}, \Omega)$, $r \in L^2(\Omega)$.

On est amené à rechercher $\mathbf{e}$ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ dans le premier cas, et dans $\mathcal{X}(\varepsilon)$ dans le second cas. Comme d'habitude, $\mathbf{h}$ se trouve appartenir à $\mathcal{W}(\mu)$ dans tous les cas. Nous allons rapidement constater que ces deux cas restent très similaires...

Nous allons commencer par résoudre le problème en $\mathbf{e}$, que l'on récapitule sous la forme
Trouver $\mathbf{e} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ ou $\mathcal{X}(\varepsilon)$ tel que

$$\begin{cases} \omega^2 \varepsilon \mathbf{e} - \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{e}) = \omega \mathbf{j} \\ \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{e}) = r \\ \mathbf{e} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \end{cases}, \quad (2.60)$$

où les données r et $\mathbf{j}$ sont liées par la relation $\omega r + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$.

Commençons par résoudre le problème de type électrostatique
Trouver $\phi_e \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{grad} \phi_e) = r. \quad (2.61)$$

D'après ce que l'on a vu à plusieurs reprises, il existe une solution et une seule à ce problème. Posons maintenant

$$\mathbf{e}' := \mathbf{e} - \mathbf{grad} \phi_e.$$

Par construction, $\mathbf{e}'$ appartient à $\mathcal{V}(\varepsilon)$, défini par

$$\mathcal{V}(\varepsilon) := \{\mathbf{v} \in \mathcal{X}(\varepsilon) : \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{v}) = 0\}.$$

Qui plus est, que ce soit pour le problème avec régularité 'minimale', ou pour le problème avec régularité 'usuelle', le champ $\mathbf{e}'$ est solution de

$$\omega^2 \varepsilon \mathbf{e}' - \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{e}') = \mathbf{j}', \quad (2.62)$$

où $\mathbf{j}' := \omega \mathbf{j} - \omega^2 \varepsilon \mathbf{grad} \phi_e$ est un élément de $H(\operatorname{div} 0, \Omega)$, puisque

$$\operatorname{div} \mathbf{j}' = \omega \operatorname{div} \mathbf{j} - \omega^2 \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{grad} \phi_e) = \omega \operatorname{div} \mathbf{j} - \omega^2 r = \omega (\operatorname{div} \mathbf{j} + \omega r) \stackrel{(2.52)}{=} 0.$$

Ainsi, on en revient toujours, pour la partie à divergence nulle de la solution, au même problème, c'est-à-dire (2.62). A partir de maintenant, nous allons nous concentrer sur sa résolution proprement dite.

Pour commencer, on vérifie facilement que l'équation (2.62) est équivalente à la formulation variationnelle ci-dessous, puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$.

$$\omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{e}' \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{e}' \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{j}' \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega). \quad (2.63)$$

En particulier, ceci implique

$$\omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{e}' \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{e}' \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{j}' \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\varepsilon). \quad (2.64)$$

Réciproquement, pour $\mathbf{w}$ appartenant à $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, on annule la divergence comme suit :
Trouver $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{grad} \phi) = \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{w}).$$

on pose $\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \mathbf{grad} \phi$, qui appartient à $\mathcal{V}(\varepsilon)$. Il est alors possible de l'injecter dans la formulation (2.64) :

$$\begin{aligned} \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{e}' \cdot \overline{\mathbf{w}'} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{e}' \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{w}'} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{j}' \cdot \overline{\mathbf{w}'} d\mathbf{x}, \text{ soit} \\ \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{e}' \cdot \overline{\mathbf{w}} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{e}' \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{w}} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{j}' \cdot \overline{\mathbf{w}} d\mathbf{x} + \left\{ \int_{\Omega} (\omega^2 \varepsilon \mathbf{e}' - \mathbf{j}') \cdot \overline{\mathbf{grad} \phi} d\mathbf{x} \right\}. \end{aligned}$$

Le reste, c'est-à-dire la quantité entre accolades, disparaît à l'aide de la formule (2.85), puisque ϕ est à trace nulle, et $\varepsilon \mathbf{e}'$ et $\mathbf{j}'$ sont à divergence nulle. On a retrouvé (2.63).

Si on définit la forme bilinéaire a , et le produit scalaire hermitien⁵ sur $L^2(\Omega)^3$ associé à ε , par

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{v}} d\mathbf{x} ; (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\varepsilon} := \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$$

on a donc la

Proposition 2.5.2 *Le problème en $\mathbf{e}'$ est équivalent à :*

Trouver $\mathbf{e}' \in \mathcal{V}(\varepsilon)$ tel que

$$a(\mathbf{e}', \mathbf{v}) - \omega^2 (\mathbf{e}', \mathbf{v})_{0,\varepsilon} = -(\mathbf{j}', \mathbf{v})_0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\varepsilon). \quad (2.65)$$

La forme bilinéaire a est hermitienne et coercitive sur $\mathcal{V}(\varepsilon)$ (c'est même un produit scalaire!). Ainsi,

$$\forall \mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3, \exists ! \mathbf{g} \in \mathcal{V}(\varepsilon), \text{ tel que } a(\mathbf{g}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0,\varepsilon}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\varepsilon).$$

Qui plus est, l'application associée $A : L^2(\Omega)^3 \rightarrow \mathcal{V}(\varepsilon)$, qui envoie $\mathbf{f}$ sur $A\mathbf{f} = \mathbf{g}$, est continue.

On sait également, d'après le théorème A.4, que l'injection identité de $\mathcal{V}(\varepsilon)$ dans $L^2(\Omega)^3$ est compacte. Comme nous allons la prendre en compte explicitement, nous la notons $i_{\mathcal{V}}$ dans la suite, et nous introduisons

$$\mathbb{T} = A \circ i_{\mathcal{V}} \text{ l'application composée, de } \mathcal{V}(\varepsilon) \text{ dans lui-même.}$$

NB. On a des suites d'égalités du type, pour tout $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ de $\mathcal{V}(\varepsilon)$:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{w}} d\mathbf{x} = (i_{\mathcal{V}} \mathbf{v}, \mathbf{w})_{0,\varepsilon} = a(A(i_{\mathcal{V}} \mathbf{v}), \mathbf{w}) = a(\mathbb{T} \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Proposition 2.5.3 *L'application $\mathbb{T}$ est une application de $\mathcal{V}(\varepsilon)$ dans lui-même, compacte et auto-adjointe.*

Preuve : Comme A est continue et $i_{\mathcal{V}}$ est compacte, $\mathbb{T}$ est compacte [16].

Qui plus est, pour $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ deux éléments de $\mathcal{V}(\varepsilon)$:

$$a(\mathbb{T} \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{w}} d\mathbf{x} = \overline{\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{w} \cdot \overline{\mathbf{v}} d\mathbf{x}} = \overline{a(\mathbb{T} \mathbf{w}, \mathbf{v})} = a(\mathbf{v}, \mathbb{T} \mathbf{w}),$$

ce qui correspond à la définition d'un opérateur auto-adjoint. ■

⁵grâce aux propriétés (H0).

Enfin, on peut substituer $a(\mathbf{g}', \mathbf{v})$ à $(\mathbf{j}', \mathbf{v})_0$, avec $\mathbf{g}' \in \mathcal{V}(\varepsilon)$, ce qui permet de remplacer (2.65) par

$$a(\mathbf{e}' - \omega^2 \mathbb{T} \mathbf{e}' + \mathbf{g}', \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\varepsilon).$$

Comme a est un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{V}(\varepsilon)$, on a finalement prouvé que la formulation variationnelle (2.65) est équivalente à l'équation posée dans $\mathcal{V}(\varepsilon)$

$$(\mathbb{I}_{\mathcal{V}} - \omega^2 \mathbb{T}) \mathbf{e}' = -\mathbf{g}'. \quad (2.66)$$

Nous pouvons donc utiliser l'alternative de FREDHOLM pour conclure (cf. [16], chapitre 6), puisque $\mathcal{V}(\varepsilon)$ est un espace de Banach et que $\mathbb{T}$ est (auto-adjoint) compact de $\mathcal{V}(\varepsilon)$ dans $\mathcal{V}(\varepsilon)$. On sait que

$Im(\mathbb{I}_{\mathcal{V}} - \omega^2 \mathbb{T}) = \{Ker(\mathbb{I}_{\mathcal{V}} - \omega^2 \mathbb{T})\}^{\perp_a}$; qui plus est, $Ker(\mathbb{I}_{\mathcal{V}} - \omega^2 \mathbb{T})$ est de dimension finie.

On a donc deux possibilités :

- (i) $Ker(\mathbb{I}_{\mathcal{V}} - \omega^2 \mathbb{T}) = \{0\}$: ceci revient à dire que $1/\omega^2$ n'est pas une valeur propre de $\mathbb{T}$. Dans ce cas, il existe une solution $\mathbf{e}'$ et une seule à (2.66).
- (ii) $Ker(\mathbb{I}_{\mathcal{V}} - \omega^2 \mathbb{T}) = Vect(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$: ceci revient à dire que $1/\omega^2$ est valeur propre d'ordre p de $\mathbb{T}$. Dans ce cas :
 - 1 Si $\mathbf{g}'$ n'est pas orthogonal au sous-espace $Ker(\mathbb{I}_{\mathcal{V}} - \omega^2 \mathbb{T})$, il n'y a pas de solution.
 - 2 Si $\mathbf{g}'$ est orthogonal au sous-espace $Ker(\mathbb{I}_{\mathcal{V}} - \omega^2 \mathbb{T})$, l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension p , c'est-à-dire

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}'_0 + \sum_{k=1}^p \beta_k \mathbf{v}_k, \quad (\beta_k)_k \in \mathbb{R}^p.$$

Remarque 2.5.2 Par définition de $\mathbf{g}'$, les relations d'orthogonalité s'écrivent $a(\mathbf{g}', \mathbf{v}_k) = 0$, ou $(\mathbf{j}', \mathbf{v}_k)_0 = 0$, pour $1 \leq k \leq p$. De plus, par définition de $\mathbf{j}'$, on peut finalement remplacer la seconde condition par $(\mathbf{j}, \mathbf{v}_k)_0 = 0$, $1 \leq k \leq p$, car

$$(\mathbf{grad} \phi_e, \mathbf{v}_k)_0 = -(\phi_e, \operatorname{div} \mathbf{v}_k)_0 + \int_{\Gamma} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}) \phi_e d\Gamma = 0.$$

Pour en revenir au champ total $\mathbf{e}$, il existe une solution si et seulement si (2.66) admet une solution, après quoi il suffit d'effectuer la somme $\mathbf{e} = \mathbf{e}' + \mathbf{grad} \phi_e$.

On peut facilement aller plus loin... Comme $\mathcal{V}(\varepsilon)$ est un espace de Hilbert séparable, et que $\mathbb{T}$ est un opérateur auto-adjoint, compact, on sait qu'il existe une base hilbertienne de vecteurs propres de $\mathbb{T}$ (cf. [16], chapitre 6). On considère les valeurs propres $(\lambda_n)_n$, ordonnées par valeurs décroissantes, avec répétition, pour arriver à : $(\mathbf{v}_n)_n$ la base hilbertienne telle que, pour tout n , $\mathbb{T} \mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n$. Par construction⁶, tous les vecteurs

⁶Pour tout n , $\lambda_n > 0$: en effet,

$$\lambda_n a(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) = a(\mathbb{T} \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) = \int_{\Omega} \varepsilon |\mathbf{v}_n|^2 d\mathbf{x} > 0, \text{ puisque } \mathbf{v}_n \neq 0.$$

En particulier, 0 n'est pas valeur propre.

Conséquence : comme chaque valeur propre est de multiplicité finie ($\dim(Ker(\mathbb{I}_{\mathcal{V}} - \frac{1}{\lambda_n} \mathbb{T})) < \infty$), il y a une infinité de valeurs propres, si l'on veut que $(\mathbf{v}_n)_n$ engendre un sous-espace dense de $\mathcal{V}(\varepsilon)$. On les range par ordre décroissant et, comme $\mathbb{T}$ est continu, $\max_n |\lambda_n| \leq \|\mathbb{T}\|$, et par voie de conséquence, on a nécessairement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0.$$

propres sont à ε -divergence nulle, les valeurs propres sont strictement positives, et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$. Par définition,

$$\mathbf{e}' = \sum_n a_n \mathbf{v}_n, \text{ avec } a_n = a(\mathbf{e}', \mathbf{v}_n).$$

Comme $(\mathbf{j}', \mathbf{v}_n)_0 = \omega(\mathbf{j}, \mathbf{v}_n)_0$, on vérifie alors que (2.66) est équivalente à

$$(1 - \omega^2 \lambda_n) a_n = -\omega(\mathbf{j}, \mathbf{v}_n)_0, \quad \forall n.$$

On retrouve de cette façon l'alternative de Fredholm, selon qu'il existe ou pas une valeur propre λ_n telle que $\lambda_n = 1/\omega^2$. On rappelle que ϕ_e est la solution unique de (2.61). Nous regroupons ces résultats dans la

Proposition 2.5.4 *La résolution du problème (2.60), pour $\omega \in \mathbb{R}^*$, peut être détaillée comme suit.*

(i) *Si $1/\omega^2$ n'est pas valeur propre de l'opérateur $\mathbb{T}$, il existe une solution et une seule, de la forme*

$$\mathbf{e} = -\omega \sum_n \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{v}_n)_0}{1 - \omega^2 \lambda_n} \mathbf{v}_n + \mathbf{grad} \phi_e.$$

(ii) *Si $1/\omega^2$ est valeur propre de l'opérateur $\mathbb{T}$, deux cas peuvent se produire :*

1 $\exists n_0$, tel que $\lambda_{n_0} = 1/\omega^2$ et $(\mathbf{j}, \mathbf{v}_{n_0})_0 \neq 0$: *il n'y a pas de solution.*

2 $\forall n$ tel que $\lambda_n = 1/\omega^2$, on a $(\mathbf{j}, \mathbf{v}_n)_0 = 0$: *l'ensemble des solutions est un espace affine, c'est-à-dire*

$$\mathbf{e} = -\omega \sum_{n, \lambda_n \neq 1/\omega^2} \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{v}_n)_0}{1 - \omega^2 \lambda_n} \mathbf{v}_n + \sum_{n, \lambda_n = 1/\omega^2} \beta_n \mathbf{v}_n + \mathbf{grad} \phi_e, \quad \beta_n \text{ quelconques.}$$

Pour raisonner sur le champ électromagnétique complet $(\mathbf{e}, \mathbf{h})$, il suffit d'utiliser la relation de Faraday $\mathbf{h} = \frac{1}{\omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{e}$, puisque

- la relation de Faraday implique l'absence de monopoles (2.51) ;
- la relation de Faraday et la condition aux limites sur $\mathbf{e}$ impliquent la condition aux limites sur $\mathbf{h}$ (2.53) ;
- l'application de la proposition 2.5.1 permet de revenir au système initial.

Puis, on associe par 'identification' à chaque vecteur propre $\mathbf{v}_n$ le vecteur

$$\mathbf{v}'_n = \sqrt{\lambda_n} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n,$$

sachant que $\frac{1}{\omega^2}$ peut-être égal à λ_n ...

NB. Pour plus de précisions sur les propriétés vérifiées par la famille $(\mathbf{v}'_n)_n$, nous renvoyons le lecteur au théorème 2.5.2 *infra*.

On déduit alors immédiatement de la proposition 2.5.4 le

Théorème 2.5.1 *Soit Ω un domaine simplement connexe de type (H3), et $\omega \in \mathbb{R}^*$. Supposons que les données satisfassent à (2.52), avec $(\mathbf{j}, r)$ appartenant à $L^2(\Omega)^3 \times H^{-1}(\Omega)$, ou à $H(\text{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$. Alors, en ce qui concerne la résolution du problème harmonique (2.48)-(2.54) :*

(i) Si $1/\omega^2$ n'est pas valeur propre, il existe une solution et une seule, de la forme

$$\mathbf{e} = -i\omega \sum_n \alpha_n \mathbf{v}_n + \mathbf{grad} \phi_e, \quad (2.67)$$

$$\mathbf{h} = \sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{\lambda_n}} \mathbf{v}'_n. \quad (2.68)$$

(ii) Si $1/\omega^2$ est valeur propre, deux cas peuvent se produire :

1 $\exists n_0$, tel que $\lambda_{n_0} = 1/\omega^2$ et $(\mathbf{j}, \mathbf{v}_{n_0})_0 \neq 0$: il n'y a pas de solution.

2 $\forall n$ tel que $\lambda_n = 1/\omega^2$, on a $(\mathbf{j}, \mathbf{v}_n)_0 = 0$: l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension finie p , égale à la dimension de sous-espace propre associé à la valeur propre $1/\omega^2$. Les solutions sont de la forme

$$\mathbf{e} = -i\omega \sum_{n, \lambda_n \neq 1/\omega^2} \alpha_n \mathbf{v}_n + \sum_{n, \lambda_n = 1/\omega^2} \beta_n \mathbf{v}_n + \mathbf{grad} \phi_e, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{h} = \sum_{n, \lambda_n \neq 1/\omega^2} \frac{\alpha_n}{\sqrt{\lambda_n}} \mathbf{v}'_n + i \sum_{n, \lambda_n = 1/\omega^2} \beta_n \mathbf{v}'_n. \quad (2.70)$$

(Cas $\omega > 0$. Si $\omega < 0$, on remplace $+i$ par $-i$ dans (2.70).)

Lorsque la solution existe,

$$\text{les coefficients } (\alpha_n)_n \text{ sont égaux à } \alpha_n = \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{v}_n)_0}{1 - \omega^2 \lambda_n}; \quad (2.71)$$

$$\text{les } p \text{ coefficients } (\beta_n)_n \text{ sont quelconques.} \quad (2.72)$$

Pour conclure, nous considérons le cas particulier de la *cavité résonnante*, introduite à la sous-section 1.4.2...

Corollaire 2.5.1 Supposons que $\mathbf{j} \equiv 0$ et $r \equiv 0$. Il existe toujours une solution au problème harmonique (2.48)-(2.54).

(i) Si $1/\omega^2$ n'est pas valeur propre, $\mathbf{e} \equiv 0$, et $\mathbf{h} \equiv 0$.

(ii) Si $1/\omega^2$ est valeur propre, le champ électromagnétique est combinaison linéaire des vecteurs propres électrique et magnétique, associés à la valeur propre $1/\omega^2$.

Preuve : C'est une application élémentaire du théorème précédent. Bien sûr, le cas (ii)1 ne peut pas se produire, puisque le champ nul est orthogonal à tout vecteur. . . ■

2.5.1 Etude du système en ω^2 en $\mathbf{e}$ et en $\mathbf{h}$

Dans cette sous-section, nous allons partir des *deux équations en ω^2* , pour $\mathbf{e}$ et $\mathbf{h}$, c'est-à-dire (2.57-2.58), complétées des relations de Coulomb et d'absence de monopoles (2.50-2.51), et des conditions aux limites (2.53-2.54), sans oublier l'équation de conservation de la charge (2.52).

Dans ce cas, très couramment utilisé en pratique, les formulations en $\mathbf{e}$ et $\mathbf{h}$ sont *apparemment* découplées. En effet, elles sont découplées, au sens où chaque équation porte uniquement sur $\mathbf{e}$, ou sur $\mathbf{h}$. Mais leurs seconds membres sont *tous deux* fonction de $\mathbf{j}$.

Nous allons d'abord étudier le système en $\mathbf{e}$ et le système en $\mathbf{h}$ séparément, puis nous examinerons ce que le *couplage* des seconds membres induit, avant de revenir finalement à la formulation en ω .

Pour le système en $\mathbf{e}$ (2.60), la proposition 2.5.4 s'applique.

Nous passons maintenant au champ magnétique. Rappelons que $\mathbf{h}$ est solution de
Trouver $\mathbf{h} \in \mathcal{W}(\mu)$ tel que

$$\begin{cases} \omega^2 \mu \mathbf{h} - \mathbf{rot} (\varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{h} - \mathbf{j})) = 0 \\ \operatorname{div} (\mu \mathbf{h}) = 0 \\ \varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{h} - \mathbf{j}) \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

Comme $\mathbf{h}$ est un champ à μ -divergence nulle, il n'est pas nécessaire de passer par le potentiel, car on se trouve directement dans $\mathcal{W}(\mu)$. A partir de là, on vérifie facilement que cette formulation faible est équivalente à

$$\omega^2 \int_{\Omega} \mu \mathbf{h} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{h} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \quad (2.74)$$

avec $\mathbf{h}$ un élément de $\mathcal{W}(\mu)$. En particulier, ceci implique
Trouver $\mathbf{h} \in \mathcal{W}(\mu)$ tel que

$$\omega^2 \int_{\Omega} \mu \mathbf{h} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{h} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}(\mu). \quad (2.75)$$

Comme pour le champ électrique, on prouve que (2.75) implique (2.74). Cette fois, on utilise le

Lemme 2.5.1 *Soit Ω un domaine simplement connexe de type (H3). A tout élément $\mathbf{v}$ de $L^2(\Omega)^3$, on peut associer un unique couple $(\mathbf{w}, q)$ de $H_0(\operatorname{div} \mu, \Omega) \times H^1(\Omega)$ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{grad} q$ (q est unique à une constante près.)*

En effet, à tout élément $\mathbf{v}$ de $H(\mathbf{rot}, \Omega)$, on associe $\mathbf{w}$ et q par ce lemme, et la régularité additionnelle sur $\mathbf{v} - \mathbf{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$ – permet d'affirmer que $\mathbf{w} \in \mathcal{W}(\mu)$. On part alors de (2.75) avec $\mathbf{w}$, et comme $\mathbf{h}$ est un élément de $\mathcal{W}(\mu) \subset H_0(\operatorname{div} \mu, \Omega)$, $\mathbf{grad} q$ et $\mathbf{h}$ sont μ -orthogonaux. On arrive donc immédiatement à la relation (2.74) avec $\mathbf{v}$.

Preuve : (lemme 2.5.1) On suppose que l'on traite de fonctions à valeurs réelles, ce qui ne modifie en rien l'esprit de la démonstration.

Nous commençons par démontrer que $M := \mathbf{grad} H^1(\Omega)$ est fermé dans $L^2(\Omega)^3$. Soit donc $(\mathbf{v}_k)_k$ une suite d'éléments de M , qui converge dans $L^2(\Omega)^3$ vers $\mathbf{v}$. Pour tout k , on a la propriété $\mathbf{rot} \mathbf{v}_k = 0$. Vérifions que ceci reste vrai pour $\mathbf{v}$. En effet, pour tout élément $\mathbf{f}$ de $\mathcal{D}(\Omega)^3$,

$$\langle \mathbf{rot} \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{rot} \mathbf{f} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{rot} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{rot} \mathbf{v}_k, \mathbf{f} \rangle = 0.$$

Comme Ω est simplement connexe, il existe un élément ϕ de $H^1(\Omega)$, unique à une constante près (cf. [39, Thm 2.9, p. 31], tel que $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$: $\mathbf{v}$ appartient à M .

Montrons maintenant que son orthogonal, pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{0, \mu}$, est en fait égal à $H_0(\operatorname{div} \mu, \Omega)$.

$H_0(\operatorname{div} \mu, \Omega) \subset M^{\perp \mu}$: soit $\mathbf{w} \in H_0(\operatorname{div} \mu, \Omega)$. Montrer qu'il appartient à $M^{\perp \mu}$ revient à vérifier qu'il est orthogonal à tout élément $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$ de M . D'après (2.85), on trouve

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v})_{0, \mu} = \int_{\Omega} \mu \mathbf{w} \cdot \mathbf{grad} \phi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mu \mathbf{w}) \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} (\mu \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \phi \, d\Gamma = 0.$$

$M^{\perp\mu} \subset H_0(\operatorname{div} \mu 0, \Omega)$: soit $\mathbf{w} \in M^{\perp\mu}$. Pour tout f de $\mathcal{D}(\Omega)$ on a $\mathbf{grad} f \in M$. Ainsi,

$$0 = (\mathbf{w}, \mathbf{grad} f)_{0,\mu} = \int_{\Omega} \mu \mathbf{w} \cdot \mathbf{grad} f \, d\mathbf{x} = - \langle \operatorname{div} (\mu \mathbf{w}), f \rangle \implies \operatorname{div} (\mu \mathbf{w}) = 0.$$

Pour prouver que $\mu \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$, on raisonne par dualité. En effet, ceci revient à obtenir

$$\int_{\Gamma} (\mu \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \phi \, d\Gamma = 0, \quad \forall \phi \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Or, on peut relever tout élément ϕ de $H^{1/2}(\Gamma)$ en un élément de $H^1(\Omega)$, toujours noté ϕ . Comme $\mathbf{grad} \phi$ appartient à M , on en déduit

$$0 = \int_{\Omega} \mu \mathbf{w} \cdot \mathbf{grad} \phi \, d\mathbf{x} \stackrel{(2.85)}{=} \int_{\Gamma} (\mu \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \phi \, d\Gamma, \quad \text{puisque } \operatorname{div} (\mu \mathbf{w}) = 0.$$

En conclusion, on a prouvé que

$$L^2(\Omega)^3 = \mathbf{grad} H^1(\Omega) \stackrel{\perp\mu}{\oplus} H_0(\operatorname{div} \mu 0, \Omega).$$

■

On reprend alors le même raisonnement que pour $\mathbf{e}'$, grâce à l'alternative de Fredholm. On considère

$$a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x};$$

Cette forme est hermitienne et coercitive sur $\mathcal{W}(\mu)$. On remplace l'opérateur A par l'opérateur A' , de $L^2(\Omega)^3$ dans $\mathcal{W}(\mu)$, qui à $\mathbf{f}$ associe $A'\mathbf{f}$, solution de

$$a'(A'\mathbf{f}, \mathbf{v}) := (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0,\mu}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}(\mu).$$

On sait, d'après le théorème A.4, que l'injection identité de $\mathcal{W}(\mu)$ dans $L^2(\Omega)^3$ est compacte : nous la notons $i_{\mathcal{W}}$ dans, et nous introduisons

$$\mathbb{T}' = A' \circ i_{\mathcal{W}} \text{ l'application composée, de } \mathcal{W}(\mu) \text{ dans lui-même.}$$

Bien sûr, on a également la

Proposition 2.5.5 *L'application $\mathbb{T}'$ est une application de $\mathcal{W}(\mu)$ dans lui-même, compacte et auto-adjointe.*

On considère $\mathbf{g}''$ appartenant à $\mathcal{W}(\mu)$, solution de $a'(\mathbf{g}'', \mathbf{v}) = (\mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_{0,\varepsilon^{-1}}$, pour tout $\mathbf{v}$ de $\mathcal{W}(\mu)$. On arrive à la formulation faible

$$(\mathbb{I}_{\mathcal{W}} - \omega^2 \mathbb{T}') \mathbf{h} = \mathbf{g}''. \quad (2.76)$$

Soit donc $(\mathbf{v}'_n)_n$ la base orthonormale de $\mathcal{W}(\mu)$, formée de vecteurs propres de $\mathbb{T}'$, dont les valeurs propres $(\lambda'_n)_n$, strictement positives, sont ordonnées par valeurs décroissantes, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda'_n = 0$. Si on reprend l'alternative de Fredholm, on peut conclure par

Proposition 2.5.6 *La résolution du problème (2.73), pour $\omega \in \mathbb{R}^*$, peut être détaillée comme suit.*

(i) *Si $1/\omega^2$ n'est pas valeur propre de l'opérateur $\mathbb{T}'$, il existe une solution et une seule, de la forme*

$$\mathbf{h} = \sum_n \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{v}'_n)_{0,\varepsilon^{-1}}}{1 - \omega^2 \lambda'_n} \mathbf{v}'_n.$$

- (ii) Si $1/\omega^2$ est valeur propre de l'opérateur $\mathbb{T}'$, deux cas peuvent se produire :
- 1 $\exists n_0$, tel que $\lambda_{n_0}' = 1/\omega^2$ et $(\mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{v}_{n_0}')_{0, \varepsilon^{-1}} \neq 0$: il n'y a pas de solution.
 - 2 $\forall n$ tel que $\lambda_n' = 1/\omega^2$, on a $(\mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{v}_n')_{0, \varepsilon^{-1}} = 0$: l'ensemble des solutions est un espace affine, c'est-à-dire

$$\mathbf{h} = \sum_{n, \lambda_n' \neq 1/\omega^2} \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{v}_n')_{0, \varepsilon^{-1}}}{1 - \omega^2 \lambda_n'} \mathbf{v}_n' + \sum_{n, \lambda_n' = 1/\omega^2} \beta_n' \mathbf{v}_n', \quad \beta_n' \text{ quelconques.}$$

Ce qui semble paradoxal jusqu'ici, c'est que les parties électrique et magnétique du champ sont *trop indépendantes*, puisqu'une partie pourrait exister, et pas l'autre (par exemple, cas (i) ou (ii).2 pour $\mathbf{e}$ et cas (ii).1 pour $\mathbf{h}$). Nous allons voir qu'il n'en est rien!⁷

Théorème 2.5.2 On a l'égalité $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\lambda_n'\}_{n \in \mathbb{N}}$. De plus

- Si $\mathbf{v}_n$ est un vecteur propre électrique, $\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n$ est un vecteur propre magnétique.
- Si $\mathbf{v}_n'$ est un vecteur propre magnétique, $\mathbf{rot}^{-1}(\mu \mathbf{v}_n')$ est un vecteur propre électrique.
- On a la relation $\mathbf{v}_n' = \sqrt{\lambda_n} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n$, pour tout n .

Enfin, les conditions d'orthogonalité sont identiques.

Preuve : Si $(\mathbf{v}_n, \lambda_n)$ est un couple vecteur-valeur propres de $\mathbb{T}$, on a par définition

$$\mathbb{T} \mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n, \text{ soit } a(\mathbb{T} \mathbf{v}_n, \mathbf{v}) = \lambda_n a(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\varepsilon).$$

D'après les définitions de $\mathbb{T}$ et a , ceci correspond à

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{v}_n \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = \lambda_n \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\varepsilon).$$

On a retrouvé (2.64) avec $\mathbf{j}' = 0$ et $\omega^2 = 1/\lambda_n$. On en déduit que

$$\varepsilon \mathbf{v}_n - \lambda_n \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n) = 0.$$

Posons⁸ $\mathbf{h}_n = \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n$; comme $\mathbf{rot} \mathbf{h}_n = \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n) = \varepsilon / \lambda_n \mathbf{v}_n$ appartient à $L^2(\Omega)^3$, $\mathbf{h}_n$ se trouve appartenir à $\mathcal{W}(\mu)$ et, de plus, $(\mathbf{rot} \mathbf{h}_n) \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$. Par ailleurs, on infère de l'identité vérifiée par $\mathbf{v}_n$ (en en prenant le rotationnel) que

$$\mathbf{rot} \varepsilon^{-1}(\varepsilon \mathbf{v}_n - \lambda_n \mathbf{rot} \mathbf{h}_n) = 0, \text{ soit } \mu \mathbf{h}_n - \lambda_n \mathbf{rot} (\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{h}_n) = 0.$$

Comme d'habitude, on arrive ensuite à

$$\int_{\Omega} \mu \mathbf{h}_n \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \lambda_n \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}(\mu).$$

Par définition de l'opérateur $\mathbb{T}'$, ceci signifie que

$$\mathbb{T}' \mathbf{h}_n = \lambda_n \mathbf{h}_n.$$

En d'autres termes, $(\mathbf{h}_n, \lambda_n)$ est un couple vecteur-valeur propres de $\mathbb{T}'$. Ainsi,

$$\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{\lambda_n'\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ et } \forall \mathbf{v}_n \text{ vecteur propre de } \mathbb{T}, \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n \text{ est vecteur propre de } \mathbb{T}'.$$

⁷Ceci correspond-il à des relations de dispersion ?

⁸Pas d'intuition géniale! ? On se souvient que, dans la formulation en ω , on a $i\omega \mu \mathbf{h} + \mathbf{rot} \mathbf{e} = 0$, ce qui se traduit ici par $\mathbf{h} = i\sqrt{\lambda_n} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n$, après avoir posé $\mathbf{e} = \mathbf{v}_n$ et $\omega = 1/\sqrt{\lambda_n}$.

Réciproquement, soit $(\mathbf{v}'_n, \lambda'_n)$ un couple vecteur-valeur propres de $\mathbb{T}'$. D'après le théorème 2.3.3, il existe un potentiel vecteur unique $\mathbf{a}_n$ tel que

$$\mu \mathbf{v}'_n = \mathbf{rot} \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{a}_n \in \mathcal{V}.$$

Pour obtenir un potentiel dans $\mathcal{V}(\varepsilon)$, il suffit de résoudre
Trouver $\phi_n \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{grad} \phi_n) = \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{a}_n),$$

et de poser $\mathbf{e}_n = \mathbf{a}_n - \mathbf{grad} \phi_n$; en effet, $\mu \mathbf{v}'_n = \mathbf{rot} \mathbf{e}_n$, et $\mathbf{e}_n$ appartient à $\mathcal{V}(\varepsilon)$. Ceci étant précisé, il est loisible de reprendre le raisonnement ci-dessus à l'envers, pour arriver sans encombre à l'égalité $\mathbb{T} \mathbf{e}_n = \lambda'_n \mathbf{e}_n$.

Tout d'abord, il est clair qu'un potentiel vecteur appartenant à $\mathcal{V}(\varepsilon)$ est unique, puisqu'un élément de $\mathcal{V}(\varepsilon)$ est entièrement déterminé par son rotationnel. Appelons $\mathbf{rot}^{-1}$ l'application de $\mathcal{W}(\mu)$ dans $\mathcal{V}(\varepsilon)$, qui permet de passer d'un champ à son potentiel.

En second lieu, et par définition de $\mathbb{T}'$, on trouve que $\mathbf{v}'_n$ est solution de

$$\int_{\Omega} \mu \mathbf{v}'_n \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \lambda'_n \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}'_n \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H(\mathbf{rot}, \Omega).$$

Si l'on prend comme fonction test un élément de $\mathcal{D}(\Omega)^3$, on retrouve

$$\mu \mathbf{v}'_n - \lambda'_n \mathbf{rot}(\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}'_n) = 0.$$

Ensuite, en prenant un élément de $H^1(\Omega)^3$, on trouve par dualité que

$$(\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}'_n) \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0.$$

Ainsi, $\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}'_n$ appartient à $\mathcal{V}(\varepsilon)$ et par ailleurs,

$$\mathbf{rot}^{-1}[\mu \mathbf{v}'_n - \lambda'_n \mathbf{rot}(\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}'_n)] = 0, \text{ soit } \mathbf{e}_n - \lambda'_n \mathbf{rot}^{-1}[\mathbf{rot}(\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}'_n)] = 0.$$

Mais, comme $\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}'_n \in \mathcal{V}(\varepsilon)$, on retrouve

$$\mathbf{e}_n - \lambda'_n \varepsilon^{-1} \mathbf{rot}(\mathbf{v}'_n) = 0, \text{ soit } \varepsilon \mathbf{e}_n - \lambda'_n \mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{e}_n) = 0.$$

La boucle est bouclée...

CQFD

Ceci signifie que

$$\{\lambda'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ et } \forall \mathbf{v}'_n \text{ vecteur propre de } \mathbb{T}', \mathbf{rot}^{-1}(\mu \mathbf{v}'_n) \text{ est vecteur propre de } \mathbb{T}.$$

(Ici, $\mathbf{rot}^{-1}$ est l'opérateur de $\mathcal{W}(\mu)$ dans $\mathcal{V}(\varepsilon)$, qui à un champ associe son potentiel.)

De cette équivalence, on déduit en particulier que les valeurs propres ont même ordre de multiplicité, pour les deux problèmes. Pour relier complètement $\mathbf{v}_n$ à $\mathbf{v}'_n$, il reste à normaliser la relation, i.e. déterminer γ_n tel que $\mathbf{v}'_n = \gamma_n \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n$.

$$\begin{aligned} 1 &= a'(\mathbf{v}'_n, \mathbf{v}'_n) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{\Omega} \mu \mathbf{v}'_n \cdot \bar{\mathbf{v}}'_n \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{\gamma_n^2}{\lambda_n} \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}}_n \, d\mathbf{x} = \frac{\gamma_n^2}{\lambda_n} a(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) = \frac{\gamma_n^2}{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut choisir $\gamma_n = \sqrt{\lambda_n}$, ce qui signifie que

$$\mathbf{v}'_n = \sqrt{\lambda_n} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier les conditions d'orthogonalité : on remplace $\mathbf{j}$ par une suite $(\mathbf{j}_k)_k$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)^3$ telle que $\mathbf{j}_k \rightarrow \mathbf{j}$ dans $L^2(\Omega)^3$. On écrit

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \bar{\mathbf{v}}_n \, d\mathbf{x} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{j}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_n \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varepsilon(\varepsilon^{-1} \mathbf{j}_k) \cdot \bar{\mathbf{v}}_n \, d\mathbf{x} \\
 &\stackrel{(\mathbf{v}_n = vp)}{=} \lambda_n \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot}(\varepsilon^{-1} \mathbf{j}_k) \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}}_n \, d\mathbf{x} \\
 &\stackrel{(\mathbf{v}'_n = \sqrt{\lambda_n} \mu^{-1} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}}_n)}{=} \sqrt{\lambda_n} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{rot}(\varepsilon^{-1} \mathbf{j}_k) \cdot \bar{\mathbf{v}}'_n \, d\mathbf{x} \\
 &\stackrel{(2.86)}{=} \sqrt{\lambda_n} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{j}_k \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}}'_n \, d\mathbf{x} \\
 &= \sqrt{\lambda_n} \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}}'_n \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

■

Remarque 2.5.3 On déduit de la dernière égalité, que les coefficients des développements de $\mathbf{e}$ et $\mathbf{h}$ sont proportionnels, avec

$$\frac{(\mathbf{j}, \mathbf{v}_n)_0}{1 - \omega^2 \lambda_n} = \sqrt{\lambda_n} \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{v}'_n)_{0, \varepsilon^{-1}}}{1 - \omega^2 \lambda_n}, \quad \forall n.$$

Grâce à ce dernier théorème, on a donc prouvé que les cas (i), (ii)1 et (ii)2 se produisent *simultanément* pour $\mathbf{e}$ et pour $\mathbf{h}$. Qui plus est, on peut écrire, lorsque la solution électromagnétique existe (cas (i) et (ii)2) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e} &= -i\omega \sum_{n, \lambda_n \neq 1/\omega^2} \alpha_n \mathbf{v}_n + \sum_{n, \lambda_n = 1/\omega^2} \beta_n \mathbf{v}_n + \mathbf{grad} \phi_e, \\
 \mathbf{h} &= \sum_{n, \lambda_n \neq 1/\omega^2} \frac{\alpha_n}{\sqrt{\lambda_n}} \mathbf{v}'_n + \sum_{n, \lambda_n = 1/\omega^2} \beta'_n \mathbf{v}'_n, \\
 &\text{avec } \alpha_n = \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{v}_n)_0}{1 - \omega^2 \lambda_n}, \quad \beta_n \text{ et } \beta'_n \text{ quelconques.}
 \end{aligned}$$

Les résultats ci-dessus sont la conséquence directe des relations entre les seconds membres de (2.57) et (2.58). Ceci représente une partie de ce qu'il ne faut pas oublier de vérifier. *Mais ça n'est pas tout !* Rappelons-nous que ce sont les solutions des problèmes en ω^2 . Il reste à vérifier que ce 'champ électromagnétique' $(\mathbf{e}, \mathbf{h})$ est bien solution des équations en ω (2.48)-(2.49), car sinon on n'a pas résolu le système des équations de Maxwell stationnaires...

Commençons par (2.49), c'est-à-dire par la quantité $i\omega\mu\mathbf{h} + \mathbf{rot} \mathbf{e}$; comme $\mathbf{h}$ et $\mathbf{rot} \mathbf{e}$ appartiennent tous les deux à $\mathcal{W}(\mu)$, et que de plus on dispose de deux expressions⁹ par rapport à la base hilbertienne $(\mathbf{v}'_n)_n$, il suffit de raisonner terme à terme :

$$\text{Si } \lambda_n \neq 1/\omega^2 : (i\omega\alpha_n/\sqrt{\lambda_n} - i\omega\alpha_n/\sqrt{\lambda_n}) = 0;$$

$$\text{Si } \lambda_n = 1/\omega^2 : (i\omega\beta'_n + \beta_n/\sqrt{\lambda_n}) = \omega(i\beta'_n + \beta_n) \text{ (on a supposé que } \omega > 0).$$

⁹Pour ce qui de la quantité $\mathbf{rot} \mathbf{e}$, on utilise le fait que $\mathbf{rot} \mathbf{v}_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \mu \mathbf{v}'_n$.

Pour avoir la nullité ici, il faut et il suffit que

$$\imath\beta'_n + \beta_n = 0. \quad (2.77)$$

Pour résumer, on trouve que (2.49) est vérifiée, sous réserve que les coefficients *a priori* quelconques β_n et β'_n sont liés par les relations (2.77).

Poursuivons par (2.48) : que vaut la quantité $\mathbf{u} := \imath\omega\varepsilon\mathbf{e} - \mathbf{rot} \mathbf{h} + \mathbf{j}$? Notons que

$$\mathbf{u} = \imath\omega\varepsilon\mathbf{e}' - \mathbf{rot} \mathbf{h} + \mathbf{j}'', \text{ avec } \mathbf{j}'' = \mathbf{j} + \imath\omega\varepsilon\mathbf{grad} \phi_e, \text{ tel que } \operatorname{div} \mathbf{j}'' = 0.$$

On reformule le tout, en introduisant maintenant la variable $\mathbf{u}' := \varepsilon^{-1}(\mathbf{rot} \mathbf{h} - \mathbf{j}'')$, ce qui donne $\mathbf{u} = \varepsilon(\imath\omega\mathbf{e}' - \mathbf{u}')$. On vérifie que $\mathbf{u}'$ est un élément de $\mathcal{V}(\varepsilon)$.

- $\mathbf{u}' \in L^2(\Omega)^3$;
- $\mathbf{rot} \mathbf{u}' = \mathbf{rot} (\varepsilon^{-1}(\mathbf{rot} \mathbf{h} - \mathbf{j}'')) = \mathbf{rot} (\varepsilon^{-1}(\mathbf{rot} \mathbf{h} - \mathbf{j})) = \omega^2\mu\mathbf{h} \in L^2(\Omega)^3$;
- $\operatorname{div} (\varepsilon\mathbf{u}') = 0$;
- $\mathbf{u}' \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = \varepsilon^{-1}(\mathbf{rot} \mathbf{h} - \mathbf{j}) \times \mathbf{n}_{|\Gamma} - \imath\omega\mathbf{grad} \phi_e \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0$.

A partir de là, on se souvient qu'un élément de $\mathcal{V}(\varepsilon)$ est caractérisé par son rotationnel.

Que vaut $\mathbf{rot} (\imath\omega\mathbf{e}' - \mathbf{u}')$?

$$\mathbf{rot} (\imath\omega\mathbf{e}' - \mathbf{u}') = \imath\omega\mathbf{rot} \mathbf{e} - \mathbf{rot} \mathbf{u}' = \imath\omega\mathbf{rot} \mathbf{e} - \omega^2\mu\mathbf{h} = \imath\omega(\mathbf{rot} \mathbf{e} + \imath\omega\mu\mathbf{h}) = 0.$$

Le couple $(\mathbf{e}, \mathbf{h})$ satisfait donc à la formulation en ω , c'est-à-dire le système des équations de Maxwell stationnaires, *sous réserve que* la condition (2.77) est vérifiée. On retrouve bien sûr, dans ce cas, les conclusions énoncées au théorème 2.5.1.

Annexe : espaces fonctionnels

Dans cette annexe, nous rappelons la définition des distributions, de l'espace L^2 , ainsi que des espaces de Sobolev standards (pour plus de précisions, nous renvoyons le lecteur à [38], [54], [1] et [16]). Puis nous introduisons des espaces de Sobolev plus spécifiques, mieux adaptés au traitement de problèmes en électromagnétisme (cf. [39]). Enfin, nous définissons les espaces idoines, permettant de considérer le champ électromagnétique comme dépendant à la fois du temps et de l'espace (pour cela, nous suivons [30]).

On note $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$ la mesure de Lebesgue.

On appelle un élément $\alpha = (j, k, l)$ de $\mathbb{N}^3$ un multi-indice, avec $|\alpha| = j + k + l$. La dérivée partielle d'ordre α est dénotée par

$$\partial_\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^j \partial x_2^k \partial x_3^l}.$$

Espaces de Sobolev standards

Hypothèse (H1) : soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Définition A.1 L'espace $L^2(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables f sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{R}$, et telles que

$$\|f\|_0 := \left\{ \int_{\Omega} f^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} < \infty. \quad (2.78)$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire associé

$$(f, g)_0 := \int_{\Omega} f g d\mathbf{x}. \quad (2.79)$$

Nous rappelons tout de suite une propriété couramment utilisée dans la suite de ce cours pour des éléments de $L^2(\Omega)$:

Proposition A.1 Soient f et g deux éléments de $L^2(\Omega)$. Alors $f = g$ implique que f et g sont égales presque partout dans Ω .

Soit maintenant

Définition A.2 $H^1(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) : \partial_j f \in L^2(\Omega), j = 1, 2, 3\}$, où la dérivation est effectuée au sens des distributions (définition A.5). On note

$$\|f\|_1 := \left\{ \int_{\Omega} (f^2 + |\mathbf{grad} f|^2) d\mathbf{x} \right\}^{1/2}.$$

Nous rappelons quelques notions indispensables concernant les distributions, et l'opération de dérivation sur celles-ci. Nous commençons par les fonctions indéfiniment dérivables à support compact. Soit donc

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \text{ supp}(f) \text{ compact dans } \Omega\},$$

muni de la topologie de la limite inductive stricte (cf. [54]). En pratique, on peut utiliser la convergence des suites : soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$. Elle converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers un élément f si, et seulement si

- (i) il existe un compact K de Ω tel que $\text{supp}(f_n - f) \subset K$, pour tout n ;
- (ii) pour tout multi-indice α , $(\partial_\alpha f_n)_n$ converge uniformément sur K vers $\partial_\alpha f$.

Notons que $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas métrisable, c'est-à-dire qu'on ne peut pas le munir d'une distance. Par contre, si K est un compact, $\mathcal{D}(K)$ est métrisable [38]. En conséquence, on dit qu'un sous-ensemble F de $\mathcal{D}(\Omega)$ est borné s'il existe un compact K de Ω tel que d'une part tout élément de F à son support inclus dans K , et que d'autre part F est borné dans $\mathcal{D}(K)$.

Définition A.3 On appelle espace des distributions, et on note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des applications linéaires et continues¹⁰ de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in \mathcal{D}(\Omega)$: on note l'action de T sur f à l'intérieur de crochets de dualité, c'est-à-dire :

$$\langle T, f \rangle.$$

Nous donnerons des exemples concrets dans la suite (2.80), (2.82), (2.83).

Pour la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on utilise la définition pratique suivante

Définition A.4 $(T_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers un élément T de $\mathcal{D}'(\Omega)$ si, et seulement si, pour tout élément f de $\mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_n, f \rangle \rightarrow \langle T, f \rangle$.

Il est aisé de prouver les deux inclusions

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \quad (2.80)$$

en identifiant un élément f de $L^2(\Omega)$ à une distribution, toujours notée f , selon

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g \, d\mathbf{x}.$$

Ceci étant posé, on peut introduire la notion de dérivée d'une distribution.

Définition A.5 Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Sa $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle ($j = 1, 2, 3$) est définie par

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, f \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On en déduit immédiatement

Proposition A.2 L'application $T \mapsto \partial_j T$ est linéaire et continue de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Comme $L^2(\Omega)$ est un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$, il est loisible de dériver au sens des distributions ses éléments, ce qui valide la définition de l'espace $H^1(\Omega)$.

Reprenons, f appartient à $H^1(\Omega)$ si, et seulement si, $f \in L^2(\Omega)$, $\partial_j f \in L^2(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$. Si l'on suit la définition A.5, $\partial_1 f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et, pour tout élément g_1 de $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle \partial_1 f, g_1 \rangle = - \langle f, \partial_1 g_1 \rangle = - \int_{\Omega} f \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \, d\mathbf{x},$$

d'après l'identification de $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

En utilisant la même identification, dire que $\partial_1 f$ appartient à $L^2(\Omega)$ équivaut donc à dire :

$$\exists h_1 \in L^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} h_1 g_1 \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} f \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \, d\mathbf{x}, \quad \forall g_1 \in \mathcal{D}(\Omega).$$

¹⁰Dire que T est continue signifie :

$$\forall (f_n)_n, f \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ telles que } f_n \rightarrow f \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, f_n \rangle \rightarrow \langle T, f \rangle.$$

Ceci est vrai pour chaque dérivée partielle ($j = 1, 2, 3$).

Par identification, on a $h_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Si on définit

$$\mathcal{D}(\Omega)^3 := \{\mathbf{g} : g_j \in \mathcal{D}(\Omega), j = 1, 2, 3\},$$

alors $\partial_j f \in L^2(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$ ssi $\exists \mathbf{h}$ tel que $h_j \in L^2(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$, qui satisfait à

$$\int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} f \operatorname{div} \mathbf{g} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{D}(\Omega)^3,$$

avec $\mathbf{h} = \operatorname{grad} f \dots$

Soit $\alpha = (j, k, l)$ un multi-indice. A partir de la définition A.5, on peut écrire la généralisation récursive ci-dessous.

Définition A.6 Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Sa dérivée partielle d'ordre α est définie par

$$\langle \partial_{\alpha} T, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial_{\alpha} f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Si $\alpha = (0, 0, 0)$, on ne fait pas de dérivation !

Ceci permet de considérer les espaces de Sobolev d'ordre m , $m \geq 2$.

Définition A.7 $H^m(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) : \partial_{\alpha} f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^3, |\alpha| \leq m\}$. La norme canonique associée est

$$\|f\|_m := \left\{ \int_{\Omega} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^3, |\alpha| \leq m} (\partial_{\alpha} f)^2 \, d\mathbf{x} \right\}^{1/2}. \quad (2.81)$$

Remarque A.1 Si $m = 1$, les deux définitions de $H^1(\Omega)$ coïncident. Par extension à $m = 0$, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

On a la suite d'inclusions strictes, pour $m > p \geq 1$,

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset H^p(\Omega) \subset L^2(\Omega). \quad (2.82)$$

Il reste, pour finir, à introduire les espaces duaux des espaces de Sobolev. En fait, il est habituel de considérer les espaces duaux de

$$H_0^m(\Omega) := \text{fermeture de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } H^m(\Omega) \text{ selon la norme (2.81), pour } m \geq 1.$$

L'explication est double :

- Par densité, on peut remplacer les éléments de $H_0^m(\Omega)$ par des éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$.
- Lorsque Ω est à bord borné et suffisamment régulier, ces espaces peuvent être identifiés à des ensembles dont les éléments ont des traces nulles sur le bord (voir le théorème A.1 pour le cas $m = 1$, et [1] pour la théorie générale.)

Remarque A.2 Si $\Omega = \mathbb{R}^3$, $H_0^m(\Omega) = H^m(\Omega)$, pour tout $m \geq 1$.

Si Ω est borné, $H_0^m(\Omega)$ est strictement inclus dans $H^m(\Omega)$, pour tout $m \geq 1$.

Définition A.8 Pour $m \geq 1$, on appelle $H^{-m}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^m(\Omega)$.

On a cette fois la suite inclusions strictes, pour $m > p \geq 1$,

$$L^2(\Omega) \subset H^{-p}(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega). \quad (2.83)$$

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement de fonctions sur le bord de Ω . Pour cela, nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires sur Ω :

Hypothèses (H2) : soit Γ le bord de Ω , Ω vérifiant (H1). On suppose que

- Γ est *borné*,
- Γ peut être représenté par des cartes locales *lipschitziennes*,
- au voisinage de chacun des points de Γ , Ω est *localement d'un seul côté* de Γ .

NB. Par exemple, l'intérieur Ω_i et l'extérieur Ω_e d'un cube vérifient (H2).

Remarque A.3 *En pratique, les ouverts de type (H2) sont des ouverts dont le bord est borné et composé d'un ensemble de faces régulières $(\Gamma_j)_{1 \leq j \leq N_\Gamma}$, i.e. de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et qui au voisinage de chacun des points du bord, est localement d'un seul côté.)*

Proposition A.3 *Dans un ouvert de type (H2), $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$, pour $m \in \mathbb{N}$.*

NB. C'est parce que Ω est localement d'un *seul* côté de sa frontière que l'on peut définir $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ comme l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$; et c'est également cette identification qui permet de démontrer le résultat annoncé [1].

On munit la face Γ_j de la mesure surfacique de Lebesgue $d\Gamma_j$, et on note $d\Gamma$ la mesure de Lebesgue ainsi définie pour le bord entier.

Définition A.9 *Soit l'ensemble*

$$H^{1/2}(\Gamma) := \{g \in L^2(\Gamma) : \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{(g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y}))^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{y}) < \infty\}.$$

On a le résultat suivant (démontré dans [1]), qui porte sur l'existence de la trace sur Γ d'un élément de $H^1(\Omega)$.

Théorème A.1 *Soit f une fonction régulière définie dans $\overline{\Omega}$: on appelle γ_0 l'application qui à f associe sa trace sur Γ , et on note $\gamma_0 f = f|_\Gamma$. Alors, l'application γ_0 peut être prolongée de façon unique en une application linéaire, continue et surjective de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$.*

De plus,

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : f|_\Gamma = 0\}.$$

On a par ailleurs un résultat très important, si l'on suppose que

Hypothèse (H3) : soit Ω *borné* vérifiant (H2).

NB. Ω_i vérifie (H3), mais pas Ω_e .

On peut alors démontrer l'inégalité de POINCARÉ, qui permet, dans $H_0^1(\Omega)$, de remplacer la norme $\|\cdot\|_1$ par une norme équivalente.

Théorème A.2 *Soit un ouvert Ω satisfaisant à (H3). Alors, il existe une constante $C_P > 0$, dépendant uniquement de Ω , telle que*

$$\forall f \in H_0^1(\Omega), \quad \|f\|_0 \leq C_P \|f\|_1, \quad \text{avec } \|f\|_1 := \left\{ \int_\Omega |\mathbf{grad} f|^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2}.$$

On en déduit aisément le

Corollaire A.1 $\|\cdot\|_1$ et $|\cdot|_1$ sont deux normes équivalentes sur $H_0^1(\Omega)$.

Tout d'abord, $|f|_1 \leq \|f\|_1$, pour tout f élément de $H_0^1(\Omega)$.

De l'inégalité de Poincaré, on tire

$$\|f\|_1^2 = \|f\|_0^2 + |f|_1^2 \leq (1 + C_P^2) |f|_1^2, \quad \forall f \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi, on a bien

$$C_0 \|f\|_1 \leq |f|_1 \leq C_1 \|f\|_1, \quad \forall f \in H_0^1(\Omega),$$

avec $C_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + C_P^2}}$, et $C_1 = 1$.

CQFD

Espaces de Sobolev en électromagnétisme

Si l'on regarde les équations (2.13-2.16), on constate que l'on n'a pas (expressément) besoin des espaces du type $H^1(\Omega)$, puisque les opérateurs différentiels qui interviennent sont le rotationnel et la divergence. Ceci étant, nous verrons dans la suite que cet espace intervient dans la définition de la trace du champ électromagnétique, aussi ce qui précède est utile ! On rappelle que

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

ainsi que la formule $\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w}$.

Pour cela, on introduit successivement ¹¹

Définition A.10 $\mathbf{L}^2(\Omega) := \{\mathbf{v} : v_i \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3\}$.

– $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) := \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3\}$, où le rotationnel est pris au sens des distributions¹². On note

$$\|\mathbf{v}\|_{0, \operatorname{rot}} := \left\{ \int_{\Omega} (|\mathbf{v}|^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{v}|^2) d\mathbf{x} \right\}^{1/2}.$$

– $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) := \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$, où la divergence est prise au sens des distributions¹³. On note

$$\|\mathbf{v}\|_{0, \operatorname{div}} := \left\{ \int_{\Omega} (|\mathbf{v}|^2 + (\operatorname{div} \mathbf{v})^2) d\mathbf{x} \right\}^{1/2}.$$

¹¹Définir $\mathbf{H}(\operatorname{div} \varepsilon, \cdot) \dots$

¹²Soit $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$:

$\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ ssi $\exists \mathbf{h} \in L^2(\Omega)^3$ tel que $\int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g} d\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{g} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$, avec $\mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$.

¹³Soit $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$:

$\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ ssi $\exists h \in L^2(\Omega)$ tel que $\int_{\Omega} h g d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} g d\mathbf{x}$, $\forall g \in \mathcal{D}(\Omega)$, avec $h = \operatorname{div} \mathbf{v}$.

Pour pouvoir définir la trace d'éléments de $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ ou de $H(\mathbf{div}, \Omega)$ sur le bord Γ , il est commode de disposer de formules d'intégration par parties. En effet, on peut alors procéder par dualité, par rapport aux espaces $H^{1/2}(\Gamma)^3$ et $H^{1/2}(\Gamma)$ respectivement, qui sont des espaces liés par construction à $H^1(\Omega)^3$ et $H^1(\Omega)$.

Soit donc Ω un domaine de type (H2), et $\mathbf{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3)^T$ la normale unitaire extérieure au bord.

On a tout d'abord, pour f et g deux fonctions régulières sur $\overline{\Omega}$:

$$\int_{\Omega} \left\{ f \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} g \right\} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} f g n_i d\Gamma, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.84)$$

Que peut-on en déduire ?

◦ Tout d'abord, si $\mathbf{f}$ est une fonction vectorielle régulière sur $\overline{\Omega}$, $(f_i)_{i=1,2,3}$ sont trois fonctions régulières scalaires ; en conséquence

$$\int_{\Omega} \left\{ f_i \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} g \right\} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} f_i g n_i d\Gamma, \quad i = 1, 2, 3.$$

En effectuant la somme sur i , on trouve

$$\int_{\Omega} \{ \mathbf{f} \cdot \mathbf{grad} g + \mathbf{div} \mathbf{f} g \} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} g d\Gamma. \quad (2.85)$$

◦ Si maintenant $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont deux fonctions vectorielles régulières sur $\overline{\Omega}$, les identités suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{g} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \left\{ f_1 \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right) + f_2 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right) + f_3 \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) \right\} d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) g_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) g_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) g_3 \right\} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par différence,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \mathbf{f} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{g} - \mathbf{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \left\{ \left(f_1 \frac{\partial g_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} g_3 \right) - \left(f_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} g_2 \right) + \left(f_2 \frac{\partial g_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} g_1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(f_2 \frac{\partial g_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} g_3 \right) + \left(f_3 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} g_2 \right) - \left(f_3 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} g_1 \right) \right\} d\mathbf{x} \\ &\stackrel{(2.84)}{=} \int_{\Gamma} \{ f_1 (g_3 n_2 - g_2 n_3) + f_2 (g_1 n_3 - g_3 n_1) + f_3 (g_2 n_1 - g_1 n_2) \} d\Gamma \\ &= - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{g} \times \mathbf{n}) d\Gamma. \end{aligned}$$

NB. Le premier membre est antisymétrique en $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$: en conséquence, on peut remplacer le second membre par

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{g} d\Gamma.$$

En conclusion,

$$\int_{\Omega} \{ \mathbf{f} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{g} - \mathbf{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} (\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{g} d\Gamma. \quad (2.86)$$

A partir de (2.85), on peut vérifier par dualité que l'application trace normale γ_n , qui à une fonction vectorielle $\mathbf{f}$ régulière sur $\overline{\Omega}$ associe $\gamma_n \mathbf{f} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma}$, peut être prolongée de façon unique en l'application linéaire, continue et surjective (voir [39, Cor 2.8, chapitre 1, p. 28] pour la dernière propriété)

$$\gamma_n : H(\mathbf{div}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma),$$

où $H^{-1/2}(\Gamma)$ est l'espace dual de $H^{1/2}(\Gamma)$. Le produit de dualité est dérivé du produit scalaire de $L^2(\Gamma)$, $\int_{\Gamma} f g d\Gamma$.

Comme pour les espaces de Sobolev sur Ω , on a les deux inclusions strictes

$$H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma).$$

De même, grâce à (2.86), on démontre que l'application trace tangentielle γ_T , qui a $\mathbf{f}$ régulière sur $\overline{\Omega}$ associe $\gamma_T \mathbf{f} = \mathbf{f} \times \mathbf{n}_{|\Gamma}$, peut être prolongée de façon unique en l'application linéaire et continue

$$\gamma_T : H(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)^3,$$

où $H^{-1/2}(\Gamma)^3$ est l'espace des fonctions vectorielles définies sur Γ , dont chacune des trois composantes appartient à $H^{-1/2}(\Gamma)$.

A partir de là, il est loisible de considérer les espaces de trace nulle. On pose

$$H_0(\mathbf{rot}, \Omega) := \{\mathbf{v} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0\},$$

dont on peut vérifier qu'il est égal à la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ selon la norme canonique [39, Thm 2.12, chapitre 1, p. 35]. De façon similaire,

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{div}, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in H(\mathbf{div}, \Omega) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0\}, \\ &:= \text{fermeture de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } H(\mathbf{div}, \Omega) \text{ selon la norme canonique.} \end{aligned}$$

Lorsque le milieu n'est pas homogène, ε n'est pas constant. Dans ce cas, on définit

$$\begin{aligned} H(\mathbf{div} \varepsilon, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \mathbf{div}(\varepsilon \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)\}, \\ H_0(\mathbf{div} \varepsilon, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in H(\mathbf{div} \varepsilon, \Omega) : \varepsilon \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0\}. \end{aligned}$$

Un 'produit dérivé' de la définition précise des applications trace γ_n et γ_T est que les deux formules d'intégration par parties (2.85) et (2.86) sont satisfaites plus généralement. On a en effet

$$\int_{\Omega} \{\mathbf{f} \cdot \mathbf{grad} g + \mathbf{div} \mathbf{f} g\} d\mathbf{x} = {}_{-1/2, \Gamma} \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}, g \rangle_{1/2, \Gamma}, \quad \forall (\mathbf{f}, g) \in H(\mathbf{div}, \Omega) \times H^1(\Omega), \quad (2.87)$$

$$\int_{\Omega} \{\mathbf{f} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{g} - \mathbf{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}\} d\mathbf{x} = {}_{-1/2, \Gamma} \langle \mathbf{f} \times \mathbf{n}, \mathbf{g} \rangle_{1/2, \Gamma}, \quad \forall (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \times H^1(\Omega)^3. \quad (2.88)$$

Ici, ${}_{-1/2, \Gamma} \langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \Gamma}$ sont les crochets de dualité entre $H^{-1/2}(\Gamma)^{(3)}$ et $H^{1/2}(\Gamma)^{(3)}$. Pour des raisons de présentation, nous écrirons des intégrales sur Γ , en lieu et place de ces crochets. Malgré tout, il faudra bien garder à l'esprit que $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma}$ n'est pas intégrable sur Γ , lorsqu'on a simplement $\mathbf{f} \in H(\mathbf{div}, \Omega)$, et qu'il en est de même pour $\mathbf{f} \times \mathbf{n}_{|\Gamma}$ si $\mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}, \Omega)$...

Enfin, les fonctions vectorielles de certains sous-espaces de $H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\mathbf{div}, \Omega)$ vérifient uniformément une inégalité de type Poincaré, appelée inégalité de WEBER. Cette propriété découle du résultat suivant, établi dans [68].

Théorème A.3 *Soit un ouvert Ω simplement connexe satisfaisant à (H3). Les injections de $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\mathbf{div}, \Omega)$ dans $L^2(\Omega)^3$ et de $H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\mathbf{div}, \Omega)$ dans $L^2(\Omega)^3$ sont compactes.*

Par conséquent, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, on peut alors démontrer le

Corollaire A.2 *Soit un ouvert Ω simplement connexe satisfaisant à (H3). Alors, il existe une constante $C_W > 0$, dépendant uniquement de Ω , telle que*

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{f} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega), \quad \|\mathbf{f}\|_0 &\leq C_W |\mathbf{f}|_{\mathbf{rot}, \text{div}}, \\ \forall \mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega), \quad \|\mathbf{f}\|_0 &\leq C_W |\mathbf{f}|_{\mathbf{rot}, \text{div}}, \end{aligned}$$

$$\text{avec } |\mathbf{f}|_{\mathbf{rot}, \text{div}} := \left\{ \int_{\Omega} \{|\mathbf{rot} \mathbf{f}|^2 + (\text{div} \mathbf{f})^2\} d\mathbf{x} \right\}^{1/2}.$$

On en déduit aisément le

Corollaire A.3 $\|\cdot\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}}$ et $|\cdot|_{\mathbf{rot}, \text{div}}$ sont deux normes équivalentes sur $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega)$ et sur $H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)$.

On trouve

$$\begin{aligned} C_0 \|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}} &\leq |\mathbf{v}|_{\mathbf{rot}, \text{div}} \leq C_1 \|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega), \\ C_0 \|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}} &\leq |\mathbf{v}|_{\mathbf{rot}, \text{div}} \leq C_1 \|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}}, \quad \forall \mathbf{v} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega), \end{aligned}$$

$$\text{avec } C_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + C_W^2}}, \text{ et } C_1 = 1.$$

Ces trois propriétés sont d'une importance capitale lorsque le milieu est homogène. Si toutefois ça n'est pas le cas, la généralisation suivante, qui nous sera fort utile *per se* pour l'étude du cas stationnaire, s'applique (cf. [68, 34, 43]).

Théorème A.4 *Soit un ouvert Ω simplement connexe satisfaisant à (H3) et ε satisfaisant à (H0). Les trois résultats ci-dessous sont vérifiés.*

- (i) *Les injections de $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div} \varepsilon, \Omega)$ dans $L^2(\Omega)^3$ et de $H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div} \varepsilon, \Omega)$ dans $L^2(\Omega)^3$ sont compactes.*
- (ii) *Il existe une constante $C_W(\varepsilon) > 0$, qui dépend uniquement de Ω et de ε , telle que*

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{f} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div} \varepsilon, \Omega), \quad \|\mathbf{f}\|_0 &\leq C_W(\varepsilon) |\mathbf{f}|_{\mathbf{rot}, \text{div} \varepsilon}, \\ \forall \mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div} \varepsilon, \Omega), \quad \|\mathbf{f}\|_0 &\leq C_W(\varepsilon) |\mathbf{f}|_{\mathbf{rot}, \text{div} \varepsilon}, \end{aligned}$$

$$\text{avec } |\mathbf{f}|_{\mathbf{rot}, \text{div} \varepsilon} := \left\{ \int_{\Omega} \{|\mathbf{rot} \mathbf{f}|^2 + (\text{div}(\varepsilon \mathbf{f}))^2\} d\mathbf{x} \right\}^{1/2}.$$

- (iii) $\|\cdot\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div} \varepsilon}$ et $|\cdot|_{\mathbf{rot}, \text{div} \varepsilon}$ sont deux normes équivalentes sur $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div} \varepsilon, \Omega)$ et sur $H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div} \varepsilon, \Omega)$.

Espaces fonctionnels généraux en électromagnétisme

Lorsque l'on résout le système des équations de Maxwell, le champ électromagnétique dépend à la fois du temps t et de la variable d'espace $\mathbf{x}$. On distingue les deux variables : en général, on s'intéresse en effet aux valeurs prises par ce champ, à un instant *donné*. Ainsi, si f dépend de $\mathbf{x}$ et t , on étudie $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, t_0)$, où t_0 est fixé. On peut se contenter de définir deux types d'espaces fonctionnels, et une classe de distributions, dites 'à valeurs vectorielles'.

Soient $T > 0$ le temps final donné, $m \in \mathbb{N}$, X un espace de Banach (de variable $\mathbf{x}$) et H un espace de Hilbert (également de variable $\mathbf{x}$).

Définition A.11 *L'espace $\mathcal{C}^m(0, T; X)$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^m$ sur $[0, T]$, à valeurs dans X . C'est un espace de Banach, muni de la norme*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m(0, T; X)} := \sum_{k=0}^m \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t) \right\|_X. \quad (2.89)$$

Définition A.12 L'espace $L^2(0, T; X)$ est l'ensemble des fonctions mesurables, de carré intégrable sur $]0, T[$, à valeurs dans X . C'est un espace de Banach, muni de la norme

$$\|f\|_{L^2(0, T; X)} := \int_0^T \|f(\cdot, t)\|_X^2 dt. \quad (2.90)$$

Si $X = H$, l'espace $L^2(0, T; H)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(0, T; H)} := \int_0^T (f(\cdot, t), g(\cdot, t))_H dt. \quad (2.91)$$

Remarque A.4 Grâce au théorème de FUBINI, on vérifie sans peine que

$$L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(]0, T[\times \Omega).$$

A partir de là, si f est un élément de $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, on peut définir sa dérivée partielle par rapport à t au sens des distributions, et considérer des éléments tels que $\partial_t f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

La principale différence entre un élément f_L de $L^2(0, T; X)$ et un élément f_C de $\mathcal{C}^m(0, T; X)$ est que, pour le second, $f_C(\cdot, 0)$ et $f_C(\cdot, T)$, les valeurs initiale et finale, sont toujours définies et appartiennent à X . Par contre, $f_L(\cdot, 0)$ et $f_L(\cdot, T)$ peuvent ne pas avoir de sens.

Proposition A.4 Soit Y un second espace de Banach, et soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors, l'application $f \mapsto Af$ est continue de $\mathcal{C}^0(0, T; X)$ dans $\mathcal{C}^0(0, T; Y)$.

Preuve : On écrit simplement que

$$\begin{aligned} \|Af\|_{\mathcal{C}^0(0, T; Y)} &= \sup_{t \in [0, T]} \|Af(t)\|_Y \leq \sup_{t \in [0, T]} (\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|f(t)\|_X) \\ &\leq \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X = \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|f\|_{\mathcal{C}^0(0, T; X)}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé. ■

De façon plus générale, il est nécessaire d'introduire des distributions à valeurs dans des espaces fonctionnels, dites à valeurs vectorielles. Il est possible de procéder comme suit (cf. [30]) :

Définition A.13 L'espace des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans X , noté $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$, est l'ensemble¹⁴ des applications linéaires et continues de $\mathcal{D}(]0, T[)$ dans X .

Si u est un élément de $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$ et ϕ appartient à $\mathcal{D}(]0, T[)$, on note l'action de u sur ϕ par $\langle u, \phi \rangle_t$: par définition, le résultat de ces crochets de dualité appartient à X .

Remarque A.5 Notons que l'on peut identifier les espaces $L^2(0, T; X)$ et $\mathcal{C}^m(0, T; X)$ à des sous-espaces de $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$.

Définition A.14 Pour un élément u de $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$, on pose

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \phi \right\rangle_t = - \left\langle f, \frac{d\phi}{dt} \right\rangle_t, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(]0, T[). \quad (2.92)$$

¹⁴Il est muni de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de $\mathcal{D}(]0, T[)$.

La dérivation au sens des distributions est interne, i.e.

Proposition A.5 $\frac{df}{dt}$ appartient à $\mathcal{D}'([0, T[; X)$.

Pour la troisième définition, on considère un second espace de Banach Y .

Définition A.15 Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pour $f \in \mathcal{D}'([0, T[; X)$, on définit $Af \in \mathcal{D}'([0, T[; Y)$ par

$$\langle Af, \phi \rangle_t = A(\langle f, \phi \rangle_t), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}([0, T[). \quad (2.93)$$

Proposition A.6 L'application $f \mapsto Af$ est linéaire et continue de $\mathcal{D}'([0, T[; X)$ dans $\mathcal{D}'([0, T[; Y)$.

A partir des deux dernières définitions et des propositions associées, on en déduit le résultat *fondamental* (et néanmoins attendu !) concernant les distributions en temps et en espace : on peut *intervertir* les dérivations en temps et en espace.

Théorème A.5 Pour tout couple d'éléments (u, A) de $X \times \mathcal{L}(X, Y)$, on a l'identité

$$\frac{d}{dt}(Au) = A\left(\frac{du}{dt}\right).$$

Preuve : Soit donc $\phi \in \mathcal{D}'([0, T[)$. On a

$$\begin{aligned} \langle \frac{d}{dt}(Au), \phi \rangle_t &\stackrel{(2.92)}{=} - \langle Au, \frac{d\phi}{dt} \rangle_t \stackrel{(2.93)}{=} -A(\langle u, \frac{d\phi}{dt} \rangle_t) \\ &\stackrel{(2.92)}{=} A\left(\langle \frac{du}{dt}, \phi \rangle_t\right) \stackrel{(2.93)}{=} \langle A\left(\frac{du}{dt}\right), \phi \rangle_t. \end{aligned}$$

■

Par exemple, si $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'([0, T[; L^2(\Omega)^3)$, on sait que $\mathbf{rot} \mathbf{u} \in \mathcal{D}'([0, T[; H_0(\mathbf{rot}, \Omega)')$. En effet, l'application linéaire $\mathbf{rot} : L^2(\Omega)^3 \rightarrow H_0(\mathbf{rot}, \Omega)'$ est continue.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)'} &= \sup_{\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}}} = \sup_{\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dx}{\|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}}} \\ &\leq \sup_{\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\mathbf{u}\|_0 \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_0}{\|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}}} \leq \|\mathbf{u}\|_0. \end{aligned}$$

D'après le théorème précédent, $\frac{d}{dt}(\mathbf{rot} \mathbf{u})$ et $\mathbf{rot} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)$ coïncident dans $\mathcal{D}'([0, T[; H_0(\mathbf{rot}, \Omega)')$.

Ces considérations sont abstraites dans le cas général. Cependant, on peut les 'simplifier' dans les deux cas suivants :

- X est un espace de Hilbert séparable ;
- X est un espace de Sobolev $H^{-p}(\Omega)$, $p > 0$.

Dans le premier cas, on note $(e_k)_k$ une base hilbertienne de X .

Soit par exemple f un élément de $\mathcal{C}^m(0, T; X)$. L'application $f_k = (f, e_k)_X$ appartient à $\mathcal{C}^m(0, T)$. Réciproquement, si on dispose d'une famille d'éléments $(f_k)_k$, alors $f = \sum_k f_k e_k$ appartient à $\mathcal{C}^m(0, T; X)$, sous réserve que la continuité des formes $(f_k)_k$ est *uniforme*.

Dans le second cas, on raisonne par dualité.

Toujours pour un élément f de $\mathcal{C}^m(0, T; X)$, $g_k = {}_{H^{-p}(\Omega)} \langle f, e_k \rangle_{H_0^p(\Omega)}$ appartient à $\mathcal{C}^m(0, T)$. Réciproquement, si on dispose d'une famille $(g_k)_k$ et que l'on note $(e'_k)_k$ une base duale de $(e_k)_k$, alors $f = \sum_k g_k e'_k$ appartient à $\mathcal{C}^m(0, T; X)$, encore une fois *sous réserve* d'une condition de continuité *uniforme*...

Dans les deux cas, si on veut vérifier que f est *nulle*, il y a équivalence, puisque la nullité est une notion uniforme !

On a le même type de résultats pour un élément de $\mathcal{D}'([0, T[; X)$ ou de $L^2(0, T; X)$, pour le passage¹⁵ de f à $(f_k)_k$ (resp. $(g_k)_k$). Par contre, la réciproque est beaucoup plus complexe, à l'exception toutefois du cas où f est *nulle*.

Dans le corps du texte, nous avons conservé la notation $\mathbf{u}(\cdot, t) : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, c'est-à-dire la valeur à un instant donné t . Si $\mathbf{u}$ appartient à $\mathcal{C}^m(0, T; X)$, où X est un espace de Banach, cette notation est parfaitement justifiée. Si $\mathbf{u}$ est un élément de $L^2(0, T; X)$, $\mathbf{u}$ est connue presque pour tout t . Dans le cas général, c'est-à-dire si $\mathbf{u}$ est un élément de $\mathcal{D}'([0, T[; X)$, ceci est un *abus de notation*. Néanmoins, l'adoption de cette notation permet de donner une présentation plus homogène, car ceci correspond à la perception physique, c'est-à-dire à la connaissance du champ électromagnétique à un instant donné. En outre, d'un point de vue mathématique, ceci n'est pas réellement gênant, puisque les dérivations par rapport à $\mathbf{x}$ ou par rapport à t peuvent être interverties, d'après le théorème A.5.

¹⁵Pour $f \in \mathcal{D}'([0, T[; X)$, f est par définition une application linéaire et continue de $\mathcal{D}([0, T[)$ dans X . Dans le premier cas, l'application f_k , qui à ϕ de $\mathcal{D}([0, T[)$ associe $f_k(\phi) = \langle f, \phi \rangle_t, e_k \rangle_X$ est une *distribution au sens usuel*. Dans le second cas, $\phi \mapsto g_k(\phi) = {}_{H^{-p}(\Omega)} \langle \langle f, \phi \rangle_t, e_k \rangle_{H_0^p(\Omega)}$ est également une *distribution au sens usuel*...

Chapitre 3

Méthodes numériques et résolution

3.1 Quelques formulations (possibles) du problème

Nous considérons un domaine Ω , ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière Γ . Nous nous plaçons en géométrie cartésienne, avec les coordonnées usuelles (x, y, z) . On désigne par $\mathbf{n}$ la normale unitaire sortante. Sauf mention explicite du contraire, le milieu d'étude est le vide, c'est-à-dire que $\varepsilon \equiv \varepsilon_0$ et $\mu \equiv \mu_0$. La célérité de la lumière, c , est définie par $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

3.1.1 Une formulation du premier ordre

Nous rappelons l'expression des équations de Maxwell dans le vide, qui s'écrivent ($\mathcal{E}$ champ électrique, $\mathcal{B} = \mu_0 \mathcal{H}$ induction magnétique) :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \mathbf{rot} \mathcal{B} = -\mu_0 \mathcal{J}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathcal{E} = 0, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{\mathcal{R}}{\varepsilon_0}, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0, \quad (3.4)$$

auxquelles on adjoint la conservation de la charge, que nous considérons comme une *relation de continuité*

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{J} = 0. \quad (3.5)$$

Remarque 3.1.1 1. La condition (3.5) est une conséquence de (3.1) et (3.3). Dans les équations du problème continu, elle apparaît donc comme redondante. Sur le plan du calcul numérique, elle joue cependant un rôle important. En effet, si les quantités $\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$ calculées par une méthode numérique ne vérifient pas (3.5), elles génèrent, en tant que seconds membres des équations de Maxwell, des instabilités dues à des incompatibilités entre (3.1) et (3.3).

2. De façon analogue, on vérifie facilement que les champs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ solutions de (3.1) et (3.2), satisfont à tout instant t les contraintes en divergence (3.3-3.4) si ces contraintes sont vérifiées à l'instant initial $t = 0$. Là encore, cette propriété n'est plus nécessairement vraie pour une méthode numérique ; les contraintes en divergence nécessiteront une attention toute particulière.

Conditions aux limites et conditions initiales

On suppose que, sur une partie Γ_C de Γ , le champ électromagnétique vérifie la condition aux limites de conducteur parfait, soit

$$\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_C, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_C. \quad (3.7)$$

Dans la plupart des cas, cette condition ne suffit pas à modéliser correctement des problèmes issus de la physique. On doit souvent ajouter une condition, qui peut traduire aussi bien l'entrée dans le domaine Ω d'une onde électromagnétique, que la sortie d'une onde sans réflexion sur le bord. Cette dernière condition permet de clore le domaine de calcul (voir l'exemple du guide d'ondes, chapitre 1). On désigne par Γ_A cette partie de la frontière, et la condition aux limites sur Γ_A s'énonce alors :

$$(\mathcal{E} - c\mathcal{B} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{e}^* \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_A, \quad \mathbf{e}^* \text{ donné}, \quad (3.8)$$

ou, de façon analogue,

$$(c\mathcal{B} + \mathcal{E} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = c\mathbf{b}^* \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_A, \quad \mathbf{b}^* \text{ donné}. \quad (3.9)$$

Cette condition s'obtient en approchant localement la frontière Γ_A par son plan tangent, et en écrivant qu'une onde plane à incidence normale sort du domaine sans être réfléchi, pour $\mathbf{e}^* = 0$ ou $\mathbf{b}^* = 0$. Elle est donc exacte dans ce cas de figure ; sinon, c'est une approximation. Dans le cas $\mathbf{e}^* \neq 0$ ou $\mathbf{b}^* \neq 0$, cette condition traduit, dans les mêmes conditions d'approximation de la frontière par son plan tangent, la pénétration d'une onde plane à incidence normale dans le domaine Ω .

Cette condition aux limites est souvent appelée condition de Silver-Müller [57], et a été développée dans le même esprit que celui présenté dans [14], pp. 370-371. Il existe une vaste littérature à ce sujet (voir entre autres [33] pour l'équation des ondes scalaires, puis [47], [11] pour le cas des équations (vectorielles) de Maxwell.)

Remarque 3.1.2 *On sait déterminer une condition exacte, appelée condition transparente, qui traduit qu'une onde sort du domaine sans être réfléchi. Cependant, cette condition est non locale en espace et en temps, et donc difficile, voire impossible à mettre en œuvre numériquement. On se contente alors d'une approximation à un ordre n donné de la condition transparente, appelée condition absorbante d'ordre n . La condition de Silver-Müller est une approximation d'ordre 1, qui est simple à mettre en œuvre (voir section suivante), et très souvent suffisante pour la résolution de problèmes intérieurs. Si on s'intéresse à la résolution de problèmes extérieurs (voir le chapitre 1), on doit utiliser des approximations d'ordre 2 ou plus pour ne pas polluer la solution par des réflexions parasites.*

On adjoint souvent à ce système d'équations des conditions initiales, soit

$$\mathcal{E}(\cdot, 0) = \mathcal{E}_0, \text{ avec } \operatorname{div} \mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{R}_0}{\varepsilon_0}, \mathcal{R}_0 := \mathcal{R}(\cdot, 0), \quad (3.10)$$

$$\mathcal{B}(\cdot, 0) = \mathcal{B}_0, \text{ avec } \operatorname{div} \mathcal{B}_0 = 0, \quad (3.11)$$

où $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{B}_0$ sont des champs donnés qui vérifient aussi les conditions aux limites, ce qui donne,

$$\mathcal{E}_0 \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_C, \quad \mathcal{B}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_C,$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}_0 - c\mathcal{B}_0 \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} &= \mathbf{e}_0^* \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_A, \\
\text{ou de façon équivalente,} \\
(c\mathcal{B}_0 + \mathcal{E}_0 \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} &= c\mathbf{b}_0^* \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_A.
\end{aligned}$$

Il existe bien sûr d'autres formulations possibles de ces équations.

3.1.2 Deux formulations ordre1-ordre2

On peut choisir de dériver l'équation d'évolution du champ magnétique $\mathcal{B}$ (3.2) ou du champ électrique $\mathcal{E}$ (3.1). Ainsi (cf. le théorème 2.4.2 du chapitre 2), en dérivant (3.2) par rapport au temps, et en utilisant le rotationnel de (3.1), on obtient aisément une formulation du second ordre en $\mathcal{B}$, découlée du champ $\mathcal{E}$, qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial t^2} + c^2 \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathcal{B} = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{rot} \mathcal{J}, \quad (3.12)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0, \quad (3.13)$$

complétée par les équations (3.1-3.3) du premier ordre en $\mathcal{E}$, qui restent couplées au champ $\mathcal{B}$.

Les conditions aux limites et initiales demeurent inchangées. Cependant, le problème en $\mathcal{B}$ étant du second ordre, il faut lui adjoindre une condition initiale portant sur la valeur de la dérivée à l'instant initial, obtenue en prenant la trace de (3.2) en $t = 0$, soit

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}(0) = \mathcal{B}_1, \quad \mathcal{B}_1 := -\mathbf{rot} \mathcal{E}_0. \quad (3.14)$$

Remarque 3.1.3 1. La condition aux limites de conducteur parfait sur $\mathcal{B}$ (3.7) apparaît en fait comme une conséquence des équations de Maxwell écrites sous forme de système du premier ordre. En effet, en effectuant le produit scalaire de (3.2) par $\mathbf{n}|_{\Gamma_C}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{B} \cdot \mathbf{n}}{\partial t}|_{\Gamma_C} &= -(\mathbf{rot} \mathcal{E}) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_C} = 0 \\
\Rightarrow \mathcal{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_C} &= \mathcal{B}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_C} [= 0].
\end{aligned}$$

2. Dans le cas de la formulation du second ordre en $\mathcal{B}$, on peut donner une autre expression sur le champ $\mathcal{B}$ de la condition aux limites de conducteur parfait (cf. 2.40). En effet, avec (3.1) $\times \mathbf{n}|_{\Gamma_C}$, on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{E} \times \mathbf{n}}{\partial t}|_{\Gamma_C} = (c^2 \mathbf{rot} \mathcal{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{J}) \times \mathbf{n}|_{\Gamma_C} = 0,$$

soit la condition aux limites de conducteur parfait

$$(\mathbf{rot} \mathcal{B} - \mu_0 \mathcal{J}) \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_C. \quad (3.15)$$

L'expression $\mathcal{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_C} = 0$ apparaît là encore comme redondante (le problème est bien posé si on impose uniquement (3.15), et peut être avantageusement remplacée par l'expression (3.15), qui est plus facile à prendre en compte numériquement, si on choisit d'utiliser la formulation du second ordre en $\mathcal{B}$).

De manière duale (cf. le théorème 2.4.1 du chapitre 2), on peut évidemment choisir de dériver l'équation d'évolution du champ électrique $\mathcal{E}$ (3.1), et en utilisant le rotationnel de (3.2), on obtient ainsi une formulation du second ordre en $\mathcal{E}$ découplée du champ $\mathcal{B}$, qui s'écrit cette fois

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + c^2 \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathcal{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}, \quad (3.16)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{\mathcal{R}}{\varepsilon_0}, \quad (3.17)$$

adjointe des équations (3.2) et (3.4) du premier ordre en $\mathcal{B}$, qui restent couplées au champ $\mathcal{E}$.

Les conditions aux limites et initiales demeurent inchangées. Cependant, le problème en $\mathcal{E}$ étant du second ordre, il faut ajouter une condition initiale, obtenue en prenant la trace de (3.1) en $t = 0$, soit

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(0) = \mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_1 := c^2 \mathbf{rot} \mathcal{B}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{J}(\cdot, 0). \quad (3.18)$$

3.1.3 Une formulation de type équation des ondes

Enfin, une dernière possibilité consiste à utiliser la formulation (3.12-3.13) pour le champ $\mathcal{B}$ et (3.16-3.17) pour le champ $\mathcal{E}$. On obtient ainsi deux formulations du second ordre en temps, du type équation des ondes (vectorielles) pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$, qui ne sont alors plus couplées que par les conditions *initiales* supplémentaires (3.14) d'une part, (3.18) d'autre part, et par les seconds membres des équations. Dans ce cas, toutes les conditions aux limites doivent apparaître indépendamment sur chacun des systèmes d'équations. Par exemple, pour obtenir une condition de conducteur parfait, on doit imposer (3.6) sur le système d'équations en $\mathcal{E}$, et (3.7) ou (3.15) sur celui en $\mathcal{B}$.

3.1.4 Conséquences numériques

Le choix de la formulation a des conséquences importantes sur le plan numérique.

- Ainsi, une méthode de discrétisation (en espace) par éléments finis de la formulation du premier ordre sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ peut conduire à des schémas oscillants (voir [53]). En effet, on obtient des schémas qui convergent dans $L^2(\Omega)^3$ mais pas dans $H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\operatorname{div}, \Omega)$. Autrement dit, on contrôle une énergie de la forme

$$\int_{\Omega} \{ |\mathcal{E}|^2 + \frac{1}{c^2} |\mathcal{B}|^2 \} d\mathbf{x},$$

mais pas les dérivées premières des solutions, alors qu'une formulation de type équation des ondes permet de contrôler

$$\int_{\Omega} \left\{ \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right|^2 + |\mathbf{rot} \mathcal{E}|^2 + |\operatorname{div} \mathcal{E}|^2 + \frac{1}{c^2} \left(\left| \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right|^2 + |\mathbf{rot} \mathcal{B}|^2 + |\operatorname{div} \mathcal{B}|^2 \right) \right\} d\mathbf{x}.$$

- Avec une formulation (3.12-3.13), on calcule tout d'abord $\mathcal{B}$ et on en déduit alors $\mathcal{E}$ avec (3.1). Le calcul du champ $\mathcal{B}$ se fait correctement. Par contre, ceci peut être une source de problèmes, le champ $\mathcal{E}$ (qui est une fonction continue du temps) étant alors calculé comme la somme de $\mathbf{rot} \mathcal{B}$ et de $\frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{J}$. Donnons en un exemple concret ([44]). Soit Ω un domaine cylindrique de rayon R_0 donné. A l'intérieur du domaine

circule dans un cylindre de rayon $R_1 < R_0$ un courant, dont le profil temporel est de la forme

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - \exp(-t/\tau_0) \end{pmatrix},$$

avec τ_0 une constante. On fixe les champs initiaux à $\mathcal{E}_0 = \mathcal{B}_0 = 0$. Les plans supérieur et inférieur de ce cylindre sont munis d'une condition aux limites de conducteur parfait, et le pourtour cylindrique externe d'une condition absorbante. On s'attend à ce que la solution converge, lorsque t tend vers l'infini, vers un champ électrique nul et un champ magnétique statique donné par une densité de courant uniforme :

$$\mathcal{B} = B_\infty \mathbf{e}_r \text{ avec } B_\infty = \begin{cases} \mu_0 \mathcal{J} r / 2 & \text{si } r < R_1 \\ \mu_0 \mathcal{J} R_1^2 / 2r & \text{sinon} \end{cases},$$

où $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ est la base associée aux coordonnées cylindriques ($\mathbf{e}_z$ parallèle à l'axe du cylindre). De plus, pour tout temps, la composante tangentielle de $\mathcal{E}$ est nulle (cf. chapitre 2) à travers la surface $\Sigma = \{(r, \theta, z) : r = R_1\}$ c'est donc en particulier le cas de la composante $\mathcal{E}_z$. Un calcul effectué par une formulation (3.12-3.13), montre que la composante $\mathcal{B}_y$ est correcte, tandis que $\mathcal{E}_z$ présente une très nette discontinuité au niveau de la surface Σ .

- Evidemment, ce problème disparaît si on utilise une formulation sous forme de deux équations des ondes. Enfin, une telle formulation permet, le cas échéant (voir les exemples du chapitre 1), de ne calculer qu'un seul des champs, ce qui économise la moitié du temps de calcul.

En conséquence, on travaillera dans toute la suite avec cette dernière formulation.

Ainsi, les problèmes en $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{B}$ peuvent s'écrire de façon générique sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + c^2 \mathbf{rot rot} \mathbf{u} &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{div} \mathbf{u} &= g. \end{aligned}$$

Ce sont ces problèmes que nous allons examiner maintenant.

3.2 Rappels sur les problèmes mixtes

Afin de simplifier la présentation, on va considérer le cas où toute la frontière est un conducteur parfait, c'est-à-dire $\Gamma = \Gamma_C$. Comme on s'intéresse au problème en espace (et pas en temps), on considère donc le problème stationnaire associé, autrement dit on "gèle" le temps. Pour ce faire, on introduit un paramètre $\lambda^2 > 0$, où le carré représente la prise en compte d'une dérivée seconde. On peut alors énoncer le problème ainsi :

Pour deux fonctions $\mathbf{f}$ et g données, on cherche $\mathbf{u}$ solution de

$$\mathbf{rot rot} \mathbf{u} + \lambda^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = g \text{ dans } \Omega, \quad (3.20)$$

satisfaisant une condition aux limites du type

$$\text{Dirichlet} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (\rightarrow \text{ champ } \mathcal{E}), \quad (3.21)$$

ou

$$\text{Neumann}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma (\rightarrow \text{ induction } \mathcal{B}).$$

En associant la divergence de (3.19) avec (3.20), on en déduit que les données $\mathbf{f}$ et g doivent vérifier

$$\text{div } \mathbf{f} = \lambda^2 g \text{ dans } \Omega \quad (3.22)$$

qui est la trace de la relation de continuité $\partial_t \mathcal{R} + \text{div } \mathcal{J} = 0$. Si la relation (3.22) n'est pas vérifiée exactement - et numériquement elle ne sera qu'approchée - on la considère comme une contrainte.

Remarque 3.2.1 1. Pour $\lambda^2 = 0$, on retrouve bien sûr le cas statique. Les résultats que nous énonçons sont valables dans ce cas, mais les preuves changent un peu. Essentiellement, l'ellipticité de la forme bilinéaire, qui est quasi-immédiate lorsque $\lambda^2 > 0$, puisqu'on retrouve alors la norme canonique de $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ (à une constante près), se prouve en faisant appel à une inégalité de Weber (voir annexe du chapitre 2).

2. En termes de schémas numériques, le cas $\lambda > 0$ correspond au schéma que l'on obtient après une discrétisation implicite en temps.

3. Le cas d'un paramètre strictement négatif, c'est-à-dire $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{u}$ correspond au cas où la dépendance en temps est en $\exp(i\omega t)$, autrement dit, à la forme stationnaire des équations de Maxwell. Les champs sont à valeurs complexes, mais les techniques restent similaires (voir chapitre 2).

Dans la suite, nous nous concentrons sur le deuxième cas.

On introduit alors un multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte, noté p , et on considère le problème suivant :

Pour $\mathbf{f}$ et g données, on cherche $(\mathbf{u}, p)$ tels que

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} + \lambda^2 \mathbf{u} - \mathbf{grad} p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (3.23)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = g \text{ dans } \Omega. \quad (3.24)$$

On doit imposer à p une condition aux limites. Comment la déterminer ?

Prenons la divergence de (3.23), on a avec (3.24)

$$\lambda^2 g - \Delta p = \text{div } \mathbf{f},$$

qui s'écrit

$$\Delta p = \text{div } \mathbf{f} - \lambda^2 g.$$

Si (3.22) est vérifié, p est solution de

$$\Delta p = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Il est alors naturel de choisir comme condition aux limites sur p

$$p = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

de sorte que $p \equiv 0$ sous réserve que $p \in H^1(\Omega)$. Ainsi, l'introduction du multiplicateur de Lagrange n'a pas modifié le problème initial. Autrement dit, le problème (3.23 – 3.24) est bien équivalent au problème initial (3.19-3.20). Pour résoudre ce problème modifié (contraint), on va au préalable rappeler un résultat général d'analyse fonctionnelle.

Soient

- Deux espaces de Hilbert X et Q (sur $\mathbb{R}$ par exemple)
- Deux formes bilinéaires continues

$$\begin{aligned} a : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} & b : X \times Q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & (\mathbf{v}, q) &\mapsto b(\mathbf{v}, q) \end{aligned}$$

- Deux formes linéaires continues

$$\begin{aligned} L : X &\longrightarrow \mathbb{R} & \Phi : Q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto L(\mathbf{v}) & q &\mapsto \Phi(q) \end{aligned}$$

On considère le problème suivant, dit mixte ou de point-selle :

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in X \times Q$ solution de

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X, \quad (3.25)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = \Phi(q) \quad \forall q \in Q. \quad (3.26)$$

En introduisant le sous-espace fermé V de X défini par

$$V := \{\mathbf{v} \in X : b(\mathbf{v}, q) = 0, \forall q \in Q\},$$

on a le résultat suivant ([8, 17]) :

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses*

a est V -elliptique (ou coercitive sur V), i.e.,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_X^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

b vérifie la condition inf-sup (ou condition de Babuska-Brezzi), i.e.,

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_X} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q \quad (3.27)$$

alors le problème (3.25-3.26) admet une unique solution $(\mathbf{u}, p) \in X \times Q$.

Preuve : La preuve de ce théorème sort du cadre de ce cours. Nous renvoyons le lecteur intéressé à des ouvrages de synthèse tels que par exemple [18] ou [39]. ■

Remarque 3.2.2 *On parle de problème mixte dans le cadre de l'analyse variationnelle, et de problème de point-selle dans le cadre de l'optimisation sous contraintes. Dans la suite, nous utiliserons indifféremment l'un ou l'autre vocabulaire, car ce sont deux points de vue différents d'un même problème. En effet, le problème mixte (3.25-3.26) correspond aux conditions d'optimalité du problème de la minimisation de la fonctionnelle quadratique $J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})$ sur l'espace des états contraints. Ainsi, la forme bilinéaire $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ étant symétrique, on peut interpréter le couple solution $(\mathbf{u}, p)$ comme le point-selle du Lagrangien $\mathcal{L}(\mathbf{v}, q) = J(\mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - \Phi(q)$. Rappelons que le point-selle est par définition le couple $(\mathbf{u}, p)$ tel que*

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, q) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}, p) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, p), \quad \forall \mathbf{v} \in X, \forall q \in Q.$$

Remarque 3.2.3 On peut écrire la condition (3.27) sous la forme équivalente

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_X \|q\|_Q} \geq \beta. \quad (3.28)$$

On va appliquer ce résultat au problème (3.23-3.24) avec la condition aux limites de Dirichlet (3.21). On a alors le résultat suivant :

Corollaire 3.2.1 Etant donnés $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$ et $g \in L^2(\Omega)$, il existe un et un seul couple $(\mathbf{u}, p) \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ solution de la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} \{\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega), \quad (3.29)$$

$$- \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} q d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g q d\mathbf{x} \quad \forall q \in H_0^1(\Omega). \quad (3.30)$$

Remarque 3.2.4 Les conditions aux limites pour $\mathbf{u}$ et p sont incluses dans l'espace, car c'est un problème avec conditions aux limites de type Dirichlet. De plus, si la condition de compatibilité entre $\mathbf{f}$ et g (3.22) est vérifiée, on obtient aisément que $p = 0$, en prenant comme champ test $\mathbf{v} = \mathbf{grad} p$, et que $\mathbf{u}$ est solution du problème initial.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec

$$X = H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \text{ et } Q = H_0^1(\Omega),$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \{\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} d\mathbf{x} \text{ et } b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} q d\mathbf{x},$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \text{ et } \Phi(q) = \int_{\Omega} g q d\mathbf{x}.$$

La forme bilinéaire a est clairement elliptique dans $H(\mathbf{rot}, \Omega)$, donc dans X , quel que soit $\lambda^2 > 0$ fixé.

On va vérifier la condition inf-sup :

Soit $q \in H_0^1(\Omega)$ donné, alors $\mathbf{v} = \mathbf{grad} q$ est tel que :

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{rot} (\mathbf{grad} q) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{grad} q \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (q \in H_0^1(\Omega) \text{ cf. sous-section 2.2.3}).$$

Ainsi $\mathbf{v} = \mathbf{grad} q \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$. Pour ce $\mathbf{v}$, on a

$$|b(\mathbf{v}, q)| = \|\mathbf{grad} q\|_0^2 = \|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}} \|\mathbf{grad} q\|_0.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré (cf. Corollaire A.1, Annexe du chapitre 2)

$$\|\mathbf{grad} q\|_0 \geq \beta \|q\|_1 (\beta = C_0 > 0),$$

on obtient finalement que

$$b(\mathbf{v}, q) \geq \beta \|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}} \|q\|_1,$$

d'où la condition inf-sup. ■

Remarque 3.2.5 1. On peut faire une démonstration analogue dans le cas d'une condition aux limites de Neumann, il n'y a pas de difficulté supplémentaire.

2. Au cours de cette preuve, on a montré un résultat qui sera utile lors de la construction des éléments finis conformes dans $H(\mathbf{rot}, \Omega)$, qui peut s'énoncer sous forme d'un lemme¹

Lemme 3.2.1 Si $q \in H_0^1(\Omega)$, alors $\mathbf{v} = \mathbf{grad} q \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$.

¹Ajouter un diagramme dit de 'de Rham'...

3.3 Une méthode d'éléments finis dans $H(\mathbf{rot}, \Omega)$

² On va maintenant présenter une méthode d'éléments finis pour discrétiser la formulation mixte dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$. On a d'abord besoin d'un résultat plus général portant sur la *discrétisation* du problème (3.25-3.26). On introduit le paramètre h (dont la "vocation" est de tendre vers 0). Pour un h donné, on considère les espaces d'approximation dont les dimensions sont finies, $X_h \subset X$ et $Q_h \subset Q$, et on définit le sous-espace V_h de X_h suivant

$$V_h := \{\mathbf{v} \in X_h : b(\mathbf{v}, q) = 0, \forall q \in Q_h\}.$$

On introduit alors le *problème approché* du problème (3.25-3.26) suivant :

Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times Q_h$ solution de

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X_h, \quad (3.31)$$

$$b(\mathbf{u}_h, q) = \Phi(q) \quad \forall q \in Q_h. \quad (3.32)$$

On a alors un théorème analogue au cas continu (voir théorème 3.2.1)

Théorème 3.3.1 *On suppose qu'il existe $\alpha, \beta > 0$, indépendantes de h telles que*

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_X^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V_h \quad (3.33)$$

$$\sup_{\mathbf{v} \in X_h} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_X} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q_h. \quad (3.34)$$

Alors le problème (3.31-3.32) admet une unique solution $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times Q_h$. De plus, il existe $c > 0$ indépendante de h telle que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X + \|p - p_h\|_Q \leq c \left(\inf_{\mathbf{v} \in X_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_X + \inf_{q \in Q_h} \|p - q\|_Q \right)$$

pour $(\mathbf{u}, p)$ solution du problème continu (3.25-3.26).

Preuve : La preuve sort du cadre de ce cours. Voir encore [18] ou [39]. ■

On va appliquer ce résultat au problème qui nous concerne. On avait posé

$$X = H_0(\mathbf{rot}, \Omega), \quad Q = H_0^1(\Omega).$$

On introduit alors les espaces de dimension finie $X_h \subset H(\mathbf{rot}, \Omega)$ et $Q_h \subset H^1(\Omega)$, puis on définit

$$X_h^0 := X_h \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega), \quad Q_h^0 := Q_h \cap H_0^1(\Omega),$$

pour lesquels on suppose que la condition de compatibilité suivante est vérifiée :

$$\forall q \in Q_h^0, \quad \mathbf{grad} q \in X_h^0 \text{ (trace discrète du lemme 3.2.1.)} \quad (3.35)$$

Le problème approché s'écrit :

Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h^0 \times Q_h^0$ solution de la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} \{\mathbf{rot} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}\} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{grad} p_h \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in X_h^0, \quad (3.36)$$

$$- \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{grad} q d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g q d\mathbf{x} \quad \forall q \in Q_h^0, \quad (3.37)$$

Le théorème 3.3.1 appliqué à ce cas s'énonce alors

²Mettre des indices $_h$ pour les fonctions-test discrètes...

Théorème 3.3.2 *Sous l'hypothèse (3.35), le problème (3.36-3.37) admet une unique solution $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h^0 \times Q_h^0$, et pour $(\mathbf{u}, p)$ solution de (3.29-3.30), on a*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\text{rot}} + \|p_h\|_1 \leq c \left[\inf_{\mathbf{v} \in X_h^0} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{0,\text{rot}} \right].$$

Preuve : L'ellipticité uniforme de la forme bilinéaire est claire. Pour la condition inf-sup discrète, on prend une fonction $q \in Q_h^0$, alors $\mathbf{v} = -\mathbf{grad} q \in X_h^0$ par hypothèse, et on a pour ce $\mathbf{v}$

$$b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} |\mathbf{grad} q|_0^2 d\mathbf{x} = \|\mathbf{v}\|_{0,\text{rot}} \|\mathbf{grad} q\|_0.$$

On applique le théorème 3.3.1 pour conclure. ■

Corollaire 3.3.1 *$(\mathbf{u}_h, p_h)$ solution de (3.36-3.37) vérifie $p_h \equiv 0$.*

Preuve : Il suffit de procéder comme pour le cas continu : on choisit comme champ test dans (3.36) $\mathbf{v} = \mathbf{grad} q$, $q \in Q_h^0$. L'équation (3.36) s'écrit alors

$$\int_{\Omega} \mathbf{grad} p_h \cdot \mathbf{grad} q d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\lambda^2 \mathbf{u}_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{grad} q d\mathbf{x}.$$

En utilisant (3.37), on élimine le terme en $\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{grad} q$, de sorte que $p_h \in Q_h^0$ est l'unique solution de

$$\int_{\Omega} \mathbf{grad} p_h \cdot \mathbf{grad} q d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{grad} q + \lambda^2 g q) d\mathbf{x}, \quad \forall q \in Q_h^0.$$

On remarque de plus que le membre de droite vérifie

$$- \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{grad} q + \lambda^2 g q) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{f} - \lambda^2 g) q d\mathbf{x}.$$

Or, d'après la condition de compatibilité, on a $\text{div} \mathbf{f} - \lambda^2 g \equiv 0$. Ainsi $(\mathbf{u}_h, p_h)$ solution de (3.36-3.37) vérifie $p_h \equiv 0$. ■

Remarque 3.3.1 *Par voie de conséquence, $\mathbf{u}_h \in X_h^0$ est finalement l'unique solution de*

$$\int_{\Omega} \{\mathbf{rot} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}\} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in X_h^0. \quad (3.38)$$

Autrement dit, la contrainte est automatiquement vérifiée sous forme variationnelle, avec l'hypothèse fondamentale que $q \in Q_h^0 \Rightarrow \mathbf{grad} q \in X_h^0$, c'est-à-dire (3.35).

Dans la suite, on va voir comment construire des espaces d'éléments finis X_h et Q_h qui vérifient cette hypothèse. Dans ce cas, lors d'une mise en œuvre informatique, on préférera toujours éliminer le terme en $\mathbf{grad} p_h \cdot \mathbf{v}$ et résoudre directement la formulation sous sa forme (3.38), pourvu que les seconds membres calculés $\mathbf{f}_h$ et g_h vérifient

$$\text{div} \mathbf{f}_h - \lambda^2 g_h = 0.$$

Si ce n'est pas le cas, on devra alors conserver une formulation mixte du problème.

3.3.1 Élément fini H_{rot} de Raviart-Nédélec

On va présenter le plus simple et le plus utilisé des éléments finis conforme dans $H(\mathbf{rot}, \Omega)$, c'est-à-dire celui de plus bas degré ([59]).

On considère un domaine Ω polyédrique, $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$, constituée de tétraèdres en dimension 3 (ou de triangles en dimension 2) notés K .

On introduit l'espace d'éléments finis (standard, i.e. P^1)

$$Q_h := \{\phi \in C^0(\overline{\Omega}) : \phi|_K \in P^1, \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

et pour Q_h^0 , on prend

$$Q_h^0 := Q_h \cap H_0^1(\Omega). \quad (3.39)$$

L'espace Q_h^0 est donc l'ensemble des éléments de Q_h , dont les degrés de liberté sont nuls sur le bord. La difficulté est de construire X_h et X_h^0 . On définit d'abord

$$\mathcal{R}_1 := \{\mathbf{p} \in (P^1)^3 : \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\}$$

qui est un espace de dimension 6. Pour un tétraèdre K donné, on désigne par e les arêtes (e comme "edges") et par τ un vecteur unitaire dans la direction de e (voir la figure 3.1).

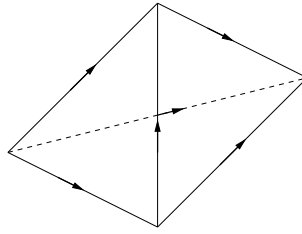


FIG. 3.1 – tétraèdre K

On va tout d'abord montrer le lemme suivant

Lemme 3.3.1 *Un champ de vecteurs $\mathbf{v}$ de $\mathcal{R}_1$ est entièrement déterminé par ses moments*

$$\left\{ \int_e \mathbf{v} \cdot \tau \, dl \right\}_{e \in E} \quad (3.40)$$

sur l'ensemble E des 6 arêtes du tétraèdre K . De plus, la quantité $\mathbf{v} \times \mathbf{n}|_f$ s'annule sur une face f de K si et seulement si ses moments (3.40) s'annulent pour chaque arête e de la face f .

Preuve : Commençons par la seconde partie. Soit f une face de K . On suppose que $\mathbf{v} \in \mathcal{R}_1$ avec

$$\int_e \mathbf{v} \cdot \tau \, dl = 0, \quad \forall e \text{ arête de } f.$$

Supposons que f soit incluse dans le plan $\{\mathbf{x} : x_3 = 0\}$. Ainsi la composante tangentielle $\mathbf{v}_T$ de $\mathbf{v}$ s'écrit sur la face f

$$\mathbf{v}_T(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, 0) \\ v_2(x_1, x_2, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_3 x_2 \\ a_2 + b_3 x_1 \end{pmatrix}.$$

Sous l'hypothèse $\int_e \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dl = 0$ et une formule d'intégration par parties sur la face, on obtient que

$$\int_f \operatorname{rot} \mathbf{v}_T \, ds = 0 ; \quad \text{or } \operatorname{rot} \mathbf{v}_T := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 2b_3,$$

d'où $b_3 = 0$ et donc $\mathbf{v}_T(x_1, x_2) = (a_1, a_2)^T$. Comme $\int_e \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dl = 0$ le long de chaque arête, on a bien $a_1 = a_2 = 0$ ou $\mathbf{v}_{T|f} = 0$. Ceci prouve que $\mathbf{v}_{T|f} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_f = 0$ si et seulement si $\int_e \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dl = 0$, puisque la réciproque est immédiate.

Supposons maintenant que les moments (3.40) de $\mathbf{v}$ s'annulent *pour chaque arête* e de K . On a alors $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$ *sur chaque face* de K , et donc, encore avec une formule d'intégration par parties,

$$\int_K \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0 .$$

Comme $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\mathbf{b}$, $\mathbf{b} = 0$ et donc $\mathbf{v} = \mathbf{a} \in P_0^3$ (i.e. constant). Comme $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{n} = 0$ sur *chaque face* de K , on a $\mathbf{v} = 0$. Ainsi, $\mathbf{v} \in \mathcal{R}_1$ est entièrement déterminé par ses 6 moments (3.40). ■

On définit alors l'espace X_h avec

$$X_h := \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{rot}, \Omega) : \mathbf{v}|_K \in \mathcal{R}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

On sait (cf sous-section 2.2.2) que toute fonction $\mathbf{v}$ régulière sur chaque $K \in \mathcal{T}_h$ appartient à l'espace $H(\operatorname{rot}, \Omega)$ si et seulement si $\mathbf{v} \times \mathbf{n}$ est continue au travers des faces f de la triangulation $\mathcal{T}_h$.

Ainsi, en utilisant le lemme précédent, on peut choisir les degrés de liberté d'une fonction $\mathbf{v} \in X_h$ comme étant les moments (3.40) sur chaque arête de $\mathcal{T}_h$. On prend alors

$$X_h^0 := X_h \cap H_0(\operatorname{rot}, \Omega) . \quad (3.41)$$

Une fonction $\mathbf{v}$ de X_h appartiendra à X_h^0 (trace tangentielle nulle au bord) si et seulement si ses moments (3.40) sont nuls sur chaque arête e du bord Γ . Ainsi, on peut choisir les degrés de liberté d'une fonction $\mathbf{v} \in X_h^0$ comme les moments (3.40) des arêtes de Ω (pas $\bar{\Omega}$, on a exclu la frontière).

Le résultat essentiel est alors le lemme suivant

Lemme 3.3.2 *les espaces X_h^0 et Q_h^0 vérifient l'hypothèse (3.35) de compatibilité, à savoir*

$$\forall q \in Q_h^0, \quad \operatorname{grad} q \in X_h^0.$$

Preuve : Soit $q \in Q_h^0$. Alors $\mathbf{v} = \operatorname{grad} q \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$. De plus, $\mathbf{v}|_K \in P_0^3 \subset \mathcal{R}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h$, de sorte que $\mathbf{v} \in X_h^0$. ■

Les espaces X_h^0 et Q_h^0 ayant été construits de sorte qu'ils vérifient (3.33-3.34), il reste à appliquer le théorème 3.3.2. Pour cela, on a en particulier besoin de borner

$$\inf_{\mathbf{v} \in X_h^0} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{H(\operatorname{rot}, \Omega)}$$

(où $\mathbf{u}$ désigne la solution du problème exact).

On considère alors une famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_h$ *régulière* (lorsque h tend vers 0), qui est définie ainsi :

Définition 3.3.1 *Il existe une constante $\sigma > 0$, indépendante de h telle que*

$$h_K \leq \sigma \rho_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

où h_K est le diamètre de K et ρ_K le rayon de la sphère inscrite dans K .

On définit aussi l'espace

$$H^1(\mathbf{rot}, \Omega) := \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 : \mathbf{rot} \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3\}.$$

Avec cette définition, $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ peut s'écrire $H^0(\mathbf{rot}, \Omega)$. Alors, on peut montrer ([39]) que, si $\mathbf{u} \in H^1(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, on a

$$\inf_{\mathbf{v} \in X_h^0} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot}} \leq ch \|\mathbf{u}\|_{1,\mathbf{rot}}, \quad c \text{ constante positive, indépendante de } h. \quad (3.42)$$

Le théorème 3.3.2 se reformule de façon suivante

Théorème 3.3.3 *Soient les espaces X_h^0 et Q_h^0 définis par (3.41) et (3.39). Le problème (3.36-3.37) admet une unique solution $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h^0 \times Q_h^0$. Si de plus, $(\mathcal{T}_h)_h$ est une famille de triangulations régulière de $\bar{\Omega}$, alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\mathbf{rot}} \longrightarrow 0.$$

De plus, si $\mathbf{u} \in H^1(\mathbf{rot}, \Omega)$, on a l'estimation

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\mathbf{rot}} \leq ch \|\mathbf{u}\|_{1,\mathbf{rot}}.$$

Preuve : La preuve est une conséquence directe du théorème 3.3.2, du lemme 3.3.2 et de l'estimation (3.42). ■

Il faut noter la "faiblesse" de ce résultat. Dans le cas général, on ne connaît pas la façon dont la solution approchée converge vers la solution exacte. Ce n'est que si l'on dispose de régularité supplémentaire (ce qui n'est pas souvent le cas en pratique) que l'on peut préciser la vitesse de convergence.

Remarque 3.3.2 *On a un résultat analogue à ce théorème pour le problème de Neumann (associé au champ magnétique avec une condition aux limites $\mathbf{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ) en remplaçant (X_h^0, Q_h^0) par (X_h, Q_h) .*

3.3.2 Avantages et inconvénients de l'élément fini $H_{\mathbf{rot}}$

Nous présentons ici de façon résumée les principaux points forts et les faiblesses majeures de cet élément fini dans des applications fréquentes.

– **Avantages :**

- A l'interface Σ entre 2 milieux matériels de caractéristiques (ε, μ) différentes, la composante tangentielle du champ électrique $\mathcal{E}$ est continue, mais la composante normale est discontinue (voir les conditions de transmission du chapitre 2). De même pour le champ magnétique $\mathcal{H} = \mathcal{B}/\mu$, la composante tangentielle de $\mathcal{H}$ est continue, mais la composante normale est discontinue au travers de Σ . Les éléments finis $H_{\mathbf{rot}}$ respectent cette propriété de non-continuité.
- On ne peut pas définir de divergence pour l'élément fini $H_{\mathbf{rot}}$: les contraintes en divergence ne peuvent pas être directement prises en compte. Cependant, ces contraintes sont vérifiées par cet élément fini en un sens *local* (élément par élément), et sous forme variationnelle en introduisant le multiplicateur de Lagrange.

- Cet élément fini étant, par construction, conforme dans $H(\mathbf{rot})$, la solution approchée est naturellement incluse dans l'espace de solutions $H(\mathbf{rot}, \Omega)$. Ainsi, il est de prime abord bien adapté au calcul des singularités des équations de Maxwell, c'est-à-dire les solutions qui ne sont pas de régularité H^1 . Mais, pour correctement approcher ces singularités, il est nécessaire de fortement raffiner le maillage, ce qui rend la méthode difficile à utiliser en pratique.
- **Inconvénients :**
 - Cet élément étant, par construction, inclus dans $H(\mathbf{rot}, \Omega)$, mais pas dans $H(\mathbf{div}, \Omega)$ ni dans $H^1(\Omega)^3$ il est moins précis qu'une méthode construite à partir de $H^1(\Omega)^3$.
 - Les degrés de liberté de ces éléments sont portés par les arêtes du maillage, dont le nombre est beaucoup plus important que le nombre de nœuds, notamment en dimension 3. Ainsi, à maillage égal, c'est-à-dire à précision égale, ils sont plus coûteux en place mémoire que le serait une méthode d'éléments finis dont les degrés de liberté sont les sommets du maillage.
 - Souvent, l'interface Σ entre 2 milieux matériels est très localisée. Partout hors de cette interface (là où il n'y a pas de conditions de transmission à imposer), Il est dommage d'utiliser cette méthode (moins précise et plus coûteuse) qu'une méthode de type conforme dans H^1 .
 - On doit absolument conserver le multiplicateur de lagrange si $\lambda^2 = 0$, ce qui n'est que très rarement fait (voir cependant un exemple dans [63]). On pourra au contraire l'éliminer lorsque $\lambda^2 > 0$, mais il peut alors apparaître des problèmes numériques pour λ^2 "petit", ce qui correspond à des variations "lentes" en temps.
 - Enfin, pour un problème instationnaire (c'est-à-dire $\lambda^2 > 0$) comme ceux que nous étudions, l'inconvénient majeur est qu'il apparaît, après discrétisation en temps, une matrice pleine (appelée "matrice de masse") devant le terme en $\partial_{t^2}^2$, qui n'est pas diagonalisable. Ainsi, la résolution complète nécessitera l'inversion de cette matrice à chaque pas de temps, ce qui rend la méthode en pratique très difficile, parce que très coûteuse, à utiliser.

3.4 Une méthode d'éléments finis dans $H(\mathbf{rot}, \mathbf{div}, \Omega)$

Les problèmes pour le champ électrique $\mathcal{E}$ et pour l'induction magnétique $\mathcal{B}$ étant de même nature, on se contentera, dans toute cette section, de ne présenter que le problème pour le champ $\mathcal{E}$. Cependant, on inclura dans certaines remarques des spécificités liées à l'induction magnétique $\mathcal{B}$.

3.4.1 Première étape : de $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ à $\mathcal{X} \times L^2(\Omega)$

Notre point de départ est la formulation variationnelle mixte (3.29-3.30) écrite dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$, que l'on réécrit ici, soit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega), \\ - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} q d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} g q d\mathbf{x} \quad \forall q \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Le but est maintenant de déterminer une autre formulation variationnelle, qui autorise l'utilisation d'une famille d'éléments finis plus classiques (P^1 par exemple).

On a introduit au chapitre 2 l'espace

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}, \quad (3.43)$$

L'idée est ici de remarquer que

Lemme 3.4.1 *L'espace $\mathcal{V}$ ci-dessus défini peut aussi s'exprimer par*

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) : \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q \, d\mathbf{x} = 0, \forall q \in L^2(\Omega)\}. \quad (3.44)$$

Preuve : En effet, un élément $\mathbf{v}$ appartenant à (3.43) est tel que $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, donc $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega)$, et $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$.

Réciproquement, si $\mathbf{v}$ appartient à (3.44), pour $q \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q \, d\mathbf{x} = \langle \operatorname{div} \mathbf{v}, q \rangle,$$

ce qui entraîne que $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ au sens des distributions. ■

Dans ces conditions, il est naturel de chercher $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{X} \times L^2(\Omega)$ solution de

$$\int_{\Omega} \{\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}, \quad (3.45)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g q \, d\mathbf{x}, \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (3.46)$$

Remarque 3.4.1 *Le principe de cette approche est de relaxer la régularité du multiplicateur p ($H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$) mais d'augmenter celle de la solution $\mathbf{u}$ ($H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathcal{X}$). On a ainsi une bonne chance de rester compatible au sens de la condition inf-sup.*

A l'aide de la théorie des problèmes mixtes rappelée ci-dessus, on montre simplement que

Théorème 3.4.1 *Le problème (3.45-3.46) est bien posé. De plus, $p = 0$, sous réserve que (3.22) est vérifié.*

Preuve : Il s'agit là encore d'appliquer le théorème 3.2.1.

- la forme $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \{\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} \, d\mathbf{x}$ est coercitive sur le noyau de la seconde forme, i.e. $\mathcal{V} := \{\mathbf{v} \in \mathcal{X} : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$.
- La condition inf-sup se démontre aisément. Soit $q \in L^2(\Omega)$. On considère l'unique solution de
Trouver $\xi \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\Delta \xi = q,$$

et on prend $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \xi$. On a $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{grad} \xi \times \mathbf{n} = 0$ car $\xi \in H_0^1(\Omega)$. De plus, $\operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta \xi = q \in L^2(\Omega)$, et $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{rot}(\mathbf{grad} \xi) = 0$, de sorte que $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$ et satisfait (en utilisant par exemple l'inégalité de Weber)

$$b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Delta \xi q \, d\mathbf{x} = \|q\|_0^2 \geq C_0 \|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}, \operatorname{div}} \|q\|_0, \quad C_0 \text{ constante}$$

d'où la condition inf-sup

$$\inf_{q \in L^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{X}} \frac{\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}, \operatorname{div}} \|q\|_0} \geq \beta'.$$

avec $\beta' = C_0$.

- Enfin, on peut montrer que $p = 0$ en prenant pour champ test $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \xi$, $\xi \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta \xi = p$ dans (3.45). ■

3.4.2 Deuxième étape : une formulation en Lagrangien augmenté

En fait, on ne va pas travailler directement avec cette formulation, mais plutôt avec une *formulation augmentée*. Pour l'obtenir, on utilise le fait que

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = g ,$$

et on ajoute le terme

$$r \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad r \text{ paramètre } > 0 ,$$

du côté gauche de l'équation, et le terme

$$r \int_{\Omega} g \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$$

de l'autre côté. L'intérêt de cette manipulation algébrique est que l'ajout de ce terme "stabilise" la formulation. Il y a aussi des conséquences sur le plan numérique que nous examinerons un peu plus loin. La formulation augmentée s'écrit alors :

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{X} \times L^2(\Omega)$ solution de

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \mathbf{rot} \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{v} + r \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + r g \operatorname{div} \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X} , \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g q \, d\mathbf{x} \quad \forall q \in L^2(\Omega) . \quad (3.48)$$

On montre aussi simplement le

Théorème 3.4.2 *Le problème (3.47-3.48) est équivalent au problème initial et est bien posé.*

Preuve : Il suffit à nouveau d'appliquer le théorème 3.2.1 avec $X = \mathcal{X}$ et $Q = L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{v} + r \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \\ b(\mathbf{v}, q) &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, q \, d\mathbf{x}, \\ L(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + r g \operatorname{div} \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \text{ et } \Phi(q) = \int_{\Omega} g q \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Pour $\lambda^2 > 0$ et $r > 0$ donnés, la forme a est elliptique (puisque la norme canonique sur $\mathcal{X}$ est $\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{X}}^2 = \|\mathbf{v}\|_0^2 + \|\mathbf{rot} \, \mathbf{v}\|_0^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_0^2$).

Regardons alors la condition inf-sup. Elle se montre exactement comme celle du théorème 3.4.1. On considère, pour $q \in L^2(\Omega)$, l'unique solution de

Trouver $\xi \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\Delta \xi = q \text{ dans } \Omega$$

et on pose $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \, \xi$. On conclut de la même manière. ■

Remarque 3.4.2 *A-t-on encore pour cette formulation augmentée $p = 0$?*

La réponse est encore oui, mais il est instructif ici de se ramener aux équations de Maxwell.

En effet, prenons $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \, \xi$, $\xi \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta \xi = p$. En considérant cet élément $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$ comme fonction test dans l'équation (3.47), on obtient (avec 3.48)

$$\lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \, \xi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{grad} \, \xi \, d\mathbf{x} . \quad (3.49)$$

On a alors :

1. Pour le champ magnétique, c'est-à-dire $\mathbf{u} = \mathcal{B}$:

Le second membre $\mathbf{f}$ s'écrit $\mathbf{f} = 1/\varepsilon_0 \mathbf{rot} \mathcal{J}$ et $\text{div} \mathcal{B} = 0$. Ainsi, en utilisant une formule d'intégration par parties, l'équation (3.49) s'écrit

$$\lambda^2 \int_{\Omega} \text{div} \mathcal{B} \xi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p^2 \, d\mathbf{x} = 1/\varepsilon_0 \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathcal{J} \cdot \mathbf{grad} \xi \, d\mathbf{x} \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} p^2 \, d\mathbf{x} = 0 \Rightarrow p = 0 .$$

Ici, $\text{div} \mathbf{f} = g = 0$, de sorte que $p = 0$ dès que $\text{div} \mathcal{B} = 0$. La condition de continuité $\partial_t \mathcal{R} + \text{div} \mathcal{J} = 0$ n'intervient pas.

2. Pour le champ électrique, c'est-à-dire $\mathbf{u} = \mathcal{E}$:

Le second membre $\mathbf{f}$ s'écrit $\mathbf{f} = -1/\varepsilon_0 \partial_t \mathcal{J}$ et $\text{div} \mathcal{E} = \frac{\mathcal{R}}{\varepsilon_0}$. En utilisant ici la même formule d'intégration par parties, l'équation (3.49) s'écrit

$$\lambda^2 \int_{\Omega} \text{div} \mathcal{E} \xi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p^2 \, d\mathbf{x} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \cdot \mathbf{grad} \xi \, d\mathbf{x} .$$

L'intégrande du second membre se réécrit $\partial_t [\text{div} (\mathcal{J}) \xi]$, et en revenant au problème dépendant du temps ($\lambda \rightarrow \partial_t$), cette expression s'écrit finalement

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} + \text{div} \mathcal{J} \right) \xi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p^2 \, d\mathbf{x} = 0 \right), \text{ d'où } p = 0 .$$

Contrairement au cas du champ $\mathcal{B}$, la condition de continuité est ici indispensable pour montrer que $p = 0$.

Dans l'Annexe, nous détaillerons les similitudes entre la formulation augmentée (3.47-3.48), et une formulation pénalisée.

3.4.3 Troisième étape : une formulation dans $H^1(\Omega)^3$

Nous abordons maintenant la dernière étape qui permet d'obtenir une formulation variationnelle dans $H^1(\Omega)^3$. Dans toute la suite, on fixe comme valeur pour le paramètre $r = 1$. On va utiliser de façon fondamentale la relation suivante, énoncée dans [64] p. 126, dans le cas polygonal et pour des champs réguliers ou polynômiaux par morceaux, et généralisée (voir [26] et [27]) dans le cas polyédrique, pour des champs de régularité H^1 :

Proposition 3.4.1 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$, on a la relation

$$\int_{\Omega} \{ \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \text{div} \mathbf{u} \, \text{div} \mathbf{v} \} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathbf{u} : \mathbf{grad} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma} (\mathbf{grad} u_{\alpha} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{v}) \, d\Gamma ,$$

avec u_{α} les composantes de $\mathbf{u}$, et où $:$ désigne le produit contracté de 2 tenseurs, i.e.

$$\mathbf{grad} \mathbf{u} : \mathbf{grad} \mathbf{v} := \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

et $\mathbf{e}_{\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 3.4.3 Dans le cas où toute la frontière Γ (du domaine polyédrique Ω) est conducteur parfait - cas que nous avons envisagé jusqu'à présent - on peut montrer que le terme de bord s'annule, aussi bien pour le champ électrique $\mathcal{E}$ que pour le champ magnétique $\mathcal{B}$.

On introduit alors

$$\mathcal{X}_R := \mathcal{X} \cap H^1(\Omega)^3 ,$$

l'espace des solutions de régularité H^1 vérifiant les conditions aux limites. En utilisant cette propriété dans la formulation (3.47-3.48), on obtient ainsi

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{X}_R \times L^2(\Omega)$ solution de

$$\begin{aligned} \lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{grad} \, \mathbf{u} : \mathbf{grad} \, \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p \, \text{div} \, \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + g \, \text{div} \, \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}_R , \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\int_{\Omega} \text{div} \, \mathbf{u} \, q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g q \, d\mathbf{x} \quad \forall q \in L^2(\Omega) . \quad (3.51)$$

Remarque 3.4.4 1. Dans cette formulation, nous n'avons pas pris en compte le termes liés à Γ_A (on a supposé que $\Gamma_A = \emptyset$). On le fera directement lors de la discrétisation de cette formulation.

2. Dans le cas où le domaine Ω est **convexe ou de frontière régulière**, l'espace $\mathcal{X}_R$ coïncide avec l'espace $\mathcal{X}$. Mais dans le cas contraire, il existe des "singularités" aux arêtes et coins rentrants. En particulier, on ne peut plus montrer que $p = 0$ (on sait même que $p \neq 0$). Nous consacrerons un chapitre à la résolution de cette difficulté.

Dans la suite, nous allons donc développer cette formulation dans $\mathcal{X}_R$ jusqu'à la mise en œuvre numérique, dans le cas d'un ouvert régulier et/ou convexe. Le travail que nous venons de faire pour le problème de Dirichlet, qui correspond au champ électrique $\mathcal{E}$, peut se faire de façon tout à fait analogue pour le champ magnétique $\mathcal{B}$, avec la condition de Neumann $\mathbf{rot} \, \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$.

3.5 Une méthode d'éléments finis conformes dans $H^1(\Omega)^3$

Dans cette section, nous allons présenter une méthode numérique de résolution des équations de Maxwell en temps, en utilisant des éléments finis "classiques", c'est-à-dire conformes dans H^1 .

On va commencer par énoncer un résultat de convergence, analogue à celui obtenu pour la formulation mixte dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ (cf. théorèmes 3.3.2 et 3.3.3).

On introduit au préalable les espaces de dimension finie X_h et Q_h tels que $X_h \subset \mathcal{X}_R$ et $Q_h \subset L^2(\Omega)$. Ces espaces devront vérifier une condition inf-sup discrète. Contrairement à la formulation posée dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$, on a ici le choix entre plusieurs paires d'espaces (X_h, Q_h) (qui ont été développées, dans la plupart des cas, pour la résolution des problèmes de mécanique des fluides). Ainsi, on pourrait choisir (présenté ici en 2D pour simplifier, les λ_i désignant les coordonnées barycentriques)

1. L'élément de Fortin

$$\begin{aligned} p &\in P_0(\text{discontinu}) \\ \mathbf{u} &\in P_1^2 \oplus \{ \lambda_i \lambda_j \mathbf{n}_{ij}; (i, j) \text{ arêtes} \} \end{aligned}$$

2. L'élément mini

$$\begin{aligned} p &\in P_1(\text{continu}) \\ \mathbf{u} &\in \{ P_1 \oplus \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \}^2 \end{aligned}$$

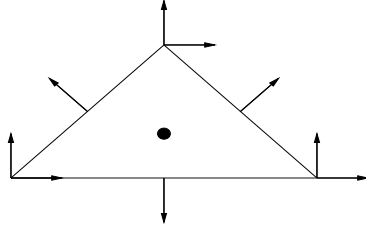


FIG. 3.2 – élément de Fortin

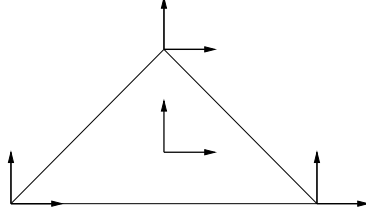


FIG. 3.3 – élément mini

3. L'élément de Hood-Taylor

$$p \in P_1(\text{ continu })$$

$$\mathbf{u} \in (P_2)^2 \text{ sur le maillage grossier} \Leftrightarrow (P_1)^2 \text{ sur le maillage fin}$$

Parmi les différents choix possibles, nous avons retenu le dernier, l'élément de Hood-Taylor, car il est le seul à présenter l'avantage suivant : à l'aide d'une formule de quadrature appropriée, on peut construire une matrice de masse diagonale (ou diagonalisée) sans perte de précision (nous préciserons ce point plus tard).

3.5.1 Élément fini de Hood-Taylor

L'élément de Hood-Taylor nécessite la définition de deux niveaux de maillages. Le niveau le plus fin, noté $\mathcal{T}_h$ et appelé le maillage fin, est déduit du plus grossier, noté $\mathcal{T}_{2h}$ et appelé le maillage grossier, par subdivision de chaque élément tétraédrique T_{2h} en huit sous-tétraèdres T_h de volumes égaux. On introduit les espaces d'approximation

$$X_h = S_h^3 := \{\phi \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})^3 : \phi|_{T_h} \in P_1^3(T_h), \forall T_h \in \mathcal{T}_h\}$$

$$Q_h = S_{2h} := \{\phi \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : \phi|_{T_{2h}} \in P_1(T_{2h}), \forall T_{2h} \in \mathcal{T}_{2h}\}$$

Les degrés de liberté d'une fonction $\mathbf{v} \in S_h^3$ sont les valeurs de cette fonction aux nœuds du maillage le plus fin ($a_i, i \in I_h$), c'est-à-dire aux sommets des tétraèdres grossiers ainsi qu'aux milieux des arêtes grossières. Ceux d'une fonction $q \in S_{2h}$ sont uniquement les valeurs de cette fonction aux sommets des tétraèdres grossiers ($a_l, l \in I_{2h}$). On a alors les résultats suivants³

Lemme 3.5.1 *Pour $\mathcal{T}_h$ une tétraédrisation régulière de $\bar{\Omega}$, les espaces S_h^3 et S_{2h} vérifient la condition inf-sup discrète.*

³Ecrire la formulation variationnelle discrète...

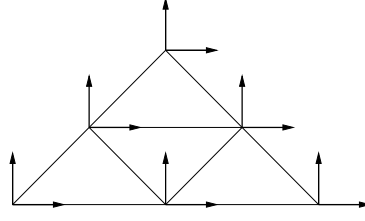


FIG. 3.4 – élément de Hood-Taylor

Preuve : on trouvera cette preuve détaillée dans [23]. Le principe est le suivant : on montre qu'il existe une constante $\beta^* > 0$, indépendante de h , telle que

$$\sup_{\mathbf{v} \in S_h^3} \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq \beta^* \|q\|_0 \quad \forall q \in S_{2h}$$

et en utilisant l'inégalité

$$\|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot},\operatorname{div}} \leq C \|\mathbf{v}\|_1, \quad \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3,$$

on obtient la condition inf-sup avec $\beta = \beta^*/C$. ■

On a aussi le résultat de convergence suivant

Théorème 3.5.1 *Pour $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille de tétraédrisations régulières de $\bar{\Omega}$, il existe une et une seule solution $(\mathbf{u}_h, p_h) \in S_h^3 \times S_{2h}$ avec*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\mathbf{rot},\operatorname{div}} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|p_h\|_0 \longrightarrow 0.$$

De plus, si $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3$, on a l'estimation

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\mathbf{rot},\operatorname{div}} + \|p_h\|_0 \leq ch \|\mathbf{u}\|_2.$$

Là encore, ce résultat, dans le cas général, ne donne pas la façon dont la solution approchée converge vers la solution exacte. Ce n'est que si l'on dispose de régularité supplémentaire que l'on peut préciser la vitesse de convergence.

Rappelons que l'on se place, dans cette section, dans le cas d'un domaine Ω convexe et/ou régulier ; on considère donc (pour le problème continu) la formulation mixte posée dans $\mathcal{X}_R \times L^2(\Omega)$ (3.50-3.51). A ce stade, on revient aux équations de Maxwell, avec les champs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ comme inconnues, et où la multiplication par λ^2 a été remplacée par le terme $\partial_{t^2}^2$. Ainsi, avec les espaces d'éléments finis ci-dessus introduits, on peut écrire, pour une fonction $\mathbf{F}_h \in S_h^3$,

$$\mathbf{F}_h(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{i \in I_h} F_{\alpha}^i \phi_{\alpha}^i(\mathbf{x})$$

où $\{\phi_{\alpha}^i\}_{\alpha=1,2,3}^{i \in I_h}$ désigne une base de S_h^3 , avec

$$\phi_{\alpha}^i = \phi^i \mathbf{e}_{\alpha}, \quad \phi^i(a_j) = \delta_{ij}, \quad i, j \in I_h$$

De façon analogue, on peut écrire, pour toute fonction $q \in S_{2h}$

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{l \in I_{2h}} q^l \psi^l(\mathbf{x}),$$

où $\{\psi^l\}_{l \in I_{2h}}$ est une base de S_{2h} , avec

$$\psi^l(a_m) = \delta_{lm}, \quad l, m \in I_{2h}.$$

Remarque 3.5.1 On a montré (Remarque 3.4.2) que le multiplicateur p associé au champ $\mathcal{B}$ était nul en utilisant la propriété $\operatorname{div}(\mathbf{rot} \cdot) = 0$. De même pour le champ $\mathcal{E}$, en utilisant en plus que $\partial_t \mathcal{R} + \operatorname{div} \mathcal{J} = 0$. Après discrétisation, ces propriétés ne sont plus exactement vérifiées ($\operatorname{div}_h(\mathbf{rot}_h \cdot) \neq 0$ et $\partial_t \mathcal{R}_h + \operatorname{div}_h \mathcal{J}_h \neq 0$), mais tout au plus approchées. C'est pourquoi on doit conserver les multiplicateurs de Lagrange comme inconnues du système d'équations.

Formulation pour le champ $\mathcal{B}$:

On cherche une approximation discrète de $\mathcal{B}$ et de p définie par

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{i \in I_h} B_{\alpha}^i(t) \phi_{\alpha}^i(\mathbf{x}),$$

et

$$p_{2h}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l \in I_{2h}} p^l(t) \psi^l(\mathbf{x}).$$

La formulation variationnelle discrète à résoudre s'écrit alors :

Trouver $(\mathcal{B}_h(t), p_{2h}(t)) \in S_h^3 \times S_{2h}$, solution de

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \mathcal{B}_h \cdot \mathbf{C}_h \, d\mathbf{x} + c^2 \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathcal{B}_h : \mathbf{grad} \mathbf{C}_h \, d\mathbf{x} + c^2 \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma} (\mathbf{grad} \mathcal{B}_{h\alpha} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{C}_h) \, d\Gamma \\ + \int_{\Omega} p_{2h} \operatorname{div} \mathbf{C}_h \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathcal{J}_h) \cdot \mathbf{C}_h \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Gamma} (\mathcal{J}_h \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C}_h \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{C}_h \in S_h^3, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathcal{B}_h q_{2h} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q_{2h} \in S_{2h}. \quad (3.53)$$

On adjoint à ces équations des conditions initiales. On prend

$$\mathcal{B}_h(0) = \Pi_h(\mathcal{B}_0), \quad \frac{\partial \mathcal{B}_h}{\partial t}(0) = \mathbf{grad} \Pi_h(p_0) - \mathbf{rot} \Pi_h(\mathcal{E}_0) \quad (3.54)$$

où Π_h est une projection sur l'espace de dimension finie convenablement choisie, par exemple, pour a_i nœud de $\mathcal{T}_h$, $\Pi_h \mathcal{B}_0(a_i) = \mathcal{B}_0(a_i)$.

3.5.2 Prise en compte de la condition aux limites $\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0$

Avant d'écrire la formulation analogue pour le champ électrique $\mathcal{E}$, on doit résoudre le problème de la condition aux limites de Dirichlet $\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ . *A priori*, c'est une condition aux limites essentielle, qu'il faut donc inclure dans l'espace. Ainsi, on doit construire l'espace

$$S_h^3 \cap \mathcal{X}_R.$$

En fait, on va remplir la condition aux limites en un sens *faible*. On remarque que

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\mu} \, d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3.$$

Ainsi, on va travailler avec l'espace discret de dimension finie

$$S_{h,t}^3 = \{\mathbf{v} \in S_h^3 : \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\mu} \, d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in S_h(\Gamma)^3\},$$

avec

$$S_h(\Gamma)^3 = \{\phi|_{\Gamma} : \phi \in S^h\}.$$

Remarque 3.5.2 *En général, $S_{h,t}^3 \not\subset S_h^3 \cap \mathcal{X}_R$. Partout où on ne peut pas définir une normale, et en particulier, aux coins et aux arêtes d'un maillage, la condition aux limites $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$ est satisfaite "en moyenne".*

Pour introduire de façon plus précise l'espace $S_{h,t}^3$, et le discrétiser de façon correcte, c'est-à-dire consistante, une "bonne" façon de procéder est de considérer la condition aux limites de conducteur parfait $\mathcal{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$ comme une contrainte, et de la dualiser à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange, noté $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3$. Alors, la formulation en $\mathcal{E}$ va s'écrire (avant discrétisation)

Trouver $(\mathcal{E}(t), p(t), \boldsymbol{\lambda}) \in H^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)^3$ tels que

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \mathcal{E} \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{x} + c^2 \int_{\Omega} \mathbf{grad} \, \mathcal{E} : \mathbf{grad} \, \mathbf{F} \, d\mathbf{x} + c^2 \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma} (\mathbf{grad} \, \mathcal{E}_{\alpha} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{F}) \, d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{n}) \, d\Gamma = \\ & \quad \frac{c^2}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} (\mathcal{R} \operatorname{div} \mathbf{F}) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{F} \in H^1(\Omega)^3, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathcal{E} \, \psi \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} (\mathcal{R} \, \psi) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \psi \in L^2(\Omega), \quad (3.56)$$

$$\int_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathcal{E} \times \mathbf{n}) \, d\Gamma = 0, \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3, \quad (3.57)$$

$$\int_{\Gamma} (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}) \, \theta \, d\Gamma = 0, \quad \forall \theta \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (3.58)$$

Remarque 3.5.3 *L'équation $\int_{\Gamma} (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}) \, \theta \, d\Gamma = 0$ est nécessaire, car la contrainte sur la trace tangentielle laisse indéterminée la composante normale. Avec cette équation, on la choisit égale à 0.*

Plutôt que de discrétiser cette double formulation mixte, on va montrer comment éliminer le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$. On introduit alors un espace (de dimension finie) qui approche l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)^3$, soit

$$M_h = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{C}^0(\Gamma)^3, \forall T_h^{\Gamma} \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}, \boldsymbol{\lambda}|_{T_h^{\Gamma}} \in P_1(T_h^{\Gamma})^3\}, \quad (3.59)$$

où $\mathcal{T}_h^{\Gamma}$ désigne la triangulation de la frontière Γ induite par le maillage volumique : les triangles T_h^{Γ} sont donc les faces des tétraèdres du maillage de $\bar{\Omega}$. On désigne également par I_h^{Γ} ($I_h^{\Gamma} \subset I_h$), l'ensemble des indices des nœuds $a_i \in \Gamma$.

Pour une fonction $\boldsymbol{\lambda}_h \in M_h$, on écrira que

$$\boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i,\alpha} \lambda_{\alpha}^i \phi_{\alpha}^i(\mathbf{x}),$$

où $\phi_\alpha^i(\mathbf{x})$ est la trace sur Γ des fonctions de base définies ci-dessus.

On pose alors

$$b(\mathbf{F}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{n}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{F} \in H^1(\Omega)^3, \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3,$$

de sorte que b appliquée aux champs discrets $\mathbf{F}_h, \boldsymbol{\lambda}_h$ s'écrit :

$$b(\mathbf{F}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) = \sum_{i,i',\alpha,\alpha'} \lambda_\alpha^i F_{\alpha'}^{i'} \int_{\Gamma} (\phi_\alpha^i \times \mathbf{n}) \cdot (\phi_{\alpha'}^{i'} \times \mathbf{n}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{F}_h \in S_h^3, \quad \forall \boldsymbol{\lambda}_h \in M_h.$$

En décomposant cette intégrale sur Γ en une somme d'intégrales sur chacun des triangles $T_h^\Gamma \in \mathcal{T}_h^\Gamma$, et en utilisant la propriété (classique pour des éléments finis de type P^1) que $\phi^i \phi^{i'} \neq 0$ si et seulement si a_i et $a_{i'}$ sont des nœuds du même triangle T_h^Γ de $\mathcal{T}_h^\Gamma$, on obtient :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{F}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) &= \sum_{i,i',\alpha,\alpha'} \sum_{\substack{T_h^\Gamma \text{ t.q. } a_i, a_{i'} \\ \text{nœuds de } T_h^\Gamma}} \lambda_\alpha^i F_{\alpha'}^{i'} \int_{T_h^\Gamma} (\phi_\alpha^i \times \mathbf{n}_T) \cdot (\phi_{\alpha'}^{i'} \times \mathbf{n}_T) d\Gamma, \\ &= \sum_{i,i',\alpha,\alpha'} \sum_{\substack{T_h^\Gamma \text{ t.q. } a_i, a_{i'} \\ \text{nœuds de } T_h^\Gamma}} \lambda_\alpha^i F_{\alpha'}^{i'} (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{n}_T) \cdot (\mathbf{e}_{\alpha'} \times \mathbf{n}_T) \int_{T_h^\Gamma} \phi^i \phi^{i'} d\Gamma. \end{aligned}$$

où $\mathbf{n}_T$ désigne la normale unitaire sortante à Γ (qui est constante) pour la face T_h^Γ considérée. On introduit alors

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^i \mathbf{e}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{i'} = \sum_{\alpha'=1}^3 F_{\alpha'}^{i'} \mathbf{e}_{\alpha'}$$

et on obtient

$$b(\mathbf{F}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) = \sum_{i,i'} \sum_{\substack{T_h^\Gamma \text{ t.q. } a_i, a_{i'} \\ \text{nœuds de } T_h^\Gamma}} (\boldsymbol{\lambda}_i \times \mathbf{n}_T) \cdot (\mathbf{F}_{i'} \times \mathbf{n}_T) \int_{T_h^\Gamma} \phi^i \phi^{i'} d\Gamma.$$

Il reste alors à évaluer l'intégrale de la formule ci-dessus. Pour ce faire, on utilise la formule de quadrature suivante

$$\int_{T_h^\Gamma} f d\Gamma \simeq \frac{|T_h^\Gamma|}{3} \sum_{a_i \text{ nœuds de } T_h^\Gamma} f(a_i),$$

qui est exacte pour un polynôme $\mathbf{v} \in P^1$. On obtient ainsi une première expression d'une forme bilinéaire approchée b_h^{app} pour b , avec

$$b_h^{\text{app}}(\mathbf{F}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) = \sum_{i \in I_h^\Gamma} \sum_{\substack{T_h^\Gamma \text{ t.q. } a_i \\ \text{nœud de } T_h^\Gamma}} (\boldsymbol{\lambda}_i \times \mathbf{n}_T) \cdot (\mathbf{F}_i \times \mathbf{n}_T) \frac{|T_h^\Gamma|}{3}. \quad (3.60)$$

Afin de simplifier encore un peu cette expression, nous allons remplacer la normale $\mathbf{n}_T$ utilisée dans (3.60) par une "normale au nœud", notée $\mathbf{n}_i$, définie en chaque nœud a_i .

Cette normale est en fait une approximation (en un sens à préciser), des normales aux faces. Nous allons voir comment la construire.

Considérons le cas simple où tous les triangles T_h^Γ se rencontrant en un nœud a_i sont coplanaires. Alors toutes les normales unitaires $\mathbf{n}_T$ sont égales. Appelons-les $\mathbf{n}_i$. On peut alors remplacer l'expression (3.60) de manière équivalente par

$$b_h^{\text{app}}(\mathbf{F}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) = \sum_{i \in I_h^\Gamma} (\boldsymbol{\lambda}_i \times \mathbf{n}_i) \cdot (\mathbf{F}_i \times \mathbf{n}_i) \sum_{T_h^\Gamma} \frac{|T_h^\Gamma|}{3}.$$

Dans le cas général, on va raisonner par analogie pour construire cette normale. On reformule la seconde somme de l'expression (3.60) ainsi (pour un i fixé dans I_h^Γ)

$$\sum_{T_h^\Gamma} (\boldsymbol{\lambda}_i \times \mathbf{n}_T) \cdot (\mathbf{F}_i \times \mathbf{n}_T) \frac{|T_h^\Gamma|}{3} \frac{\sum_{T_h^\Gamma \in \mathcal{T}_h^\Gamma} |T_h^\Gamma|}{\sum_{T_h^\Gamma \in \mathcal{T}_h^\Gamma} |T_h^\Gamma|}. \quad (3.61)$$

En utilisant ensuite une formule de la moyenne appropriée, cette expression s'écrit sous la forme approchée suivante :

$$\left(\sum_{T_h^\Gamma} \boldsymbol{\lambda}_i \times \frac{\mathbf{n}_T |T_h^\Gamma|}{\sum_{T_h^\Gamma \in \mathcal{T}_h^\Gamma} |T_h^\Gamma|} \right) \cdot \left(\sum_{T_h^\Gamma} \mathbf{F}_i \times \frac{\mathbf{n}_T |T_h^\Gamma|}{\sum_{T_h^\Gamma \in \mathcal{T}_h^\Gamma} |T_h^\Gamma|} \right) \sum_{T_h^\Gamma \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{|T_h^\Gamma|}{3}.$$

Il suffit alors de poser

$$\mathbf{n}_i = \frac{\sum_{T_h^\Gamma} \mathbf{n}_T |T_h^\Gamma|}{\sum_{T_h^\Gamma} |T_h^\Gamma|},$$

pour obtenir une seconde approximation b_h de la forme bilinéaire continue b sur $S_h^3 \times M_h$ avec :

$$b_h(\mathbf{F}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) = \sum_{i \in I_h^\Gamma} (\boldsymbol{\lambda}_i \times \mathbf{n}_i) \cdot (\mathbf{F}_i \times \mathbf{n}_i) \alpha_i, \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \sum_{\substack{T_h^\Gamma \in \mathcal{T}_h^\Gamma \text{ t.q. } a_i \\ \text{nœud de } T_h^\Gamma}} \frac{|T_h^\Gamma|}{3}. \quad (3.62)$$

Avec cette définition, il est clair que l'approximation sera d'autant plus précise que les angles entre les faces consécutives seront proches de l'angle plat.

On peut faire le même travail pour la forme bilinéaire

$$c(\boldsymbol{\lambda}, \theta) = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}) \theta \, d\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3, \quad \forall \theta \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Pour cela, on introduit le sous-espace Θ_h de $H^{1/2}(\Gamma)$ défini par

$$\Theta_h = \{\theta \in \mathcal{C}^0(\Gamma), \forall T_h^\Gamma \in \mathcal{T}_h^\Gamma, \theta|_{T_h^\Gamma} \in P_1(T_h^\Gamma)\}.$$

Une fonction $\theta \in \Theta_h$ s'écrit alors :

$$\theta_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_h^\Gamma} \theta_i \phi^i(\mathbf{x})$$

et pour $\boldsymbol{\lambda}_h \in M_h, \theta_h \in \Theta_h$, on a

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{\lambda}_h, \theta_h) &= \sum_{i, \alpha, i'} \sum_{\substack{T_h^\Gamma \text{ t.q. } a_i, a_{i'} \\ \text{nœuds de } T_h^\Gamma}} \lambda_\alpha^i (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{n}_T) \theta_{i'} \int_{T_h^\Gamma} \phi^i \phi^{i'} d\Gamma \\ &= \sum_{i, i'} \sum_{\substack{T_h^\Gamma \text{ t.q. } a_i, a_{i'} \\ \text{nœuds de } T_h^\Gamma}} (\boldsymbol{\lambda}_i \cdot \mathbf{n}_T) \theta_{i'} \int_{T_h^\Gamma} \phi^i \phi^{i'} d\Gamma . \end{aligned}$$

En utilisant la même formule de quadrature que précédemment, on obtient la forme bilinéaire approchée suivante :

$$c_h(\boldsymbol{\lambda}_h, \theta_h) = \sum_{i \in I_h^\Gamma} \sum_{\substack{T_h^\Gamma \text{ t.q. } a_i \\ \text{nœud de } T_h^\Gamma}} (\boldsymbol{\lambda}_i \cdot \mathbf{n}_T) \theta_i \frac{|T_h^\Gamma|}{3} ,$$

qui devient, en utilisant la définition de la normale au nœud,

$$c_h(\boldsymbol{\lambda}_h, \theta_h) = \sum_{i \in I_h^\Gamma} (\boldsymbol{\lambda}_i \cdot \mathbf{n}_i) \theta_i \alpha_i . \quad (3.63)$$

Introduisons maintenant le sous-espace M_h^0 de M_h défini par

$$M_h^0 = \{ \boldsymbol{\lambda}_h \in M_h : c_h(\boldsymbol{\lambda}_h, \theta_h) = 0, \forall \theta_h \in \Theta_h \} .$$

Il est facile de voir, en utilisant l'expression (3.63) que M_h^0 peut aussi s'écrire

$$M_h^0 = \{ \boldsymbol{\lambda}_h \in M_h : \boldsymbol{\lambda}_i(a_i) \cdot \mathbf{n}_i = 0, \forall a_i \in \Gamma \} .$$

Ainsi, l'espace d'approximation pour le champ $\mathcal{E}$ ("correspondant" à $S_{h,t}^3$) sera égal à, avec la forme discrète b_h ,

$$S_h^{3,0} = \{ \mathbf{F}_h \in S_h^3, b_h(\mathbf{F}_h, \boldsymbol{\nu}_h) = 0, \forall \boldsymbol{\nu}_h \in M_h^0 \} ,$$

qui n'est pas un sous-espace de $S_{h,t}^3(\Omega)^3$.

Là encore, il est facile de voir, avec l'expression (3.62), que l'espace $S_h^{3,0}$ peut finalement s'exprimer sous la forme

$$S_h^{3,0} = \{ \mathbf{F}_h \in S_h^3, \mathbf{F}_i(a_i) \times \mathbf{n}_i = 0, \forall a_i \in \Gamma \} .$$

Avec cette méthode, les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_h$ et θ_h s'éliminent de façon évidente, et on a :

Formulation pour le champ $\mathcal{E}$:

la formulation variationnelle discrète pour $\mathcal{E}_h$ s'énonce ainsi :

Trouver $(\mathcal{E}_h(t), p_{2h}(t)) \in S_h^{3,0} \times S_{2h}$, solution de

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \mathcal{E}_h \cdot \mathbf{F}_h \, d\mathbf{x} + c^2 \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathcal{E}_h : \mathbf{grad} \mathbf{F}_h \, d\mathbf{x} + c^2 \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma} (\mathbf{grad} \mathcal{E}_{h\alpha} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{F}_h) \, d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} p_{2h} \operatorname{div} \mathbf{F}_h \, d\mathbf{x} = \frac{c^2}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \mathcal{R}_{2h} \operatorname{div} \mathbf{F}_h \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}_h}{\partial t} \cdot \mathbf{F}_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{F}_h \in S_h^{3,0}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathcal{E}_h \psi_{2h} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \mathcal{R}_{2h} \psi_{2h} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \psi_{2h} \in S_{2h}(\Omega). \quad (3.65)$$

Comme pour la formulation en champ magnétique, on adjoint à ces équations des conditions initiales

$$\mathcal{E}_h(0) = \Pi_h(\mathcal{E}_0),$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_h}{\partial t}(0) = \mathbf{grad} \Pi_h(p_0) + c^2 \mathbf{rot} \Pi_h(\mathcal{B}_0) - \frac{1}{\varepsilon_0} \Pi_h(\mathcal{J}_0).$$

Remarque 3.5.4 *L'utilisation de la normale au noeud, définie comme une "moyenne", est bien adaptée dans les zones où la frontière est régulière. Par contre, là où la frontière est polyédrique, il est plus facile et plus juste d'imposer la condition exacte $\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0$ face par face.*

Le cas de la condition aux limites sur Γ_A .

Nous revenons maintenant sur l'hypothèse selon laquelle toute la frontière est un conducteur parfait. On considère donc qu'une partie non vide Γ_A de Γ correspond à une condition aux limites de Silver-Müller. Par abus de notation, nous notons encore $\mathcal{X}_R$ l'espace des solutions de régularité H^1 , dont la trace tangentielle n'est nulle que sur la partie Γ_C de Γ . Nous avons déjà présenté cette condition de Silver-Müller au début de ce chapitre (voir Eqs. (3.8) et (3.9)). Une expression équivalente en est (en posant $\mathbf{e}^* := \mathbf{e} - c\mathbf{b} \times \mathbf{n}$ et $c\mathbf{b}^* := c\mathbf{b} + \mathbf{e} \times \mathbf{n}$)

$$\begin{aligned} (\mathcal{E} - c\mathcal{B} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} &= (\mathbf{e} - c\mathbf{b} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_A, \quad \mathbf{e}, \mathbf{b} \text{ donnés,} \\ \text{ou de façon analogue,} \\ (c\mathcal{B} + \mathcal{E} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} &= (c\mathbf{b} + \mathbf{e} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_A, \quad \mathbf{e}, \mathbf{b} \text{ donnés.} \end{aligned}$$

Nous allons voir comment introduire ces conditions dans les formulations variationnelles.

Pour le champ magnétique $\mathcal{B}$, en dérivant la condition (3.8) par rapport au temps, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{E} \times \mathbf{n}) = c \frac{\partial}{\partial t}((\mathcal{B} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}) + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{e} - c\mathbf{b} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_A.$$

On élimine ensuite le terme en $\partial_t(\mathcal{E} \times \mathbf{n})$ en prenant la trace tangentielle (i.e. $\cdot \times \mathbf{n}|_{\Gamma_A}$) de l'équation d'Ampère (3.1), soit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{E} \times \mathbf{n})|_{\Gamma_A} - c^2(\mathbf{rot} \mathcal{B} \times \mathbf{n})|_{\Gamma_A} = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\mathcal{J} \times \mathbf{n})|_{\Gamma_A}.$$

On obtient alors comme condition aux limites pour $\mathcal{B}$ sur Γ_A , l'expression

$$c \frac{\partial}{\partial t}((\mathcal{B} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}) - c^2 \mathbf{rot} \mathcal{B} \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{J} \times \mathbf{n} - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{e} - c\mathbf{b} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}.$$

En conséquence, on doit ajouter deux termes supplémentaires dans la formulation variationnelle. En effet, lorsque l'on utilise la formule d'intégration par parties sur le terme en **rot rot**

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot rot} \mathcal{B} \cdot \mathbf{C} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathcal{B} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{C} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \mathbf{rot} \mathcal{B} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \, d\Gamma$$

et aussi sur le terme en **rot** $\mathcal{J}$

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathcal{J} \cdot \mathbf{C} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{J} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{C} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} (\mathcal{J} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \, d\Gamma ,$$

on obtient les termes de bords supplémentaires

$$c \int_{\Gamma_A} \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \times \mathbf{n} \right) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{n}) \, d\Gamma ,$$

au membre de gauche, et

$$\int_{\Gamma_A} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e} - c\mathbf{b} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{C} \, d\Gamma ,$$

au membre de droite, de sorte que la formulation variationnelle s'écrit finalement, pour le champ $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \mathcal{B} \cdot \mathbf{C} \, d\mathbf{x} + c \int_{\Gamma_A} \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \times \mathbf{n} \right) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{n}) \, d\Gamma + c^2 \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathcal{B} : \mathbf{grad} \mathbf{C} \, d\mathbf{x} \\ & + c^2 \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma} (\mathbf{grad} \mathcal{B}_{\alpha} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{C}) \, d\Gamma + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{C} \, d\mathbf{x} = \\ & \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathcal{J}) \cdot \mathbf{C} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Gamma} (\mathcal{J} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \, d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_A} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e} - c\mathbf{b} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{C} \, d\Gamma , \quad \forall \mathbf{C} \in H^1(\Omega)^3 . \end{aligned} \quad (3.66)$$

En faisant un travail exactement analogue pour le champ $\mathcal{E}$, on obtient l'expression finale de la formulation variationnelle modifiée

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \mathcal{E} \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{x} + c \int_{\Gamma_A} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \times \mathbf{n} \right) \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{n}) \, d\Gamma + c^2 \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathcal{E} : \mathbf{grad} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} \\ & + c^2 \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma} (\mathbf{grad} \mathcal{E}_{\alpha} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{F}) \, d\Gamma + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \\ & \frac{c^2}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} (\mathcal{R} \operatorname{div} \mathbf{F}) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{x} \\ & + c \int_{\Gamma_A} \left[\frac{\partial}{\partial t} (c\mathbf{b} + \mathbf{e} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{F} \, d\Gamma , \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{X}_R . \end{aligned} \quad (3.67)$$

3.5.3 Utilisation des formules de quadrature

Pour conclure l'approximation (en espace) par éléments finis, il reste à évaluer les différentes intégrales qui interviennent dans ces formulations. Pour la plupart d'entre elles, on effectue un calcul exact. Cependant, on peut utiliser des formules de quadrature pour celles qui doivent être inversées, c'est-à-dire celles qui sont associées aux matrices de masse interne $\mathbb{M}_{\Omega}$ et de masse frontière $\mathbb{M}_{\Gamma_A}$ (voir définition (3.70)). C'est d'ailleurs un des intérêts

majeurs de la méthode, puisqu'on obtient ainsi des matrices diagonales, sans détériorer la précision *a priori* de la méthode, l'ordre d'approximation de ces formules de quadrature ($O(h^2)$) étant le même que celui de la discrétisation en espace.

1. Considérons les termes en

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{G}_h d\mathbf{x} = \sum_{i,\alpha} \sum_{j,\alpha'} \left(\int_{\Omega} \phi_{\alpha}^i \cdot \phi_{\alpha'}^j dx \right) F_{\alpha}^i G_{\alpha'}^j, \quad \mathbf{F}_h, \mathbf{G}_h \in S_h^3.$$

Afin d'utiliser un schéma de discrétisation en temps explicite, et d'éviter l'inversion d'une matrice à chaque pas de temps, on va chercher à diagonaliser la matrice (de masse) résultante de l'intégrale (pour chaque composante)

$$\left(\int_{\Omega} \phi^i \phi^j dx \right)_{i,j \in I_h}.$$

On obtient ce résultat à l'aide de la formule de quadrature suivante :

$$\int_{T_h} f(x) dx \simeq \frac{|T_h|}{4} \sum_{k=1}^4 f(a_k).$$

utilisée sur chaque tétraèdre T_h , de sommets a_k , $1 \leq k \leq 4$. Cette formule est exacte si $f \in P_1(T_h)$ (donc en $O(h^2)$). En utilisant ensuite la propriété de support des fonctions de base, on obtient l'approximation

$$\int_{\Omega} \phi^i \phi^j dx \simeq \sum_{\substack{T_h \text{ t.q. } a_i \\ \text{nœud de } T_h}} \frac{|T_h|}{4} \delta_{ij}.$$

Cette formule conduit bien à une matrice diagonale.

2. Pour le terme en

$$\int_{\Gamma_A} (\mathbf{F}_h \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{G}_h \times \mathbf{n}) d\Gamma = \sum_{\alpha,\alpha'} \sum_{i,j \in I_h^{\Gamma_A}} \left(\int_{\Gamma_A} (\phi_{\alpha}^i \times \mathbf{n}) \cdot (\phi_{\alpha'}^j \times \mathbf{n}) d\Gamma \right) F_{\alpha}^i G_{\alpha'}^j, \quad \mathbf{F}_h, \mathbf{G}_h \in S_h.$$

On doit évaluer ici la matrice (de masse frontière)

$$\left(\int_{\Gamma_A} (\phi_{\alpha}^i \times \mathbf{n}) \cdot (\phi_{\alpha'}^j \times \mathbf{n}) d\Gamma \right)_{i,j \in I_h^{\Gamma_A}}^{\alpha,\alpha' \in \{1,2,3\}}.$$

$\mathbb{M}_{\Gamma_A}$ est ainsi une matrice $|I_h^{\Gamma_A}| \times |I_h^{\Gamma_A}|$, formée de blocs 3×3 de la forme

$$(\mathbb{M}_{\Gamma_A})_{i,j} = \left(\int_{\Gamma_A} (\phi_{\alpha}^i \times \mathbf{n}) \cdot (\phi_{\alpha'}^j \times \mathbf{n}) d\Gamma \right)_{\alpha,\alpha' \in \{1,2,3\}},$$

avec $i, j \in I_h^{\Gamma_A}$. Un calcul exact donnerait des termes de la forme

$$\int_{\Gamma_A} \phi^i \phi^j n^{\beta} n^{\beta'} d\Gamma, \quad \beta, \beta' \in \{1, 2, 3\}.$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, on utilise sur chaque face $T_h^{\Gamma_A}$ de sommets (a_1^A, a_2^A, a_3^A) de $\mathcal{T}_h^{\Gamma_A}$, la formule de quadrature

$$\int_{T_h^{\Gamma_A}} f(x) dx \simeq \frac{|T_h^{\Gamma_A}|}{3} \sum_{k=1}^3 f(a_k^A),$$

qui est exacte si $f \in P_1(T_h^{\Gamma_A})$. On obtient alors

$$\int_{\Gamma_A} \phi^i \phi^j n^\beta n^{\beta'} d\Gamma \simeq \sum_{\substack{T_h^{\Gamma_A} \text{ t.q. } a_i \\ \text{nœud de } T_h^{\Gamma_A}}} n_T^\beta n_T^{\beta'} \frac{|T_h^{\Gamma_A}|}{3} \delta_{ij} ,$$

et ainsi, $(\mathbb{M}_{\Gamma_A})_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Ici, $\mathbf{n}_T = \mathbf{n}_{|T_h^{\Gamma_A}}$, et n_T^β désigne sa $\beta^{\text{ième}}$ composante.

On introduit alors comme précédemment la normale au nœud, notée n_i^A pour chaque nœud a_i^A , $i \in I_h^{\Gamma_A}$, et on utilise l'approximation suivante (qui est exacte si Γ_A est plane)

$$\int_{\Gamma_A} \phi^i \phi^j n^\beta n^{\beta'} d\Gamma \simeq \sum_{\substack{T_h^{\Gamma_A} \text{ t.q. } a_i \\ \text{nœud de } T_h^{\Gamma_A}}} \frac{|T_h^{\Gamma_A}|}{3} n_{i,\beta}^A n_{i,\beta'}^A .$$

Avec cette formule, on obtient une matrice de masse frontière sur Γ_A qui est diagonale par blocs, chaque bloc étant une matrice 3×3 symétrique, aisément inversible "à la main".

3.6 Quelques résultats de discrétisation en temps

A ce stade, nous avons obtenu une semi-discrétisation en espace des équations de Maxwell. Il reste alors à effectuer la discrétisation en temps. Pour cela, on utilise le schéma saute-mouton : c'est un schéma aux différences finies, qui est explicite, centré, du second ordre en temps. On désigne par Δt le pas de discrétisation en temps, et on pose $t_n = n\Delta t$, $t_{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$, et $\mathbf{U}_n := \mathbf{U}(t_n)$, $\mathbf{U}_{n+\frac{1}{2}} := \mathbf{U}(t_{n+\frac{1}{2}})$. Ainsi, la dérivée seconde d'une quantité $\mathbf{U}$ est approchée par

$$\frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2}(t_n) = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - 2\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) .$$

Quant aux dérivées premières qui apparaissent dans les formulations variationnelles, on les approche par

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}(t_n) = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) .$$

Le champ électrique est défini aux instants "entiers" t_n et est noté $\mathcal{E}^n$, tandis que le champ magnétique est défini aux instants "moitiés" $t_{n+\frac{1}{2}}$ et est noté $\mathcal{B}^{n+\frac{1}{2}}$. On peut alors écrire le schéma totalement discrétisé. On obtient alors (on omet l'indice h), pour l'induction magnétique $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} \int_{\Omega} (\mathcal{B}^{n+3/2} - 2\mathcal{B}^{n+1/2} + \mathcal{B}^{n-1/2}) \cdot \mathbf{C} \, d\mathbf{x} + \frac{c}{2\Delta t} \int_{\Gamma_A} ((\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n-1/2}) \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{n}) \, d\Gamma \\ & + c^2 \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathcal{B}^{n+1/2} : \mathbf{grad} \mathbf{C} \, d\mathbf{x} + c^2 \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma} (\mathbf{grad} \mathcal{B}_\alpha^{n+1/2} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{C}) \, d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} p^{n+3/2} \operatorname{div} \mathbf{C} \, d\mathbf{x} = \\ & \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathcal{J}^{n+1/2}) \cdot \mathbf{C} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Gamma} (\mathcal{J}^{n+1/2} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \, d\Gamma \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma_A} [((\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^n) - c \frac{\mathbf{b}^{n+3/2} - \mathbf{b}^{n-1/2}}{2} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{C} d\Gamma, \quad \forall \mathbf{C} \in S_h^3, \quad (3.68)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathcal{B}^{n+3/2} q d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q \in S_{2h} \quad (3.69)$$

En ne gardant au membre de gauche que les termes inconnus à l'instant $t_{n+3/2}$, on peut écrire ce système sous la forme (simplifiée) suivante

Trouver $(\mathcal{B}^{n+3/2}, p^{n+3/2}) \in S_h^3 \times S_{2h}$, solution de :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{B}^{n+3/2} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{x} + \frac{c\Delta t}{2} \int_{\Gamma_A} (\mathcal{B}^{n+3/2} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{n}) d\Gamma \\ + \int_{\Omega} p^{n+3/2} \operatorname{div} \mathbf{C} d\mathbf{x} = \mathbf{Q}^{n+1/2}, \quad \forall \mathbf{C} \in S_h^3, \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathcal{B}^{n+3/2} q d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q \in S_{2h}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{Q}^{n+1/2}$ désigne l'ensemble des termes connus, i.e. le second membre du système discret à résoudre.

On désigne par $\vec{\mathbf{B}}$ le vecteur colonne des degrés de liberté de $\mathcal{B}$, et par $\vec{\mathbf{C}}^T$ le vecteur ligne des degrés de liberté de $\mathbf{C}$. On introduit alors les matrices de masse, de masse frontière, et la matrice "gradient", définies respectivement par :

$$(\vec{\mathbf{C}} | \mathbb{M}_{\Omega} \vec{\mathbf{B}}) = \int_{\Omega} \mathcal{B} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{x} \quad (\vec{\mathbf{C}} | \mathbb{M}_{\Gamma_A} \vec{\mathbf{B}}) = \int_{\Gamma_A} \mathcal{B} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{n} d\Gamma \quad (\vec{\mathbf{C}} | \mathbb{L} \vec{p}) = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{C} d\mathbf{x}. \quad (3.70)$$

Le système s'énonce alors, sous forme matricielle

$$(\mathbb{M}_{\Omega} + \frac{c\Delta t}{2} \mathbb{M}_{\Gamma_A}) \vec{\mathbf{B}}^{n+3/2} + \Delta t^2 \mathbb{L} \vec{p}^{n+3/2} = \vec{\mathbf{Q}}^{n+1/2}, \quad (3.71)$$

$$\mathbb{L}^T \vec{\mathbf{B}}^{n+3/2} = 0. \quad (3.72)$$

Remarque 3.6.1 Afin d'initialiser le calcul, on a besoin de déterminer les champs $\mathcal{B}^{-1/2}$ et $\mathcal{B}^{1/2}$. Ceci peut se faire par exemple à l'aide de l'équation (3.14) discrétisée en temps de façon analogue.

Le calcul effectif des solutions se fait en résolvant ce système matriciel. Pour cela, il suffit par exemple d'utiliser une méthode d'Uzawa ([36]). Cet algorithme est particulièrement bien adapté ici, puisqu'il peut s'interpréter comme une méthode de gradient conjugué préconditionné portant sur le problème dual, c'est à dire sur le multiplicateur de Lagrange. Ce dernier n'étant pas une quantité ayant un sens physique, mais simplement une correction de la divergence, il suffit d'effectuer un petit nombre d'itérations à chaque pas de temps pour résoudre le problème de façon numériquement satisfaisante.

Le cas du champ électrique $\mathcal{E}$ se traite de la même manière. On obtient dans ce cas (en omettant aussi l'indice h)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2} \int_{\Omega} (\mathcal{E}^{n+1} - 2\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1}) \cdot \mathbf{F} d\mathbf{x} + \frac{c}{2\Delta t} \int_{\Gamma_A} ((\mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^{n-1}) \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{n}) d\Gamma \\ + c^2 \int_{\Omega} \operatorname{grad} \mathcal{E}^n : \operatorname{grad} \mathbf{F} d\mathbf{x} + c^2 \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma} (\operatorname{grad} \mathcal{E}_{\alpha}^n \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{F}) d\Gamma + \int_{\Omega} p^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mathbf{x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{c^2}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \mathcal{R}^n \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\Delta t \varepsilon_0} \int_{\Omega} (\mathcal{J}^{n+1/2} - \mathcal{J}^{n-1/2}) \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{x} + \\ & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma_A} [(c(\mathbf{b}^{n+1/2} - \mathbf{b}^{n-1/2}) + (\frac{\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^{n-1}}{2}) \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{F} \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{F} \in S_h^{3,0}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathcal{E}^{n+1} \psi \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \mathcal{R}^{n+1} \psi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \psi \in S_{2h} \quad (3.74)$$

On ne garde là encore au membre de gauche que les termes inconnus à l'instant t_{n+1} , et on désigne par $\mathbf{Q}^{n+1/2}$ l'ensemble des termes connus à l'instant $t \leq t_{n+1/2}$. Le système en $\mathcal{E}^{n+1}$ s'énonce alors sous une forme matricielle analogue à celui en $\mathcal{B}^{n+3/2}$, soit

$$(\mathbb{M}_{\Omega} + \frac{c\Delta t}{2} \mathbb{M}_{\Gamma_A}) \vec{\mathbf{E}}^{n+1} + \Delta t^2 \mathbb{L} \vec{\mathbf{p}}^{n+1} = \vec{\mathbf{Q}}^{n+1/2}, \quad (3.75)$$

$$\mathbb{L}^T \vec{\mathbf{E}}^{n+1} = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbb{M}_{\Omega}^g \vec{\mathbf{R}}^{n+1}. \quad (3.76)$$

3.6.1 Utilisation d'une méthode de projection

La prise en compte de la condition aux limites de conducteur parfait $\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0$ par dualisation, et l'élimination des multiplicateurs de Lagrange correspondants, nous ont conduit à introduire l'espace d'approximation $S_h^{3,0}$, dans lequel toute fonction $\mathbf{F}_h$ vérifie $\mathbf{F}_h(a_i) \times \mathbf{n}_i = 0$, pour tout noeud a_i appartenant au bord Γ_C . D'un point de vue algorithmique, il est souvent plus simple de prendre en compte cette condition par une méthode de projection plutôt que de construire des fonctions de base dont la trace tangentielle s'annule. Le but de ce paragraphe est de présenter cette méthode de projection.

Nous supposons pour simplifier que tout le bord est un conducteur parfait, soit $\Gamma_A = \emptyset$, et que la densité de charge $\mathcal{R}$ est nulle. Considérons le problème discrétisé en temps (3.73-3.74), écrit plus simplement sous la forme

Trouver $(\mathcal{E}^{n+1}, p^{n+1}) \in S_h^{3,0} \times S_{2h}$, *solution de* :

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}^{n+1} \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \mathbf{Q}^{n+1/2}, \quad \forall \mathbf{F} \in S_h^{3,0}, \quad (3.77)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathcal{E}^{n+1} \psi \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \psi \in S_{2h}. \quad (3.78)$$

On introduit la projection orthogonale Π (par rapport au produit scalaire de $L^2(\Omega)$) de S_h^3 sur $S_h^{3,0}$, définie, pour $\mathcal{E}_h$ dans S_h^3 , par :

$$\begin{cases} \Pi \mathcal{E}_h \in S_h^{3,0} \\ \int_{\Omega} (\Pi \mathcal{E}_h - \mathcal{E}_h) \cdot \mathbf{F}_h \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{F}_h \in S_h^{3,0}, \end{cases} \quad (3.79)$$

qui ne modifie $\mathcal{E}_h$ que sur le bord. Ainsi, le problème (3.77-3.78) peut s'écrire en relaxant la condition aux limites de conducteur parfait de l'espace des solutions, sous la forme

Trouver $(\mathcal{E}^{n+1}, p^{n+1}) \in S_h^3 \times S_{2h}$, *solution de* :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Pi \mathcal{E}^{n+1} \cdot \Pi \mathbf{F} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p^{n+1} \operatorname{div} (\Pi \mathbf{F}) \, d\mathbf{x} = \mathbf{Q}^{n+1/2}, \quad \forall \mathbf{F} \in S_h^3, \\ & \int_{\Omega} \operatorname{div} (\Pi \mathcal{E}^{n+1}) \psi \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \psi \in S_{2h}. \end{aligned}$$

On obtient alors, et en utilisant la propriété $\Pi = \Pi^t$, puisque Π est une projection orthogonale, la forme matricielle suivante ($\mathbb{I}\mathbb{I}$ désignant la matrice associée à la projection Π)

$$\begin{cases} \mathbb{I}\mathbb{I}\vec{E}^{n+1} = \vec{E}^{n+1}, \\ (\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{M}_\Omega\mathbb{I}\mathbb{I})\vec{E}^{n+1} + \Delta t^2 (\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{L})\vec{p}^{n+1} = \mathbb{I}\mathbb{I}\vec{Q}^{n+1/2}, \\ \mathbb{L}^T\mathbb{I}\mathbb{I}\vec{E}^{n+1} = 0, \end{cases} \quad (3.80)$$

qui n'est rien d'autre que le système matriciel (3.75-3.76) (avec les hypothèses $\Gamma_A = \emptyset$ et $\mathcal{R} = 0$) dans lequel on a relaxé la condition aux limites de conducteur parfait dans l'espace des solutions.

Remarque 3.6.2 *Par construction, $\mathbb{I}\mathbb{I}\vec{Q}^{n+1/2} = \vec{Q}^{n+1/2}$ puisque toutes les quantités qui constituent $\vec{Q}^{n+1/2}$ (et devant être projetées : $\vec{E}^n$, etc.) ont déjà été projetées lors du calcul effectué au pas de temps t_n .*

On peut encore simplifier ce problème en introduisant l'inverse généralisé $(\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{M}_\Omega\mathbb{I}\mathbb{I})^{-1}$, défini comme l'opérateur qui, à Y dans S_h^3 associe X dans S_h^3 solution du système :

$$\begin{cases} \Pi X = X \\ (\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{M}_\Omega\mathbb{I}\mathbb{I}) X = \Pi Y. \end{cases} \quad (3.81)$$

$\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{M}_\Omega\mathbb{I}\mathbb{I}$ étant un opérateur de S_h^3 dans lui-même, d'image $S_h^{3,0}$ et de noyau $(S_h^{3,0})^\perp$, $(\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{M}_\Omega\mathbb{I}\mathbb{I})^{-1}$ est bien défini par (3.81). Le problème (3.80) est donc équivalent à

$$\vec{E}^{n+1} = (\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{M}_\Omega\mathbb{I}\mathbb{I})^{-1} [\vec{Q}^{n+1/2} - \Delta t^2 \mathbb{L}\vec{p}^{n+1}]. \quad (3.82)$$

L'intérêt de cette procédure est que la projection Π , et l'inverse généralisée $(\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{M}_\Omega\mathbb{I}\mathbb{I})^{-1}$ peuvent être aisément calculés à l'aide d'une formule de quadrature appropriée.

Expression de la projection Π

La projection Π , définie par (3.79), peut être complètement explicitée. En effet, on a

1. pour un noeud $a_i \notin \Gamma_C$, la projection Π est l'identité.
2. pour un noeud $a_i \in \Gamma_C$, on aura

$$\begin{cases} (\Pi\mathcal{E})(a_i) \times \mathbf{n}_i = 0 \\ ((\Pi\mathcal{E})(a_i) - \mathcal{E}(a_i)) \cdot \mathbf{F}_h(a_i) = 0, \quad \forall \mathbf{F}_h(a_i), \mathbf{F}_h(a_i) \times \mathbf{n}_i = 0 \end{cases} \quad (3.83)$$

De la seconde équation, on tire

$$\{((\Pi\mathcal{E})(a_i) - \mathcal{E}(a_i)) \cdot \mathbf{n}_i\} \{\mathbf{F}_h(a_i) \cdot \mathbf{n}_i\} = 0 \quad \forall \mathbf{F}_h(a_i), \mathbf{F}_h(a_i) \times \mathbf{n}_i = 0$$

d'où on déduit l'expression locale de la projection, caractérisée par les composantes normale et tangentielle du projeté

$$\begin{cases} (\Pi\mathcal{E})(a_i) \times \mathbf{n}_i = 0 \\ (\Pi\mathcal{E})(a_i) \cdot \mathbf{n}_i = \mathcal{E}(a_i) \cdot \mathbf{n}_i \end{cases} \quad (3.84)$$

Cette expression permet d'expliciter complètement la matrice $\mathbb{I}\mathbb{I}$ associée à Π , qui s'intègre facilement dans un algorithme d'inversion du système comme par exemple l'algorithme d'Uzawa.

3.6.2 Etude de la stabilité

On va brièvement étudier la stabilité du schéma en temps. Comme on utilise un schéma explicite, on doit imposer une condition de stabilité (condition de type CFL) sur le pas de temps. Pour obtenir cette condition, on va, à partir des formulations variationnelles discrètes, dériver des identités d'énergie, qui pour être vérifiées, devront satisfaire à une condition de positivité, dont on déduira un critère de stabilité.

Remarque 3.6.3 *Pour définir une énergie discrète, on utilise la même démarche que pour le problème continu : Considérons (par exemple) la formulation variationnelle obtenue pour l'induction magnétique $\mathcal{B}$ écrite sous forme d'équation du second ordre (équation des ondes vectorielles) non contrainte. Pour simplifier, on suppose que la frontière artificielle Γ_A est vide, et que la densité de courant $\mathcal{J}$ est nulle. En choisissant comme fonction test $\mathbf{C} = \partial_t \mathcal{B}$, on obtient alors*

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \mathcal{B} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} d\mathbf{x} + c^2 \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathcal{B} \cdot \mathbf{rot} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} d\mathbf{x} = 0, \quad (3.85)$$

qui peut s'écrire sous la forme d'une identité d'énergie

$$\frac{d}{dt} \{ \mathcal{W}_O(\mathcal{B}) \} := \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right|^2 d\mathbf{x} + \frac{c^2}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{rot} \mathcal{B}|^2 d\mathbf{x} \right\} = 0, \quad (3.86)$$

où la quantité entre accolades $\mathcal{W}_O$ définit une énergie (de type équation des ondes, contrairement à (2.6) qui définit une énergie électromagnétique) qui se conserve au cours du temps. Bien sûr, avec d'autres conditions aux limites ou un terme source non nul ($\mathcal{J} \neq 0$), la variation d'énergie devrait prendre en compte les flux sortants ou entrants sur les bords ainsi que la "durée de vie" du terme source.

Revenons maintenant à l'étude de la stabilité. On va regarder le problème sur l'induction magnétique $\mathcal{B}$ (ce serait analogue pour le champ électrique $\mathcal{E}$). Là encore, on va simplifier la présentation en supposant que la frontière artificielle Γ_A est vide, et que la densité de courant $\mathcal{J}$ est nulle. Dans ces conditions, on peut réécrire le schéma totalement discrétisé (3.68)-(3.69) sous la forme (avec des notations évidentes)

$$\frac{(\mathcal{B}^{n+3/2} - 2\mathcal{B}^{n+1/2} + \mathcal{B}^{n-1/2}, \mathbf{C})}{\Delta t^2} + c^2 a(\mathcal{B}^{n+1/2}, \mathbf{C}) + b(\mathbf{C}, p^{n+3/2}) = 0, \forall \mathbf{C} \in S_h^3, \quad (3.87)$$

$$b(\mathcal{B}^{n+3/2}, q) = 0, \quad \forall q \in S_{2h}. \quad (3.88)$$

On introduit alors l'espace

$$V_h = \{\mathbf{C} \in S_h^3, b(\mathbf{C}, q) = 0, \forall q \in S_{2h}\}$$

et on considère le problème aux valeurs propres

Trouver $(\lambda, \mathbf{B}) \in \mathbb{R}_+ \times V_h$ solution de

$$a(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \lambda(\mathbf{B}, \mathbf{C})$$

dont la plus grande valeur propre $\lambda_{\max}$ est caractérisée par

$$\lambda_{\max} = \max_{\mathbf{C} \in V_h} \frac{a(\mathbf{C}, \mathbf{C})}{(\mathbf{C}, \mathbf{C})_0} = \max_{\mathbf{C} \in V_h} \frac{a(\mathbf{C}, \mathbf{C})}{\|\mathbf{C}\|_0^2}, \quad (3.89)$$

qu'il est facile de calculer numériquement par des méthodes standards de calcul des valeurs propres (méthode de la puissance, etc. (voir par exemple [20], [22])).

L'étude de la stabilité par une méthode énergétique, consiste à construire une énergie discrète, analogue à l'énergie continue, dont on va déduire une condition suffisante de stabilité. On obtient ainsi la propriété suivante

Proposition 3.6.1 *Sous les hypothèses simplificatrices ci-dessus énoncées, on a la condition suffisante de stabilité*

$$c\Delta t \sqrt{\lambda_{\max}} < 2 \quad (3.90)$$

Preuve : On construit une énergie "discrète", analogue à l'énergie calculée sur le problème continu. Pour ce faire, on choisit comme fonction test $\mathbf{C} = \frac{\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n-1/2}}{\Delta t}$, analogue discret de $\frac{1}{2}\partial_t \mathcal{B}$, que l'on réécrit sous la forme

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{\mathcal{B}^{n+1/2} - \mathcal{B}^{n-1/2}}{\Delta t} \right).$$

On utilise alors l'identité

$$(\mathcal{B}^{n+3/2} - 2\mathcal{B}^{n+1/2} + \mathcal{B}^{n-1/2}, \mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n-1/2}) = \|\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n+1/2}\|_0^2 - \|\mathcal{B}^{n+1/2} - \mathcal{B}^{n-1/2}\|_0^2,$$

de sorte que la formulation totalement discrétisée (3.87)-(3.88) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} (\|\frac{\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n+1/2}}{\Delta t}\|_0^2 - \|\frac{\mathcal{B}^{n+1/2} - \mathcal{B}^{n-1/2}}{\Delta t}\|_0^2) \\ + c^2 a(\mathcal{B}^{n+3/2}, \mathcal{B}^{n+1/2}) - c^2 a(\mathcal{B}^{n+1/2}, \mathcal{B}^{n-1/2}) = 0. \end{aligned} \quad (3.91)$$

On définit alors une quantité discrète $\mathcal{W}_O^{n+1}$, qui a la dimension d'une énergie, par

$$\mathcal{W}_O^{n+1} := \frac{1}{2} \|\frac{\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n+1/2}}{\Delta t}\|_0^2 + \frac{c^2}{2} a(\mathcal{B}^{n+3/2}, \mathcal{B}^{n+1/2})$$

de sorte que l'identité (3.91) s'écrit

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathcal{W}_O^{n+1} - \mathcal{W}_O^n) = 0.$$

qui traduit la *conservation* d'une énergie. Malheureusement, on ne peut pas, avec cette définition, garantir la *positivité* de l'énergie. Pour pallier à ce manque, on va utiliser la propriété suivante, valable pour toute forme bilinéaire symétrique a :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4} (a(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) - a(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})) = a\left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}\right) - \frac{\Delta t^2}{4} a\left(\frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{\Delta t}\right),$$

appliquée à $\mathbf{u} = \mathcal{B}^{n+3/2}$ et $\mathbf{v} = \mathcal{B}^{n+1/2}$. On a alors

$$2\mathcal{W}_O^{n+1} = \left\| \frac{\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n+1/2}}{\Delta t} \right\|_0^2 + c^2 a \left(\frac{\mathcal{B}^{n+3/2} + \mathcal{B}^{n+1/2}}{2}, \frac{\mathcal{B}^{n+3/2} + \mathcal{B}^{n+1/2}}{2} \right) - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} a \left(\frac{\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n+1/2}}{\Delta t}, \frac{\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n+1/2}}{\Delta t} \right).$$

Avec la caractérisation (3.89) de $\lambda_{\max}$, on obtient l'inégalité

$$a \left(\frac{\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n+1/2}}{\Delta t}, \frac{\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n+1/2}}{\Delta t} \right) \leq \lambda_{\max} \left\| \frac{\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n+1/2}}{\Delta t} \right\|_0^2$$

d'où on déduit que l'énergie discrète $\mathcal{W}_O^{n+1}$ vérifie l'inégalité

$$2\mathcal{W}_O^{n+1} \geq (1 - c^2 \frac{\Delta t^2}{4} \lambda_{\max}) \left\| \frac{\mathcal{B}^{n+3/2} - \mathcal{B}^{n+1/2}}{\Delta t} \right\|_0^2 + c^2 a \left(\frac{\mathcal{B}^{n+3/2} + \mathcal{B}^{n+1/2}}{2}, \frac{\mathcal{B}^{n+3/2} + \mathcal{B}^{n+1/2}}{2} \right).$$

Celle-ci fait alors apparaître la condition suffisante de positivité

$$1 - c^2 \frac{\Delta t^2}{4} \lambda_{\max} \geq 0,$$

d'où le résultat. ■

Utilisation pratique de la condition de stabilité

D'un point de vue pratique, on ne calcule pas, en général, $\lambda_{\max}$. On désigne par d_{T_h} le diamètre du cercle inscrit dans l'élément T_h , et on pose $d = \min_{T_h \in \mathcal{T}_h} d_{T_h}$. On peut montrer que

$$\lambda_{\max} \leq \frac{C_{ste}}{d^2}$$

où la constante C_{ste} dépend de la géométrie du maillage. On choisit alors le pas de temps Δt de sorte que la condition suffisante de stabilité⁴

$$c \frac{\Delta t}{d} < \frac{2}{\sqrt{C_{ste}}}$$

soit vérifiée.

⁴c'est une stabilité de type L^2 .

Annexe : une méthode de pénalisation

On souhaite reformuler (3.19-3.20) sous la forme d'un problème de type point-selle, dans $\mathcal{X} \times L^2(\Omega)$. Une façon de prendre en compte une contrainte (ici sur la divergence) consiste à utiliser une méthode de pénalisation. Pour cela, on remplace la contrainte

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = g$$

par

$$\operatorname{div} \mathbf{u} - \epsilon p = g \quad \epsilon \text{ petit paramètre } > 0 .$$

La formulation variationnelle pénalisée s'écrit alors

$$\int_{\Omega} \{ \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} , \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X} , \quad (3.92)$$

$$\int_{\Omega} \{ -\epsilon p q + \operatorname{div} \mathbf{u} q \} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g q d\mathbf{x} \quad \forall q \in L^2(\Omega) . \quad (3.93)$$

En choisissant $q = \operatorname{div} \mathbf{v}$ dans (3.93), on arrive à

$$\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} g q d\mathbf{x} + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} ,$$

que l'on remplace dans (3.92), pour obtenir

$$\int_{\Omega} \{ \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \} d\mathbf{x} + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g q d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X} .$$

Ainsi, dans un esprit analogue à celui de la formulation augmentée, le principe de la méthode de pénalisation (aussi appelée de régularisation) consiste à rendre "inversible" la condition $\operatorname{div} \mathbf{u} = g$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé à [39].

Chapitre 4

Les équations de Maxwell bidimensionnelles

On s'intéresse ici à la modélisation des équations de Maxwell dans des domaines bidimensionnels. Pourquoi ?

Tout d'abord, un certain nombre de situations physiques sont correctement approchées par de telles modélisations.

La théorie se déduit aisément de la situation générale (cf. le chapitre 2).

Les modèles bidimensionnels obtenus sont plus simples à étudier.

La mise en œuvre numérique de ces modèles est plus aisée.

Dans la suite, nous allons présenter les deux modélisations bidimensionnelles les plus courantes, issues de deux types d'hypothèses de symétrie sur le domaine et les données : soit une invariance par rotation autour d'un axe, soit une invariance par translation. La première symétrie peut par exemple être utilisée lorsque l'on étudie un faisceau rectiligne de particules, dans un voisinage du faisceau : l'axe de rotation est alors celui du faisceau. Quant à la seconde modélisation, elle permet en particulier de modéliser des phénomènes physiques dans des "longs" cylindres ; un exemple typique est le filtre à stubs, pour lequel des résultats numériques ont été présentés au chapitre 1, ou les câbles téléphoniques.

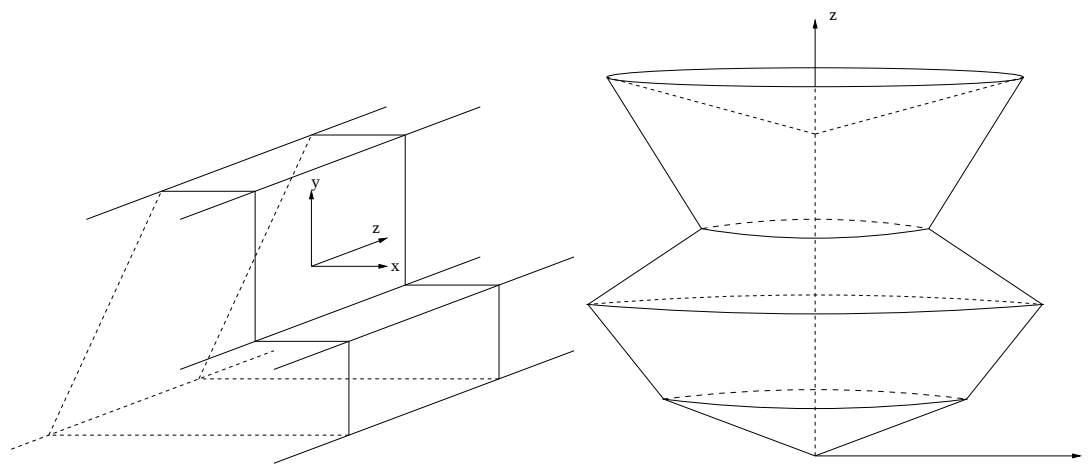


FIG. 4.1 – Exemples de domaines invariants par translation et par rotation.

1 Invariance par rotation

La théorie 'axisymétrique' exposée ici est développée pour des problèmes elliptiques dans [13], et dans [5] pour l'étude des équations de Maxwell, pour lesquelles il est nécessaire de prouver un certain nombre de résultats spécifiques.

Dans la suite, on supposera que les données $(\varepsilon, \mu, \mathcal{J}, \mathcal{R}, \mathcal{E}_0, \mathcal{H}_0)$ et le domaine Ω sont *invariants par rotation*.

1.1 Le domaine et les opérateurs différentiels

On définit une surface de *révolution* Γ engendrée par la rotation autour de (Oz) d'une ligne brisée γ_b dont les extrémités sont sur (Oz) (cf. figure 4.1). On appelle Ω le domaine limité par Γ , ω l'intersection de Ω et d'un demi-plan méridien, et γ le bord de ω . Par construction, Ω est un domaine de type (H3), avec des faces curvilignes, et ω est un domaine polygonal (lui aussi de type (H3)).

Les coordonnées naturellement adaptées à ce type de domaine sont les coordonnées *cylindriques*, notées (r, θ, z) . C'est ce système de coordonnées qui sera utilisé par défaut dans la suite¹. Dans ce système de coordonnées, un demi-plan méridien a pour équation $\theta = \theta_0$. On peut alors écrire l'égalité

$$\Omega = \omega \times [0, 2\pi[= \{(r, \theta, z) : (r, z) \in \omega, \theta \in [0, 2\pi[\}.$$

Les coordonnées naturelles dans ω sont donc les coordonnées *cartésiennes* (r, z) . Les éléments de volume sont respectivement

$$\begin{cases} d\mathbf{x} = r dr d\theta dz \text{ dans } \Omega, \\ d\omega = dr dz \text{ dans } \omega. \end{cases}$$

Pour voie de conséquence, pour une fonction f invariante par rotation, que l'on l'*identifie* à sa trace sur ω

$$\int_{\Omega} f(r, z) d\mathbf{x} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{\omega} f(r, z) r d\omega = 2\pi \int_{\omega} f(r, z) r d\omega.$$

En termes plus mathématiques, si on appelle $\check{L}^2(\Omega)$ l'ensemble des éléments de $L^2(\Omega)$ invariants par rotation, on en déduit par exemple que l'application trace sur ω *n'est pas une isométrie* de $\check{L}^2(\Omega)$ dans $L^2(\omega)$, mais de $\check{L}^2(\Omega)$ dans l'espace à poids $L_1^2(\omega)$ (au facteur $\sqrt{2\pi}$ près), défini par

Définition 1.1 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle $L_{\alpha}^2(\omega)$ l'espace des fonctions f mesurables sur ω , à valeurs dans $\mathbb{R}$, et telles que

$$\|f\|_{0,\alpha} := \left\{ \int_{\omega} f(r, z) r^{\alpha} d\omega \right\}^{1/2} < \infty.$$

De la même façon, il est nécessaire d'introduire des espaces de Sobolev à poids, lorsque l'on parle de la trace sur ω d'éléments invariants par rotation de $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$.

¹Notons que pour les faces coniques, on peut également se servir des coordonnées sphériques.

La base 'tournante' associée en un point de coordonnées (r, θ, z) est $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Dans cette base, la composante n_θ de la normale sortante $\mathbf{n}$ à Γ est nulle, et n_r et n_z sont indépendants de θ ². Ou, ce qui revient au même, on dit que $\mathbf{n}$ est égale à la normale $\boldsymbol{\nu}$ à γ_b en tous les points du bord où elle est définie. On appelle $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur tangent à γ_b tel que $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$ soit directe.

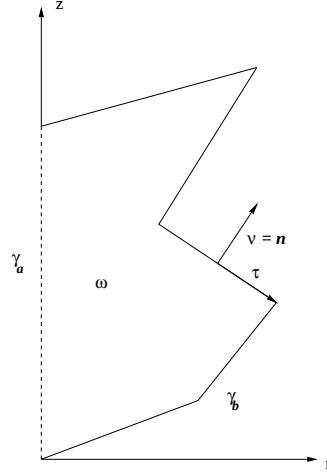


FIG. 4.2 – Dans le demi-plan méridien.

Il reste maintenant à préciser la notion d'*invariance par rotation*. Pour une définition plus générale, au sens des distributions, voir [13]. En effet, on suppose ici que l'on peut parler de valeurs ponctuelles (presque partout), ce qui est le cas si $f \in L^2(\Omega)$ ou $\mathcal{D} \in L^2(\Omega)^3$...

Définition 1.2 Soit f un champ scalaire : f est invariant par rotation si

$$f(r, \theta + \alpha, z) = f(r, \theta, z), \quad \forall (r, \theta, z) \in \Omega, \quad \forall \alpha \in]0, 2\pi[.$$

Soit $\mathcal{D} = D_r \mathbf{e}_r + D_\theta \mathbf{e}_\theta + D_z \mathbf{e}_z$ un champ vectoriel : $\mathcal{D}$ est invariant par rotation si

$$\left\{ \begin{array}{l} D_r(r, \theta + \alpha, z) = D_r(r, \theta, z) \\ D_\theta(r, \theta + \alpha, z) = D_\theta(r, \theta, z) \\ D_z(r, \theta + \alpha, z) = D_z(r, \theta, z) \end{array} \right. , \quad \forall (r, \theta, z) \in \Omega, \quad \forall \alpha \in]0, 2\pi[.$$

²En effet, on sait d'une part que le bord Γ est lipschitzien, et d'autre part qu'il peut être écrit sous la forme $\Gamma = \gamma \times [0, 2\pi[$. Ainsi, une représentation *locale* de Γ est $f(r, z) = 1$, et la représentation correspondante de Ω est $f(r, z) < 1$, avec f lipschitzienne; c'est grâce à la symétrie de révolution, que l'on peut toujours choisir f indépendante de θ . Par voie de conséquence :

$$\begin{aligned} \partial_\theta f(r, z) &= 0, & \forall (r, \theta, z) \in \Gamma; \\ \partial_r f(r, (\theta + \alpha), z) &= \partial_r f(r, (\theta), z), \text{ p. p. tout } (r, \theta, z) \in \Gamma, \\ \partial_z f(r, (\theta + \alpha), z) &= \partial_z f(r, (\theta), z), \text{ p. p. tout } (r, \theta, z) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$, on arrive bien à n_r et n_z indépendants de θ , et $n_\theta = 0$.

De façon équivalente, un champ vectoriel $\mathcal{D}$ est invariant par rotation, sous réserve que $\Pi_{-\alpha}\{\mathcal{D}(r, \theta + \alpha, z)\} = \mathcal{D}(r, \theta, z)$, $\forall (r, \theta, z) \in \Omega$, $\forall \alpha \in]0, 2\pi[$, où $\Pi_{-\alpha}$ est la rotation d'axe Oz et d'angle $-\alpha$. En effet, on a $\Pi_{-\alpha}\{\mathbf{e}_r^{(r, \theta + \alpha, z)}\} = \mathbf{e}_r^{(r, \theta, z)}$, et de même pour $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_z$...

Remarque 1.1 *Si le champ est suffisamment régulier, l'invariance par rotation signifie aussi que toutes les dérivées partielles par rapport à θ*

- des champs scalaires sont nulles;
- des composantes cylindriques des champs vectoriels sont nulles.

Sous réserve que cette invariance par rotation soit satisfaite, que deviennent les opérateurs différentiels ? En coordonnées cylindriques, les opérateurs gradient, divergence et rotationnel s'écrivent, pour un champ scalaire f et un champ vectoriel $\mathcal{D} = D_r \mathbf{e}_r + D_\theta \mathbf{e}_\theta + D_z \mathbf{e}_z$,

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (4.1)$$

$$\text{div } \mathcal{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (4.2)$$

$$\text{rot } \mathcal{E} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z. \quad (4.3)$$

Encore une fois, des coefficients r et $1/r$ apparaissent. Poursuivons par la

Définition 1.3 *Soit $\mathcal{D}$ un champ égal à $\mathcal{D} = D_r \mathbf{e}_r + D_\theta \mathbf{e}_\theta + D_z \mathbf{e}_z$. On appelle*

- *partie méridienne de $\mathcal{D}$, $\mathbf{D}_m = D_r \mathbf{e}_r + D_z \mathbf{e}_z$;*
- *partie azimutale de $\mathcal{D}$, $D_\theta \mathbf{e}_\theta$.*

On déduit des identités (4.1)-(4.3) la

Proposition 1.1 – *Pour tout champ scalaire invariant par rotation f :*
grad f est méridien.

- *Pour tout champ vectoriel invariant par rotation $\mathbf{u}$:*
*Si $\mathbf{u}$ est méridien ($u_\theta \equiv 0$), alors **rot $\mathbf{u}$ est azimutal.***
*Si $\mathbf{u}$ est azimutal ($\mathbf{u}_m \equiv 0$), alors **rot $\mathbf{u}$ est méridien et $\text{div } \mathbf{u} \equiv 0$.***

Les résultats de cette proposition vont nous permettre de décomposer les équations de Maxwell en deux sous-systèmes indépendants, lorsque le champ électromagnétique est invariant par rotation.

Il reste à introduire les opérateurs bidimensionnels 'cylindriques' pour des champs invariants par rotation, en coordonnées (r, z) (Les expressions des opérateurs 'classiques', bidimensionnels cartésiens, seront rappelées au paragraphe 2.1.)

$$\text{div } \mathcal{D} = \underline{\text{div}} \mathbf{D}_m := \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (4.4)$$

$$\text{rot } \mathcal{E} = \underline{\text{rot}} E_\theta + (\underline{\text{rot}} \mathbf{E}_m) \mathbf{e}_\theta, \text{ avec} \quad (4.5)$$

$$\underline{\text{rot}} E_\theta := -\frac{\partial E_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \mathbf{e}_z$$

$$\underline{\text{rot}} \mathbf{E}_m := \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right). \quad (4.6)$$

Dans la suite, on découpe les champs vectoriels en parties méridienne et azimutale, avec des notations évidentes, et l'on pose $\mathcal{R} = \rho$. Par ailleurs, on omet les indices m et θ , puisqu'il est clair que les inconnues vectorielles sont méridiennes, alors que les inconnues scalaires sont azimutales.

1.2 Les équations de Maxwell

Supposons que le champ électromagnétique soit invariant par rotation.

Dans le cas bidimensionnel 'cylindrique', on vérifie aisément que le système du premier ordre en temps (2.1)-(2.4), complété de la loi de conservation de la charge, de la condition de conducteur parfait ainsi que des conditions initiales (2.30) et (2.32-2.34), s'écrit alors sous la forme de deux systèmes du premier ordre en temps *complètement* découplés entre eux. Le découplage est ici complet, à la différence des formulations du second ordre en $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ du cas tridimensionnel, qui restaient (faiblement) couplées par les conditions initiales du premier ordre, ainsi que par les seconds membres des équations (2.35) et (2.39).

Le premier, d'inconnue le couple $(\mathbf{E}, H)$ a pour données $(\mathbf{J}, \rho)$ et il s'écrit sous la forme suivante. Les équations de Maxwell :

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \underline{\mathbf{rot}} H = -\mathbf{J}, \quad (4.7)$$

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} + \underline{\mathbf{rot}} \mathbf{E} = 0, \quad (4.8)$$

$$\underline{\mathbf{div}}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho. \quad (4.9)$$

L'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\mathbf{div}} \mathbf{J} = 0. \quad (4.10)$$

La condition aux limites :

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (4.11)$$

Les conditions initiales :

$$\mathbf{E}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_0, \quad (4.12)$$

$$H(\cdot, 0) = H_0. \quad (4.13)$$

Le second, d'inconnue le couple $(E, \mathbf{H})$ a pour donnée J et il comprend les relations suivantes. Les équations de Maxwell :

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} - \underline{\mathbf{rot}} \mathbf{H} = -J, \quad (4.14)$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \underline{\mathbf{rot}} E = 0, \quad (4.15)$$

$$\underline{\mathbf{div}}(\mu \mathbf{H}) = 0. \quad (4.16)$$

La condition aux limites :

$$E = 0. \quad (4.17)$$

Les conditions initiales :

$$E(\cdot, 0) = E_0, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{H}(\cdot, 0) = \mathbf{H}_0. \quad (4.19)$$

NB. L'équation de conservation de la charge n'a pas de trace dans le système $(E, \mathbf{H}, J)$.

1.3 Existence et unicité de solutions invariantes par rotation

Nous utilisons pour commencer les résultats du chapitre 2. En effet, Ω est un ouvert à bord lipschitzien borné, i.e. de type (H3). Comme les données $\mathcal{J}, \mathcal{R}, \mathcal{E}_0, \mathcal{H}_0$ appartiennent aux espaces habituels, on détermine par application directe des théorèmes 2.3.2, 2.3.4 et 2.4.4 qu'il existe une solution et une seule $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ qui dépend continûment des données. On peut considérer ensuite deux méthodes :

- On prouve que les systèmes (4.7)-(4.13) et (4.14)-(4.19) (ou les systèmes statiques dérivés) admettent une solution unique $(\mathbf{E}, H)$ ou $(E, \mathbf{H})$, et on revient au cas tridimensionnel, en construisant une solution du problème tridimensionnel qui sera invariante par rotation. Comme le problème initial admet une solution unique, elle est par voie de conséquence invariante par rotation.
- On montre directement que la solution $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ est invariante par rotation. A partir de là, il est loisible de considérer le problème dans un demi-plan méridien, et de résoudre les équations de Maxwell par application des systèmes bidimensionnels (4.7)-(4.13) et (4.14)-(4.19) (ou les systèmes équivalents du second ordre en temps, ou les systèmes statiques.)

Dans la suite de cette sous-section, nous privilégions la seconde approche (dans le cas de l'invariance par translation, on s'intéressera au contraire à la première.) A quels résultats arrive-t-on concernant l'invariance par rotation des solutions tridimensionnelles statique et dépendant du temps? Nous allons voir que les résultats sont un peu différents, selon que l'on considère la définition 1.2 de l'invariance par rotation, ou la définition *alternative* de la remarque 1.1...

NB. Pour raisonner en toute rigueur, il aurait fallu passer par la définition de l'invariance par rotation au sens des distributions, mais ceci sort du cadre du cours...

Le cas électrostatique

Avec $(\varepsilon, \mathcal{R})$ donnés et invariants par rotation, on sait donc qu'il existe un unique champ électrostatique $\mathcal{E} \in \mathcal{X}$ solution de

Trouver $\mathcal{E} \in L^2(\Omega)^3$ tel que

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathcal{E} = 0 \\ \operatorname{div}(\varepsilon \mathcal{E}) = \mathcal{R} \\ \mathcal{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Proposition 1.2 $\mathcal{E}$ est invariant par rotation.

Preuve : Soit $\alpha \in]0, 2\pi[$ fixé. On définit $\mathcal{E}^\alpha = E_r^\alpha \mathbf{e}_r + E_\theta^\alpha \mathbf{e}_\theta + E_z^\alpha \mathbf{e}_z$ par

$$\begin{cases} E_r^\alpha(r, \theta, z) = E_r(r, \theta + \alpha, z) \\ E_\theta^\alpha(r, \theta, z) = E_\theta(r, \theta + \alpha, z) \\ E_z^\alpha(r, \theta, z) = E_z(r, \theta + \alpha, z) \end{cases}, \quad \forall (r, \theta, z) \in \Omega.$$

En d'autres termes, $E_r^\alpha = E_r \circ t_\alpha$, $E_\theta^\alpha = E_\theta \circ t_\alpha$ et $E_z^\alpha = E_z \circ t_\alpha$ avec $t_\alpha(r, \theta, z) = (r, \theta + \alpha, z)$, où $\theta + \alpha$ est pris modulo 2π . Par définition, les dérivées partielles de t_α vérifient

$$\frac{\partial t_\alpha}{\partial r}(r, \theta, z) \equiv \frac{\partial t_\alpha}{\partial \theta}(r, \theta, z) \equiv \frac{\partial t_\alpha}{\partial z}(r, \theta, z) \equiv 1.$$

On en déduit alors des identités du type

$$\frac{\partial E_r^\alpha}{\partial r}_{(r,\theta,z)} = \frac{\partial E_r}{\partial r}_{(t_\alpha(r,\theta,z))} \frac{\partial t_\alpha}{\partial r}_{(r,\theta,z)} = \frac{\partial E_r}{\partial r}_{(r,\theta+\alpha,z)},$$

pour toutes les dérivées premières et toutes les composantes cylindriques.

Par voie de conséquence³, comme ε et $\mathcal{R}$ sont invariants par rotation

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathcal{E}^\alpha)_{(r,\theta,z)} = \operatorname{div}(\varepsilon \mathcal{E})_{(r,\theta+\alpha,z)} = \mathcal{R}_{(r,\theta+\alpha,z)} = \mathcal{R}_{(r,\theta,z)}.$$

De la même façon, $0 = \mathbf{rot} \mathcal{E}$ est invariant par rotation, et en particulier $\Pi_{-\alpha}\{(\mathbf{rot} \mathcal{E})_{(r,\theta+\alpha,z)}\} = (\mathbf{rot} \mathcal{E})_{(r,\theta,z)}$, avec $\Pi_{-\alpha}$ la rotation d'axe Oz et d'angle $-\alpha$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot} \mathcal{E}^\alpha)_{(r,\theta,z)} &= (\mathbf{rot} \mathcal{E}^\alpha)_r{}_{(r,\theta,z)} \mathbf{e}_r^\theta + (\mathbf{rot} \mathcal{E}^\alpha)_\theta{}_{(r,\theta,z)} \mathbf{e}_\theta^\theta + (\mathbf{rot} \mathcal{E}^\alpha)_z{}_{(r,\theta,z)} \mathbf{e}_z^\theta \\ &= (\mathbf{rot} \mathcal{E})_r{}_{(r,\theta+\alpha,z)} \mathbf{e}_r^\theta + (\mathbf{rot} \mathcal{E})_\theta{}_{(r,\theta+\alpha,z)} \mathbf{e}_\theta^\theta + (\mathbf{rot} \mathcal{E})_z{}_{(r,\theta+\alpha,z)} \mathbf{e}_z^\theta \\ &= \Pi_{-\alpha} \left\{ (\mathbf{rot} \mathcal{E})_r{}_{(r,\theta+\alpha,z)} \mathbf{e}_r^{\theta+\alpha} + (\mathbf{rot} \mathcal{E})_\theta{}_{(r,\theta+\alpha,z)} \mathbf{e}_\theta^{\theta+\alpha} + (\mathbf{rot} \mathcal{E})_z{}_{(r,\theta+\alpha,z)} \mathbf{e}_z^{\theta+\alpha} \right\} \\ &= \Pi_{-\alpha} \{(\mathbf{rot} \mathcal{E})_{(r,\theta+\alpha,z)}\} = (\mathbf{rot} \mathcal{E})_{(r,\theta,z)}. \end{aligned}$$

Enfin, sur le bord, on a $\mathbf{n} = n_r \mathbf{e}_r + n_z \mathbf{e}_z$, avec $n_r = n_r^{\theta+\alpha} = n_r^\theta$ et $n_z = n_z^{\theta+\alpha} = n_z^\theta$. Comme $\mathcal{E} \times \mathbf{n}|_\Gamma$ est invariant par rotation, on trouve sur Γ

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}^\alpha \times \mathbf{n})_{(r,\theta,z)} &= n_z E_\theta^\alpha{}_{(r,\theta,z)} \mathbf{e}_r^\theta + (n_r E_z^\alpha - n_z E_r^\alpha)_{(r,\theta,z)} \mathbf{e}_\theta^\theta - n_r E_\theta^\alpha{}_{(r,\theta,z)} \mathbf{e}_z^\theta \\ &= n_z E_\theta{}_{(r,\theta+\alpha,z)} \mathbf{e}_r^\theta + (n_r E_z - n_z E_r)_{(r,\theta+\alpha,z)} \mathbf{e}_\theta^\theta - n_r E_\theta{}_{(r,\theta+\alpha,z)} \mathbf{e}_z^\theta \\ &= \Pi_{-\alpha} \{(\mathcal{E} \times \mathbf{n})_{(r,\theta+\alpha,z)}\} = (\mathcal{E} \times \mathbf{n})_{(r,\theta,z)}. \end{aligned}$$

En conclusion, $\mathcal{E}^\alpha \in L^2(\Omega)^3$ est solution de (4.20). D'après l'unicité de la solution, $\mathcal{E}^\alpha \equiv \mathcal{E}$. Comme c'est valable pour tout α , $\mathcal{E}$ est bien invariant par rotation. ■

Pour ce qui est de $\mathcal{H}$, avec $(\mu, \mathcal{J})$ donnés et invariants par rotation, on sait donc qu'il existe un unique champ magnétostatique $\mathcal{H} \in \mathcal{W}$ solution de
Trouver $\mathcal{H} \in L^2(\Omega)^3$ tel que

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathcal{H} = \mathcal{J} \\ \operatorname{div}(\mu \mathcal{H}) = 0 \\ \mathcal{H} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Proposition 1.3 $\mathcal{H}$ est invariant par rotation.

Preuve : On reprend exactement celle de la Proposition 1.2, à l'exception de la condition aux limites qui s'obtient néanmoins de façon équivalente. ■

³Par exemple, pour ce qui est du premier terme de $\operatorname{div}(\varepsilon \mathcal{E}^\alpha)_{(r,\theta,z)}$, comme ε est invariant par rotation

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon E_r^\alpha)_{(r,\theta,z)} &= \frac{1}{r} ((\varepsilon E_r^\alpha)_{(r,\theta,z)} + r(\partial_r \varepsilon E_r^\alpha)_{(r,\theta,z)} + r(\varepsilon \partial_r E_r^\alpha)_{(r,\theta,z)}) \\ &= \frac{1}{r} ((\varepsilon E_r)_{(r,\theta+\alpha,z)} + r(\partial_r \varepsilon E_r)_{(r,\theta+\alpha,z)} + r(\varepsilon \partial_r E_r)_{(r,\theta+\alpha,z)}) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon E_r)_{(r,\theta+\alpha,z)}. \end{aligned}$$

Le cas dépendant du temps

Ce cas est très simple à traiter, dès lors que l'on a connaissance de la méthodologie retenue dans le cas statique. Tout d'abord, il existe un unique champ électromagnétique $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ solution des équations de Maxwell (2.1)-(2.4), et (2.30)-(2.34), sous réserve que les données invariantes par rotation satisfassent aux hypothèses de régularités usuelles. À partir de là, on en déduit le résultat

Proposition 1.4 $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ est invariant par rotation.

Preuve : Pour $\alpha \in]0, 2\pi[$, on définit $(\mathcal{E}^\alpha, \mathcal{H}^\alpha)$, coordonnée cylindrique par coordonnée cylindrique, par

$$E_r^\alpha = E_r \circ T_\alpha, \quad E_\theta^\alpha = E_\theta \circ T_\alpha, \quad E_z^\alpha = E_z \circ T_\alpha,$$

$$H_r^\alpha = H_r \circ T_\alpha, \quad H_\theta^\alpha = H_\theta \circ T_\alpha, \quad H_z^\alpha = H_z \circ T_\alpha,$$

$$\text{avec } T_{\alpha(r, \theta, z, t)} = (r, \theta + \alpha, z, t), \quad \forall (r, \theta, z, t) \in \Omega \times]0, T[.$$

On vérifie ensuite que ce couple est solution des mêmes équations de Maxwell que $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$.

Pour ce qui est des opérateurs différentiels en espace (div , $\mathbf{rot}$) et des conditions aux limites, c'est clair. Et pour la dérivation par rapport au temps, c'est immédiat ! ■

2 Invariance par translation

Dans la suite, on parlera de cas 'cartésien' pour évoquer l'invariance par translation.

2.1 Le domaine et les opérateurs différentiels

On considère un problème posé dans un domaine Ω cylindrique infini pour lequel les données $(\varepsilon, \mu, \mathcal{J}, \mathcal{R}, \mathcal{E}_0, \mathcal{H}_0)$, le domaine et le champ électromagnétique⁴ $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ sont indépendants d'une des trois variables d'espace (x, y, z) , que nous supposons être z : dans ce cas, on travaille dans une coupe perpendiculaire à l'axe Oz . Pour cela, notons $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$ le cylindre retenu, et supposons que ω est un ouvert borné et simplement connexe à frontière γ lipschitzienne du plan ; ici, ω est de type (H3). Dans la suite, on notera $d\omega$ la mesure de Lebesgue dans ω .

Par hypothèse, la composante n_z du vecteur normal $\mathbf{n}$ est nulle, et n_x et n_y sont indépendantes de z . Si $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur normal (unitaire) à γ , et $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur tangent associé, c'est-à-dire tel que $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$ est directe, on a donc

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} n_y \\ -n_x \end{pmatrix}.$$

Rappelons que l'on a, dans $\mathbb{R}^2$, deux opérateurs rotationnels : l'un est scalaire et agit sur des fonctions à valeurs vectorielles, et l'autre est vectoriel et agit sur des fonctions à valeurs

⁴Cette hypothèse *a priori* est différente de celle du cas invariant par rotation, voir la sous-section 1.3. Nous concluons la partie consacrée à l'invariance par translation par quelques commentaires sur ce point.

scalaires. La divergence et le gradient sont définis classiquement.

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \partial_x v_y - \partial_y v_x, \quad \mathbf{rot} f = \begin{pmatrix} \partial_y f \\ -\partial_x f \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y, \quad \text{et} \quad \mathbf{grad} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.1 *Soit $f \in L^2(\omega)$. Alors f appartient à $H^1(\omega)$ si et seulement si $\mathbf{grad} f \in L^2(\omega)^2$, ou $\mathbf{rot} f \in L^2(\omega)^2$.*

La preuve est triviale, d'après l'expression du rotationnel vectoriel.

On pose

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{x,y} \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{x,y} \\ H_z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{x,y} \\ J_z \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{R} = \rho.$$

Sous les hypothèses d'indépendance de ε , μ et des champs par rapport à z , on obtient les identités

$$\mathbf{rot} \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{rot} E_z \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}_{x,y} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div} (\varepsilon \mathcal{E}) = \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}_{x,y}), \quad \text{et} \quad \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{x,y}) \\ \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} E_z) \end{pmatrix}.$$

L'expression du rotationnel induit une dissymétrie entre les composantes $\mathbf{E}_{x,y}$ et E_z ; en effet :

$$\mathcal{E} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \iff \begin{cases} \mathbf{E}_{x,y} \in L^2(\omega)^2, \operatorname{rot} \mathbf{E}_{x,y} \in L^2(\omega), \mathbf{E}_{x,y} \cdot \boldsymbol{\tau}|_\gamma = 0 \\ E_z \in L^2(\omega), \mathbf{rot} E_z \in L^2(\omega)^2, E_z|_\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{E}_{x,y} \in H_0(\mathbf{rot}, \omega) \\ E_z \in H_0^1(\omega). \end{cases}$$

Rappelons la formule d'intégration par parties, pour $\mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}, \omega)$ et $v \in H^1(\omega)$:

$$\int_\omega \{\mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} v - \operatorname{rot} \mathbf{u} v\} d\omega = \int_\gamma (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) v d\gamma.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_\omega \{\mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} v - \operatorname{rot} \mathbf{u} v\} d\omega &= \int_\omega \left\{ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} v + u_x \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} v + u_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} d\omega \\ &\stackrel{(2.84)}{=} \int_\gamma \{u_x v n_y - u_y v n_x\} d\gamma = \int_\gamma (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) v d\gamma. \end{aligned}$$

Dans le reste de cette section dédiée au cas de l'invariance par translation, nous omettrons les indices x,y et z , puisqu'il est clair que le premier correspond à des inconnues vectorielles, et le second à des inconnues scalaires.

2.2 Les équations de Maxwell

Dans le cas bidimensionnel 'cartésien', on part à nouveau des équations du premier ordre (2.1)-(2.4), complétées par (2.30) et (2.32-2.34), dont on vérifie encore une fois qu'elles s'écrivent sous la forme de deux systèmes du premier ordre en temps *complètement* découplés entre eux.

Le premier, d'inconnue le couple $(\mathbf{E}, H)$ a pour données $(\mathbf{J}, \rho)$ et il s'écrit sous la forme suivante. Les équations de Maxwell :

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{rot} H = -\mathbf{J}, \quad (4.22)$$

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (4.23)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho. \quad (4.24)$$

L'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (4.25)$$

La condition aux limites :

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (4.26)$$

Les conditions initiales :

$$\mathbf{E}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_0, \quad (4.27)$$

$$H(\cdot, 0) = H_0. \quad (4.28)$$

Le second, d'inconnue le couple $(E, \mathbf{H})$ a pour donnée J et il comprend les relations suivantes. Les équations de Maxwell :

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} - \mathbf{rot} \mathbf{H} = -J, \quad (4.29)$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{rot} E = 0, \quad (4.30)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0. \quad (4.31)$$

La condition aux limites :

$$E = 0. \quad (4.32)$$

Les conditions initiales :

$$E(\cdot, 0) = E_0, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{H}(\cdot, 0) = \mathbf{H}_0. \quad (4.34)$$

Il n'y a pas de trace de l'équation de conservation de la charge pour le système en $(E, \mathbf{H})$.

Nous allons maintenant examiner les résultats d'existence et d'unicité de la solution statique ou temporelle des équations de Maxwell. Les méthodes mathématiques sont souvent semblables à celles du cas général tridimensionnel, aussi nous donnons seulement les grandes lignes des preuves lorsque les similitudes sont flagrantes. Ceci étant, on ne peut pas appliquer les résultats du chapitre 2 tels que dans Ω , puis passer dans ω . En effet, Ω est bien de type (H2), c'est-à-dire à bord lipschitzien, mais c'est un domaine *non borné* de $\mathbb{R}^3$. Voir également la sous-section 2.5 pour des commentaires additionnels.

2.3 Le cas statique

Dans le cas où la solution est indépendante du temps, les équations (4.22)-(4.28) prennent la forme suivante :

$$\mathbf{rot} H = \mathbf{J}, \quad (4.35)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (4.36)$$

$$(\mu H, 1)_0 = 0, \quad (4.37)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (4.38)$$

$$\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\gamma} = 0. \quad (4.40)$$

Quant aux équations (4.29)-(4.34), elles deviennent :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = J, \quad (4.41)$$

$$\operatorname{div} (\mu \mathbf{H}) = 0, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\nu}_{|\gamma} = 0, \quad (4.43)$$

$$\operatorname{rot} E = 0, \quad (4.44)$$

$$E_{|\gamma} = 0. \quad (4.45)$$

Remarque 2.1 *Comment expliquer (4.37) ? D'après (4.26), on déduit*

$$\int_{\omega} 1 \operatorname{rot} \mathbf{E} d\omega = \int_{\omega} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} 1 d\omega - \int_{\gamma} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}) 1 d\gamma = 0.$$

(4.37) est donc une conséquence du calcul de l'intégrale sur ω de (4.23).

De même, la condition aux limites (4.43) n'apparaissait pas explicitement dans (4.22)-(4.34). Néanmoins, on a vu que (4.32) implique que la composante tangentielle du gradient tangentiel (sur γ) de E s'annule. on en déduit que

$$0 = \mathbf{grad} E \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\gamma} = \left(\frac{\partial E}{\partial x} n_y - \frac{\partial E}{\partial y} n_x \right)_{|\gamma} = -(\operatorname{rot} E \cdot \boldsymbol{\nu})_{|\gamma}.$$

La condition (4.43) est alors une conséquence de la prise en compte de la trace de (4.30) sur le bord γ .

On a repris, ci-dessus, les raisonnements développés à la sous-section 1.3.2, pour l'obtention de conditions supplémentaires, en passant par les modèles quasi-statiques.

Examinons la régularité *a priori* des seconds membres des équations ci-dessus, en transposant les résultats du chapitre 2 au cas courant. Commençons par le potentiel électrostatique

$$\mathcal{E} = \mathbf{grad} \phi, \quad \phi \in H_0^1(\Omega) \implies \mathbf{E} = \mathbf{grad} \phi, \quad \phi \in H_0^1(\omega).$$

Comme ϕ et la densité de charge ρ sont deux variables duales, d'après l'expression de l'énergie statique (2.18), on en déduit que $\rho \in H^{-1}(\omega)$.

Pour ce qui est du potentiel vecteur $\mathcal{A}$, on trouve

$$\mu \mathcal{H} = \operatorname{rot} \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega) \iff \begin{cases} \mu \mathbf{H} = \operatorname{rot} A, & A \in H_0^1(\omega) \\ \mu H = \operatorname{rot} \mathbf{A}, & \mathbf{A} \in H_0(\operatorname{rot}, \omega). \end{cases}$$

On se souvient que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{A}$ sont deux variables duales dans l'expression de l'énergie magnétostatique (2.20). Par voie de conséquence, il en est de même pour d'une part $\mathbf{J}$ et $\mathbf{A}$, et d'autre part J et A : $\mathbf{J}$ appartient donc à $H_0(\text{rot}, \omega)'$, et J à $H^{-1}(\omega)$.

A partir de ces équations statiques, il est aisé d'obtenir des résultats d'existence, d'unicité et de dépendance continue par rapport aux données. Rappelons que, d'après la définition de l'énergie électromagnétique (2.5-2.6) et les hypothèses (H0) sur ε et μ , $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ appartiennent à $L^2(\omega)^2$, et E et H appartiennent à $L^2(\omega)$.

Considérons tout d'abord le cas des *champs scalaires*, E et H :

- Pour E , l'équation (4.44) implique, en termes de régularité, que $E \in H^1(\omega)$. Par ailleurs, les solutions de (4.44) sont constantes dans ω . Comme E est nulle sur le bord, on obtient finalement que $E \equiv 0$.
- Pour H , remarquons tout d'abord que (4.35) implique que la donnée $\mathbf{J}$ est à divergence nulle, c'est-à-dire (4.36). Qu'en est-il de la réciproque ? Pour étayer notre propos, rappelons le résultat suivant⁵, dû à Girault et Raviart [39, Lemme 2.1, chapitre 1, p. 22].

Lemme 2.1 *Soit $\mathbf{f}$ un élément de $H^{-1}(\omega)^2$ tel que*

$$\mathcal{D}'(\omega) \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{\mathcal{D}(\omega)} = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \{\mathbf{w} \in H_0^1(\omega)^2 : \text{rot } \mathbf{w} = 0\}.$$

Alors, il existe $p \in L^2(\omega)$, unique à une constante près, tel que $\mathbf{f} = \text{rot } p$.

Nous allons utiliser ce résultat pour $\mathbf{J}$, dont on sait qu'il vérifie $\text{div } \mathbf{J} = 0$ et qu'il appartient à $H_0(\text{rot}, \omega)'$. Comme $H_0^1(\omega)^2 \subset H_0(\text{rot}, \omega)$, on a bien $\mathbf{J} \in H^{-1}(\omega)^2$. Maintenant, prenons $\mathbf{w}$, un élément de $H_0^1(\omega)^2$ à rotationnel nul. En particulier, $\mathbf{w} \in L^2(\omega)^2$: il existe donc g dans $H^1(\omega)$ telle que $\mathbf{w} = \text{grad } g$. Comme $\mathbf{w}$ est de régularité $H^1(\omega)^2$, g est en fait un élément de $H^2(\omega)$. De plus, on a les égalités

$$\begin{cases} \text{grad } g \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\gamma} = 0 \iff g|_{\gamma} = \text{cte}, \\ \text{grad } g \cdot \boldsymbol{\nu}_{|\gamma} = 0, \iff \frac{\partial g}{\partial \nu}|_{\gamma} = 0, \end{cases}$$

ce qui signifie que l'on peut prendre g dans $H_0^2(\omega)$; puisque $\mathcal{D}(\omega)$ est dense dans $H_0^2(\omega)$, on peut remplacer g par un élément de $\mathcal{D}(\omega)$, g^* , et conclure par densité. Or,

$$\langle \mathbf{J}, \text{grad } g^* \rangle = - \langle \text{div } \mathbf{J}, g^* \rangle = 0.$$

Ainsi, $\mathbf{J}$ vérifie l'hypothèse du Lemme ci-dessus.

On en conclut que H est un potentiel de $\mathbf{J}$, et qu'il est défini à une constante près, la valeur de la constante étant finalement déterminée par (4.37).

Pour ce qui concerne les *champs vectoriels*, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, on peut par exemple reprendre la méthodologie adoptée au chapitre 2. Tout d'abord, on remarque que l'on peut permuter la divergence et le rotationnel (scalaire), ainsi que les produits scalaires $\cdot \boldsymbol{\tau}_{|\gamma}$ et $\cdot \boldsymbol{\nu}_{|\gamma}$, comme

⁵Où l'on a remplacé **grad** par **rot** et, pour être consistant, **div** par **rot**. Voir également le paragraphe qui suit sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$.

suit. En effet, d'après (4.41)-(4.43),

$$\mathbf{B}^\perp = \mu \begin{pmatrix} H_y \\ -H_x \end{pmatrix} \text{ est tel que } \begin{cases} J = \partial_x H_y - \partial_y H_x = \partial_x(\mu^{-1} B_x^\perp) + \partial_y(\mu^{-1} B_y^\perp) = \operatorname{div}(\mu^{-1} \mathbf{B}^\perp). \\ 0 = \partial_x(\mu H_x) + \partial_y(\mu H_y) = -\partial_x B_y^\perp + \partial_y B_x^\perp = -\operatorname{rot} \mathbf{B}^\perp. \\ 0 = \mu(H_x \nu_x + H_y \nu_y)|_\gamma = (-B_y^\perp n_x + B_x^\perp n_y)|_\gamma = \mathbf{B}^\perp \cdot \boldsymbol{\tau}|_\gamma. \end{cases}$$

Ceci coïncide avec le problème en $\mathbf{E}$ (4.38)-(4.40), avec ε remplacé par μ^{-1} , et ρ par J . Comme les données ont même régularité, puisqu'elles appartiennent toutes deux à $H^{-1}(\omega)$, et comme $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ se trouvent *a priori* dans $L^2(\omega)^2$, on est revenu à un problème unique; par exemple en $\mathbf{H}$, avec pour donnée J . A partir de là, on peut reprendre soit la formulation en potentiel du chapitre 2, soit la formulation mixte, dont les principes et la théorie ont été exposés au chapitre 3, pour conclure à l'existence, à l'unicité, ainsi qu'à la dépendance continue (par rapport à la donnée J) de $\mathbf{H}$.

En résumé, nous avons prouvé le

Théorème 2.1 *Soit ω un ouvert simplement connexe de type (H3).*

Il existe un couple unique $(\mathbf{E}, H)$ solution du premier système statique d'équations de Maxwell. De plus, il dépend continûment des données $(\mathbf{J}, \rho)$.

Il existe un couple unique $(\mathbf{H}, E)$ solution du second système statique d'équations de Maxwell. De plus, E est nul, et $\mathbf{H}$ dépend continûment de la donnée J .

2.4 Le cas temporel

Pour démontrer des résultats dans le cas temporel, nous nous aidons encore une fois d'une approche de type Lions-Magenes. Chacun des deux systèmes, (4.22)-(4.28) et (4.29)-(4.34), peut à son tour être écrit de manière équivalente sous la forme d'un système du second ordre en temps. On se place sur un intervalle temporel du type $]0, T[$.

Théorème 2.2 *Dans la formulation du problème du premier ordre en temps (4.22)-(4.28), d'inconnue $(\mathbf{E}, H)$, on peut remplacer (4.22) par*

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{E}_1 := \varepsilon^{-1}(\operatorname{rot} H_0 - \mathbf{J}(\cdot, 0)). \quad (4.47)$$

Dans la formulation du problème du premier ordre en temps (4.29)-(4.34), d'inconnue $(E, \mathbf{H})$, on peut cette fois remplacer (4.29) par

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} E) = -\frac{\partial J}{\partial t}, \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}(\cdot, 0) = E_1, \quad E_1 := \varepsilon^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 - J(\cdot, 0)). \quad (4.49)$$

Ce résultat se déduit aisément des contreparties tridimensionnelles (voir Théorèmes 2.4.1 et 2.4.2), en utilisant l'hypothèse d'indépendance par rapport à z , c'est-à-dire $\partial_z \cdot \equiv 0$. On peut également raisonner directement, à l'instar des résultats tridimensionnels.

Remarque 2.2 (4.48) est une équation des ondes scalaire. En effet, on a l'identité, en deux dimensions,

$$\operatorname{rot}(\alpha \operatorname{rot} f) = -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha \frac{\partial f}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\alpha \frac{\partial f}{\partial y}) = -\operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} f).$$

Si $\alpha \equiv \alpha_0$ dans ω , ceci est égal à $-\alpha_0 \Delta f$.

En ce qui concerne l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution des équations de Maxwell en temps, nous allons utiliser les résultats du chapitre 2. Pour commencer, nous "traduisons" les hypothèses (2.43) sur les données :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \in \mathcal{C}^1(0, T; L^2(\omega)) \\ \mathbf{J} \in \mathcal{C}^0(0, T; H(\operatorname{div}, \omega)) ; \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\omega)^2) \\ \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \\ J \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\omega)) ; \quad \frac{\partial J}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\omega)). \end{array} \right. \quad (4.50)$$

Nous supposons que les conditions initiales (4.27-4.28) et (4.33-4.34) sont satisfaites avec $(\mathbf{E}_0, H_0)$ et $(E_0, \mathbf{H}_0)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_0 \in H_0(\operatorname{rot}, \omega), \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}_0) = \rho(0) ; \quad H_0 \in H^1(\omega), \quad \int_{\omega} \mu H_0 d\omega = 0 \\ \mathbf{H}_0 \in H(\operatorname{rot}, \omega) \cap H_0(\operatorname{div} \mu, \omega), \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}_0) = 0 ; \quad E_0 \in H_0^1(\omega) \end{array} \right. . \quad (4.51)$$

A partir de ce point, nous nous concentrons sur la formulation du second ordre en $(\mathbf{E}, H)$. On sait que

- $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \in L^2(\omega)^2$.
- $\operatorname{rot} \mathbf{E} \in L^2(\omega)$, ce qui entraîne $\operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) \in H_0(\operatorname{rot}, \omega)'$.
- Par voie de conséquence, $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ appartient lui aussi à $H_0(\operatorname{rot}, \omega)'$.

Il est donc loisible de se placer dans $H_0(\operatorname{rot}, \omega)'$ pour étudier (4.46). On arrive aisément à la forme équivalente

$$_{H_0(\operatorname{rot}, \omega)'} < \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \mathbf{F} >_{H_0(\operatorname{rot}, \omega)} + (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{F})_0 = -(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \mathbf{F})_0, \quad \forall \mathbf{F} \in H_0(\operatorname{rot}, \omega). \quad (4.52)$$

Nous n'insistons pas sur la résolution de (4.52), puisqu'il suffit de transposer la preuve tridimensionnelle (on applique la théorie de Lions-Magenes [54]). On arrive alors à l'existence et l'unicité de $\mathbf{E}$ (et à la dépendance continue par rapport aux données $\mathbf{J}$ et ρ) ; dans $H_0(\operatorname{rot}, \omega)$ pour le champ, et dans $L^2(\omega)^2$ pour sa dérivée première :

$$\exists ! \mathbf{E}, (\mathbf{E}, \mathbf{E}') \in \mathcal{C}^0(0, T; H_0(\operatorname{rot}, \omega)) \times \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\omega)^2),$$

solution du problème du second ordre en $\mathbf{E}$.

Pour ce qui est de la détermination de H , soit

$$L_0^2(\omega) := \{v \in L^2(\omega) : \int_{\omega} v d\omega = 0\} \text{ et } L_{\mu 0}^2(\omega) := \{v \in L^2(\omega) : \int_{\omega} \mu v d\omega = 0\}.$$

De (4.23) et (4.26), on déduit que

$$H' \in \mathcal{C}^0(0, T; L_{\mu 0}^2(\omega)).$$

Comme la condition initiale (4.51) est telle que $H_0 \in L_{\mu 0}^2(\omega)$, on trouve, grâce à l'identité

$$H(t) = H_0 + \int_0^t H'(s) ds,$$

$$H \in \mathcal{C}^0(0, T; L_{\mu 0}^2(\omega)).$$

La variable auxiliaire $\mathbf{U} := \varepsilon \partial_t \mathbf{E} - \mathbf{rot} H + \mathbf{J}$ appartient en conséquence à $\mathcal{C}^0(0, T; H^{-1}(\omega)^2)$. D'après la relation de Faraday (4.23) pour $(\mathbf{E}, H)$ et la formulation du second ordre (4.46) :

$$\mathbf{U}' = \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mathbf{rot} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}) + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0.$$

$\mathbf{U}$ est donc constante, et la condition initiale (4.47) permet de conclure que la relation d'Ampère (4.22) est satisfaite. Ainsi,

$$\mathbf{rot} H \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\omega)^2), \text{ d'où } H \in \mathcal{C}^0(0, T; L_{\mu 0}^2(\omega) \cap H^1(\omega)).$$

Notons que, comme le champ H appartient à $L_{\mu 0}^2(\omega) \cap H^1(\omega)$, il est complètement déterminé par son rotationnel $\mathbf{rot} H$, et dépend donc continûment de la donnée $\mathbf{J}$. En effet, on a le résultat ci-dessous, corollaire de l'inégalité suivante, dite de POINCARÉ-WIRTINGER (cf. [58])

Théorème 2.3 *soit ω satisfaisant à (H3).*

$$\exists C_{PW} > 0 \text{ telle que } \forall u \in H^1(\omega), \|u\|_0 \leq C_{PW} \{ |u|_1^2 + (u, 1)_0^2 \}^{1/2}.$$

Corollaire 2.1 *soit ω satisfaisant à (H3), μ à (H0).*

$$\exists C_{PW}(\mu) > 0 \text{ telle que } \forall u \in H^1(\omega) \cap L_{\mu 0}^2(\omega), \|u\|_0 \leq C_{PW}(\mu) |u|_1.$$

Preuve : Soit $u \in H^1(\omega) \cap L_{\mu 0}^2(\omega)$. On écrit $u = u_0 + a$, avec $u_0 \in L_0^2(\omega)$ et $a \in \mathbb{R}$. On a donc

$$0 = (u, \mu)_0 = (u_0, \mu)_0 + a(\mu, 1)_0, \text{ d'où } |a| = \frac{1}{(\mu, 1)_0} |(u_0, \mu)_0| \leq \beta(\mu) \|u_0\|_0, \text{ avec } \beta(\mu) = \frac{\|\mu\|_0}{(\mu, 1)_0}.$$

Par ailleurs,

$$\|u\|_0^2 \leq 2\|u_0\|_0^2 + 2\|a\|_0^2 = 2\|u_0\|_0^2 + 2a^2 \|1\|_0^2 \leq 2(1 + \beta(\mu)^2 \|1\|_0^2) \|u_0\|_0^2.$$

On applique le théorème de Poincaré-Wirtinger à u_0 , pour trouver

$$\|u\|_0^2 \leq 2(1 + \beta(\mu)^2 \|1\|_0^2) C_{PW}^2 |u|_1^2,$$

puisque $|u_0|_1 = |u|_1$. ■

La variable auxiliaire $\mathbf{V} := \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} - \rho$ appartient à $\mathcal{C}^0(0, T; H^{-1}(\omega))$, et elle vérifie

$$\mathbf{V}' = \operatorname{div} \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial t} \stackrel{(4.22)}{=} -\operatorname{div} \mathbf{J} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \stackrel{(4.50)}{=} 0.$$

$\mathbf{V}$ est donc constante, et nulle d'après la condition (4.51) vérifiée par $\mathbf{E}_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \exists! H, (H, H') &\in \mathcal{C}^0(0, T; H^1(\omega) \cap L_{\mu 0}^2(\omega)) \times \mathcal{C}^0(0, T; L_{\mu 0}^2(\omega)), \\ \exists! \mathbf{E}, (\mathbf{E}, \mathbf{E}') &\in \mathcal{C}^0(0, T; X(\varepsilon)) \times \mathcal{C}^0(0, T; H(\operatorname{div} \varepsilon, \omega)), \end{aligned}$$

où $X(\varepsilon) := H_0(\text{rot}, \omega) \cap H(\text{div } \varepsilon, \omega)$, avec dépendance continue par rapport à $\mathbf{J}$ et ρ .

Enfin, il est possible de reprendre les mêmes méthodes, et d'obtenir l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport à la donnée J , pour le champ $(\mathbf{H}, E)$, $\mathbf{H}(\cdot, t)$ étant à valeurs dans

$$W(\mu) := H_0(\text{div } \mu, \omega) \cap H(\text{rot}, \omega),$$

et $E(\cdot, t)$ à valeurs dans $H_0^1(\omega)$. Nous concluons par un récapitulatif, sous la forme du

Théorème 2.4 *Soit ω un ouvert borné simplement connexe de type (H3), et $T > 0$. Supposons que $\mathbf{E}_0 \in X(\varepsilon)$ soit tel que $\text{div } \varepsilon \mathbf{E}_0 = \rho(0)$, $H_0 \in H^1(\omega) \cap L_{\mu_0}^2(\omega)$ et que les données $(\mathbf{J}, \rho)$ satisfassent à (4.50). Alors il existe une solution et une seule aux équations de Maxwell (4.22)-(4.28) dans le domaine ω entre les instants 0 et T , qui vérifie*

$$\begin{cases} (\mathbf{E}, \mathbf{E}') \in \mathcal{C}^0(0, T; X(\varepsilon)) \times \mathcal{C}^0(0, T; H(\text{div } \varepsilon, \omega)), \\ (H, H') \in \mathcal{C}^0(0, T; H^1(\omega) \cap L_{\mu_0}^2(\omega)) \times \mathcal{C}^0(0, T; L_{\mu_0}^2(\omega)). \end{cases}$$

De plus, elle dépend continûment des données $(\mathbf{J}, \rho)$.

Supposons que $\mathbf{H}_0 \in W(\mu)$, $E_0 \in H_0^1(\omega)$ et que la donnée J satisfasse à (4.50). Alors, il existe une solution et une seule aux équations de Maxwell (4.29)-(4.34) dans le domaine ω entre les instants 0 et T , qui vérifie

$$\begin{cases} (E, E') \in \mathcal{C}^0(0, T; H_0^1(\omega)) \times \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\omega)), \\ (\mathbf{H}, \mathbf{H}') \in \mathcal{C}^0(0, T; W(\mu)) \times \mathcal{C}^0(0, T; H_0(\text{div } \mu, \omega)). \end{cases}$$

De plus, elle dépend continûment de la donnée J .

Corollaire 2.2 $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, D et B satisfont aux mêmes résultats de régularité, et dépendent eux-aussi, ainsi que leurs dérivées premières, continûment des données.

Preuve : C'est une conséquence triviale des relations constitutives. ■

2.5 Commentaires

Nous avons rapidement évoqué le passage de trois en deux dimensions d'espace, dans le cas de l'invariance par translation. De fait, il existe plusieurs problèmes, de nature physique et/ou mathématique, qui rendent la situation complexe. Citons-en trois :

- (i) On se place dans un cylindre infini $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$. L'invariance par translation des données signifie en particulier qu'il y a des charges à l'infini.
- (ii) Si on suppose par exemple que $\rho \not\equiv 0$ dans $L^2(\omega)$, on obtient

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}^2(x, y) d\mathbf{x} = \int_{z \in \mathbb{R}} dz \int_{\omega} \rho^2(x, y) d\omega = +\infty.$$

- (iii) Ω étant infini, on ne peut pas appliquer la théorie développée au chapitre 2.

En fait, même si en pratique le domaine Ω peut-être très long par rapport à sa section, il n'est pas infini (cf. un câble sous-marin de plusieurs centaines de kilomètres, dont la section s'exprime en centimètres carrés). Ceci signifie que l'invariance par translation n'est pas absolue. En considérant une tranche ω , on modélise la situation physique à un endroit donné, ie. $z = z_0$, pour des données prise en $z = z_0$. Malgré tout, les données dépendent de z , aussi dans une tranche en $z = z_1$, on pourra trouver une solution différente, dès lors que les données sont différentes. Ceci étant, si l'on reprend le cas du câble sous-marin, il est possible que sur presque toute la longueur du câble, la donnée ne varie pas ! Nous réalisons donc une approximation, qui consiste à éliminer les 'petites' variations de la donnée par rapport à z . Notons que, en mettant le doigt sur la finitude du domaine Ω , nous avons également répondu aux questions soulevées par les points (ii) et (iii)...

3 Conclusion

En tout état de cause, il ne faut pas oublier que lorsque l'on se place dans un domaine bidimensionnel, avec des données invariantes par rotation ou par translation, on ne calcule qu'une approximation de la solution tridimensionnelle.

Ceci étant, on peut obtenir des champs approchés qui sont très proches de la solution physique, notamment en ce qui concerne le comportement *singulier* du champ, par exemple le long des arêtes rentrantes de Γ (qui sont des sommets de γ), ou aux sommets coniques (dans le cas invariant par rotation, sommets de γ situés sur l'axe de rotation).

Nous verrons dans le chapitre suivant, comment calculer numériquement la solution dans un domaine bidimensionnel, et nous nous consacrerons en particulier à la prise en compte du comportement singulier du champ au voisinage des sommets rentrants de ω .

Chapitre 5

Singularités dans les équations de Maxwell

Dans ce chapitre, nous allons nous consacrer à la résolution numérique des équations de Maxwell dans un domaine bidimensionnel, issues d'un problème tridimensionnel invariant par translation (cf. le chapitre 4). Nous nous plaçons dans le vide, entouré d'un conducteur parfait. Le domaine ω est borné, à bord γ polygonal, et simplement connexe (il satisfait en particulier à l'hypothèse (H3)).

Nous nous intéressons principalement à l'étude d'un champ électromagnétique dont la valeur des composantes est localement non bornée ; lorsque ce cas se présente, nous parlons de *singularité* du champ électromagnétique. Physiquement, ceci peut se produire au voisinage du conducteur parfait, et l'on sait alors que la densité de charge surfacique σ sur celui-ci est également non bornée ($\sigma = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nu}|_\gamma$). D'un point de vue mathématique, ce que nous appelons singularité du champ électromagnétique est une partie du champ dont les composantes n'appartiennent pas toutes à l'espace de Sobolev $H^1(\omega)$.

NB. On a vu, au chapitre 4, que E_z et H_z appartiennent toujours à $H^1(\omega)$, dans le cas d'un problème invariant par translation. La question ne peut donc se poser que pour les composantes de $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{H}$...

Comme nous l'avons vu, les équations de Maxwell se séparent en deux sous-systèmes d'équations complètement indépendants, l'un portant sur la partie transversale du champ électrique et sur la partie normale du champ magnétique, c'est-à-dire $(\mathbf{E}, H)$, et l'autre sur la partie normale du champ électrique et sur la partie transversale du champ magnétique, soit $(E, \mathbf{H})$. Nous nous intéressons principalement au premier système, dont nous rappelons ci-dessous l'expression au second ordre en temps. Pour des raisons de commodité, nous allons considérer qu'il n'y a pas de charges électriques dans le domaine ω , c'est-à-dire que nous posons $\rho \equiv 0$ dans la suite (voir [4, 37] pour la résolution des équations de Maxwell en présence de charges).

– Le problème en $\mathbf{E}$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + c^2 \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (5.3)$$

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}|_\gamma = 0 \quad (5.4)$$

$$\mathbf{E}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_0 \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{E}_1 := \frac{1}{\varepsilon_0}(\mathbf{rot} H_0 - \mathbf{J}(\cdot, 0)). \quad (5.6)$$

– Le problème en H

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - c^2 \Delta H = c^2 \mathbf{rot} \mathbf{J} \quad (5.7)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \nu} - \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\tau} \right)_{|\gamma} = 0 \quad (5.8)$$

$$(H, 1)_0 = 0 \quad (5.9)$$

$$H(\cdot, 0) = H_0 \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}(\cdot, 0) = H_1, \quad H_1 := -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot} \mathbf{E}_0. \quad (5.11)$$

Pour $T > 0$ donné, rappelons que si l'on suppose que $\mathbf{E}_0 \in X$, $H_0 \in H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega)$, et $\mathbf{J} \in \mathcal{C}^0(0, T; H(\operatorname{div} 0, \omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\omega)^2)$, il existe une solution et une seule à (5.1)-(5.11), qui est telle que

$$\begin{cases} (\mathbf{E}, \mathbf{E}') \in \mathcal{C}^0(0, T; X) \times \mathcal{C}^0(0, T; H(\operatorname{div} 0, \omega)), \\ (H, H') \in \mathcal{C}^0(0, T; H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega)) \times \mathcal{C}^0(0, T; L_0^2(\omega)). \end{cases}$$

A partir de ces équations, nous allons expliquer pourquoi les *singularités* existent, en adoptant un point de vue *mathématique*. Tout d'abord, nous commençons par une étude abstraite, en considérant le cas des équations de Maxwell statiques, puis celui des équations de Maxwell en temps. Ensuite, nous passons à la discrétisation des équations, et à l'étude des algorithmes numériques associés, avant de conclure par quelques exemples de résolution numérique de problèmes-test.

1 Caractérisation des singularités en espace

Comme on l'a vu plus haut, $H(\cdot, t)$ appartient toujours à $H^1(\omega)$. En ce sens, nous disons qu'il n'y a pas de singularité en H . Qu'en est-il pour $\mathbf{E}$, dont on sait simplement que

$$\mathbf{E}(\cdot, t) \in V := \{\mathbf{v} \in X : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\} ?$$

Pour cela, nous allons faire usage de l'équivalent bidimensionnel du théorème 2.3.3, tiré de [39, Thm 3.1, chapitre 1, p. 37];

Théorème 1.1 *Soit $\mathbf{E} \in H(\operatorname{div}, \omega)$ tel que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Alors*

$$\exists! \phi \in H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega), \quad \mathbf{E} = \mathbf{rot} \phi.$$

Bien sûr, dès lors que le champ vectoriel $\mathbf{E}$ se trouve dans V , l'espace des potentiels est transformé en

$$\phi \in \Phi := \{\phi \in H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega) : \Delta \phi \in L^2(\omega), \frac{\partial \phi}{\partial \nu}_{|\gamma} = 0\}.$$

On en déduit la

Proposition 1.1 *A tout élément $\mathbf{E}$ de V , il correspond un unique élément ϕ de Φ tel que*

$$\mathbf{E} = \mathbf{rot} \phi.$$

Le passage en potentiel transforme l'existence de singularité du champ électrique transverse en un problème équivalent : on dit qu'un élément ϕ de Φ est une *singularité* du Laplacien, dès lors que ϕ n'appartient pas à l'espace de Sobolev $H^2(\omega)$. L'avantage de cette reformulation est que les singularités du Laplacien ont été étudiées en détail [40, 28, 41]. En particulier, on sait que l'on a l'inclusion $\Phi \subset H^2(\omega)$ si et seulement si ω est *convexe*. En d'autres termes, on arrive au premier résultat :

il existe des singularités si, et seulement si, ω n'est pas convexe.

Nous nous plaçons dans un domaine ω polygonal et non convexe, à partir de maintenant (cf. figure 5.1). On se convainc facilement que ω est non convexe si, et seulement si, il existe des coins du bord γ *rentrants*, c'est-à-dire tels que l'angle au sommet est strictement plus grand que π .

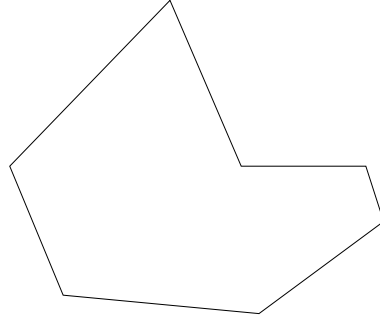


FIG. 5.1 – Un exemple de domaine ω polygonal et non convexe.

Nous définissons les quelques outils de base, qui vont nous permettre de réaliser l'étude des singularités du champ électrique transverse. Notons que l'on peut démontrer la

Proposition 1.2 *A tout élément f de $L_0^2(\omega)$, il correspond un unique élément ϕ de Φ , tel que*

$$-\Delta\phi = f.$$

Preuve : Pour un élément f de $L_0^2(\omega)$, déterminer un tel ϕ revient à étudier le problème *Trouver $\phi \in H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega)$ tel que*

$$\begin{cases} -\Delta\phi = f & \text{dans } \omega \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu}|_{\gamma} = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

On applique la procédure décrite au chapitre 2, qui consiste à construire la formulation variationnelle associée au problème, utiliser le théorème de Lax-Milgram, et revenir à (5.12). En effet, on vérifie aisément que le problème ci-dessus implique

Trouver $\phi \in H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega)$ tel que

$$\int_{\omega} \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} v \, d\omega = \int_{\omega} f v \, d\omega, \quad \forall v \in H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega). \quad (5.13)$$

Ce problème variationnel admet bien une solution unique, d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (cf. le théorème 2.3 du chapitre 4). Enfin, on revient au problème initial, en raisonnant au sens des distributions, ce qui demande d'utiliser dans la formulation variationnelle, pour un élément w de $\mathcal{D}(\omega)$, la fonction-test

$$w - \frac{1}{\text{aire}(\omega)} \int_{\omega} w \, d\omega.$$

Le fait que f est à moyenne nulle permet de revenir au problème de départ. ■

On en déduit immédiatement le

Corollaire 1.1 *Dans Φ , $\|\cdot\|_{\Phi} : \phi \mapsto \|\Delta\phi\|_0$ est une norme, équivalente à la norme du graphe $\phi \mapsto \{\|\phi\|_1^2 + \|\Delta\phi\|_0^2\}^{1/2}$.*

Preuve : D'après le théorème de Lax-Milgram, on sait qu'il existe une constante $C_{\star}$ indépendante de f telle que $\|\phi\|_1 \leq C_{\star} \|f\|_0$, pour f la donnée, et ϕ la solution, du problème (5.12). La conclusion suit, puisque (l'autre inégalité est évidente)

$$\|\phi\|_1^2 + \|\Delta\phi\|_0^2 \leq (1 + C_{\star}^2) \|\Delta\phi\|_0^2.$$

■

On arrive enfin aux résultats suivants sur l'espace V .

Proposition 1.3 *A tout élément f de $L_0^2(\omega)$, il correspond un unique élément $\mathbf{v}$ de V , tel que*

$$\text{rot } \mathbf{v} = f.$$

Dans V , $\|\cdot\|_V : \mathbf{v} \mapsto \|\text{rot } \mathbf{v}\|_0$ est une norme, équivalente à la norme canonique $\|\cdot\|_{0,\text{rot},\text{div}}$.

Preuve : Le premier point est une conséquence immédiate des deux premières propositions.

Quant au second point, il peut par exemple être établi comme suit : pour $\mathbf{v}$ un élément de V , soit l'élément ϕ appartenant à Φ caractérisé par $\text{rot } \phi = \mathbf{v}$. On en déduit alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{0,\text{rot},\text{div}}^2 &= \|\mathbf{v}\|_0^2 + \|\text{rot } \mathbf{v}\|_0^2 \\ &= \|\text{rot } \phi\|_0^2 + \|\Delta\phi\|_0^2 = \|\text{grad } \phi\|_0^2 + \|\Delta\phi\|_0^2 \\ &\leq (1 + C_{\star}^2) \|\Delta\phi\|_0^2 = (1 + C_{\star}^2) \|\text{rot } \mathbf{v}\|_0^2. \end{aligned}$$

Ici, $C_{\star}$ est la constante de la preuve du corollaire 1.1. Bien sûr, l'autre inégalité est triviale, ce qui conclut la preuve. ■

Remarque 1.1 *Le second point de la proposition est la transposition, pour des champs vectoriels bidimensionnels à divergence nulle, du résultat de Weber (cf. le corollaire A.3), admis dans le cas d'un domaine tridimensionnel.*

Ces résultats fondamentaux ayant été établis, intéressons-nous de plus près aux décompositions en parties régulière et singulière.

Définition 1.1 *On appelle sous-espaces 'réguliers' de V et Φ les espaces*

$$\begin{aligned} V_R &:= V \cap H^1(\omega)^2 = \{\mathbf{v} \in H^1(\omega)^2 : \text{div } \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\gamma} = 0\}, \\ \Phi_R &:= \Phi \cap H^2(\omega) = \{\phi \in H^2(\omega) \cap L_0^2(\omega) : \frac{\partial \phi}{\partial \nu}_{|\gamma} = 0\}. \end{aligned}$$

D'après Grisvard [41], si on note $\Delta\Phi_R$ l'image par l'opérateur laplacien de l'espace Φ_R , on peut écrire la décomposition suivante de $L_0^2(\omega)$

Théorème 1.2 $\Delta\Phi_R$ est un sous-espace fermé de $L_0^2(\omega)$. De plus, il admet un supplémentaire orthogonal, noté N , de dimension finie :

$$L_0^2(\omega) = \Delta\Phi_R \oplus^\perp N. \quad (5.14)$$

Par ailleurs, la dimension de N est égale au nombre de coins rentrants du bord γ .

Nous énonçons sans démonstration un résultat technique, qui porte sur la caractérisation des éléments de N (voir [3] pour une démonstration dans un domaine tridimensionnel). Ce résultat est très utile, car on peut en déduire des méthodes numériques de calcul des singularités. Soient $(\gamma_k)_{1 \leq k \leq N_A}$ les arêtes du bord :

Théorème 1.3 Soit p un élément de $L_0^2(\omega)$. Alors $p \in N$ si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0 \text{ dans } \omega \\ \frac{\partial p}{\partial \nu}|_{\gamma_k} &= 0, \quad 1 \leq k \leq N_A. \end{aligned}$$

A partir de là, on peut caractériser simplement les singularités du laplacien, ainsi que celles du champ électrique transverse, et les relier aux éléments de N . En effet, à tout élément p_S de N , il est clair que l'on peut associer un unique élément ϕ_S de Φ , défini par

$$-\Delta\phi_S = p_S.$$

Soit Φ_S l'ensemble des antécédents d'éléments de N par l'opérateur $-\Delta$. On a le

Corollaire 1.2

$$\Phi = \Phi_R \oplus^\perp \Phi_S, \quad (5.15)$$

où l'orthogonalité est prise au sens du produit scalaire $(\phi_1, \phi_2)_\Phi = (\Delta\phi_1, \Delta\phi_2)_0$.

Preuve : $\Delta\Phi_R$ étant un sous-espace vectoriel fermé de $L_0^2(\omega)$, on en déduit que Φ_R est un sous-espace vectoriel fermé de Φ , par définition de la norme $\|\cdot\|_\Phi$.

Il reste à vérifier que Φ_S est bien égal à $\Phi_R^\perp$:

- soit $\phi \in \Phi_S$: alors $\Delta\phi$ appartient à N , ce qui entraîne, par définition de N , que $(\phi_R, \phi)_\Phi = 0$, pour tout élément ϕ_R de Φ_R . ϕ est orthogonal à Φ_R .
- soit $\phi' \in \Phi_R^\perp$: par définition, $p = \Delta\phi'$ appartient à $L_0^2(\omega)$ et vérifie $(\Delta\phi_R, p)_0 = 0$, pour tout élément ϕ_R de Φ_R . Il appartient à N , d'après (5.14), et son antécédent ϕ' , à Φ_S .

■

En reproduisant le même raisonnement dans V , muni de $\|\cdot\|_V$, on démontre que le sous-espace V_S des antécédents d'éléments de N par l'opérateur rot est tel que

Corollaire 1.3 L'ensemble des champs électriques transverses V peut être décomposé en

$$V = V_R \oplus^\perp V_S, \quad (5.16)$$

où l'orthogonalité est prise au sens du produit scalaire $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)_V = (\text{rot } \mathbf{v}_1, \text{rot } \mathbf{v}_2)_0$.

On en déduit pour finir que les espaces des singularités du laplacien Φ_S et/ou du champ électrique transverse statique V_S sont de dimension finie, égale au nombre de coins rentrants du bord. Dans la suite, on notera $(\mathbf{v}_S^j)_{1 \leq j \leq K}$ une base de V_S .

2 Caractérisation des singularités en temps

En ce qui concerne les équations de Maxwell dépendant du temps, nous avons rappelé que le champ $\mathbf{E}$ appartient à $\mathcal{C}^0(0, T; V)$. Ceci signifie qu'à tout instant, on peut écrire

$$\mathbf{E}(\cdot, t) = \mathbf{E}_R(\cdot, t) + \mathbf{E}_S(\cdot, t), \text{ avec } \mathbf{E}_R(\cdot, t) \in V_R, \mathbf{E}_S(\cdot, t) \in V_S.$$

Qui plus est, cette décomposition est *continue* en espace, puisque de

$$\|\mathbf{E}(\cdot, t)\|_V^2 = \|\mathbf{E}_R(\cdot, t)\|_V^2 + \|\mathbf{E}_S(\cdot, t)\|_V^2,$$

on en déduit alors que

$$\begin{cases} \mathbf{E}_R \in \mathcal{C}^0(0, T; V_R), \\ \mathbf{E}_S \in \mathcal{C}^0(0, T; V_S). \end{cases} \quad (5.17)$$

Remarque 2.1 *Supposons que l'on puisse écrire une somme directe et continue de V , sous la forme $V = V_R \overset{c}{\oplus} V'_S$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall \mathbf{u} \in V, \exists! (\mathbf{u}'_R, \mathbf{u}'_S) \in V_R \times V'_S, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}'_R + \mathbf{u}'_S, \text{ et } \|\mathbf{u}'_R\|_V \leq C \|\mathbf{u}\|_V, \|\mathbf{u}'_S\|_V \leq C \|\mathbf{u}\|_V.$$

Alors, à tout instant, on peut écrire $\mathbf{E}(\cdot, t) = \mathbf{E}_R(\cdot, t) + \mathbf{E}_S(\cdot, t)$, avec $\mathbf{E}_R(\cdot, t) \in V_R$, $\mathbf{E}'_S(\cdot, t) \in V'_S$, avec

$$\begin{cases} \mathbf{E}'_R \in \mathcal{C}^0(0, T; V_R), \\ \mathbf{E}'_S \in \mathcal{C}^0(0, T; V'_S). \end{cases}$$

Comme V_S est de dimension finie égale à K , on peut écrire

$$\mathbf{E}_S(\cdot, t) = \sum_{j=1}^K \kappa_j(t) \mathbf{v}_S^j(\cdot). \quad (5.18)$$

Commentons ce premier résultat :

- Dans (5.18), les dépendances en temps et en espace sont découplées, ie. $(\kappa_j)_{1 \leq j \leq K}$ sont des fonctions de t , et $(\mathbf{v}_S^j)_{1 \leq j \leq K}$ est une fonction de la variable d'espace.
- Par construction, les fonctions κ_j sont des fonctions *continues* du temps, comme composées de fonctions continues (la fonction qui à t associe $\mathbf{E}_S(\cdot, t)$, composée à la fonction qui à $\mathbf{E}_S$ associe sa décomposition dans la base $(\mathbf{v}_S^j)_{1 \leq j \leq K}$.)
- Dans les cas particuliers où $\mathbf{E}_S \equiv 0$, on a évidemment $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_R \in H^1(\omega)^2$. Cette propriété doit être conservée par une méthode numérique.

Nous allons voir dans la suite, comment il est possible d'améliorer le deuxième point. Pour cela, nous allons utiliser des résultats qui ont été prouvés pour l'étude de l'équation des ondes scalaires (cf. [41, 56]). De fait, on montre dans la suite qu'en passant au potentiel scalaire ϕ , tel que $\mathbf{E} = \mathbf{rot} \phi$, il est possible de ramener le problème vectoriel en $\mathbf{E}$ à un problème scalaire en ϕ . En effet, d'après la proposition 1.1, il existe une fonction unique ϕ appartenant à $\mathcal{C}^0(0, T; \Phi)$ et telle que $\mathbf{E} = \mathbf{rot} \phi$.

Comme $\mathbf{E}$ se trouve également appartenir à $\mathcal{C}^1(0, T; H(\text{div } 0, \omega))$, on trouve

$$(\phi, \phi') \in \mathcal{C}^0(0, T; \Phi) \times \mathcal{C}^0(0, T; H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega)). \quad (5.19)$$

Par ailleurs, d'après (5.6), on a

$$\phi(\cdot, 0) = \phi_0 \in \Phi, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\cdot, 0) = \phi_1 \in H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega). \quad (5.21)$$

De même, on veut introduire un potentiel scalaire de $\mathbf{J}$ (cf. (5.3)). Or, la donnée $\mathbf{J}$ vérifie

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \in L^2(0, T; H(\operatorname{div} 0, \omega)),$$

de telle sorte que le potentiel scalaire g de $\mathbf{J}$, c'est-à-dire tel que $\mathbf{J} = \mathbf{rot} g$, est tel que

$$\frac{\partial g}{\partial t} \in L^2(0, T; H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega)).$$

D'après les équations de Maxwell du premier ordre en temps, et (4.22) en particulier, on peut alors écrire que

$$\mathbf{rot} u = 0, \text{ avec } u = \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - H + g.$$

Par définition, u appartient à $\mathcal{C}^0(0, T; H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega))$. Qui plus est, dans $H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega)$, $v \mapsto \|\mathbf{rot} v\|_0$ définit une norme; u est donc nulle, ce qui revient à l'identité

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - H = -g.$$

En dérivant une fois par rapport au temps la relation ci-dessus et en utilisant (4.23), on trouve que ϕ satisfait à (5.19)-(5.21) ainsi qu'à l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \phi = f, \text{ avec } f := -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (5.22)$$

Par construction, $f \in L^2(0, T; H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega))$. En utilisant à nouveau la théorie de Lions et Magenes [54], on démontre que ϕ est la solution unique de l'équation des ondes (5.22) appartenant à $\mathcal{C}^0(0, T; \Phi) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega))$.

Or, il se trouve que la régularité en temps des coefficients singuliers associés à la solution de l'équation des ondes a déjà été étudiée par Grisvard [41], et Moussaoui et Tran [56]. Par régularité des coefficients singuliers, nous renvoyons ici à la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \phi(\cdot, t) &= \phi_R(\cdot, t) + \phi_S(\cdot, t), \text{ avec } \phi_R(\cdot, t) \in \Phi_R, \phi_S(\cdot, t) \in \Phi_S, \\ \phi_S(\cdot, t) &= \sum_{j=1}^K \kappa'_j(t) \phi_S^j(\cdot), \end{aligned}$$

où $(\phi_S^j)_{1 \leq j \leq K}$ est une base de Φ_S , avec ϕ_S^j tel que $\mathbf{v}_S^j = \mathbf{rot} \phi_S^j$, pour $1 \leq j \leq K$.

Proposition 2.1 *Les coefficients κ_j et κ'_j sont égaux, pour j compris entre 1 et K .*

Preuve : D'après l'unicité du potentiel, on sait que l'on a $\mathbf{E}(\cdot, t) = \mathbf{rot} \phi(\cdot, t)$, pour tout instant t . On trouve alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R(\cdot, t) + \mathbf{E}_S(\cdot, t) &= \mathbf{rot} \phi_R(\cdot, t) + \mathbf{rot} \phi_S(\cdot, t), \text{ soit} \\ \{\mathbf{E}_R(\cdot, t) - \mathbf{rot} \phi_R(\cdot, t)\} + \{\mathbf{E}_S(\cdot, t) - \mathbf{rot} \phi_S(\cdot, t)\} &= 0. \end{aligned}$$

Le premier terme appartient à V_R par construction ($\mathbf{rot} \Phi_R = V_R$), et le second à V_S . Leur somme étant nulle, ils sont tous deux nuls. Pour ce qui est du second terme, on trouve, puisque $\mathbf{v}_S^j = \mathbf{rot} \phi_S^j$, pour $1 \leq j \leq K$:

$$\sum_{j=1}^K (\kappa_j - \kappa'_j)(t) \mathbf{v}_S^j = 0.$$

$(\mathbf{v}_S^j)_{1 \leq j \leq K}$ étant une base de V_S , on a bien $(\kappa_j - \kappa'_j)(t) = 0$, à tout instant. ■

Nous allons refaire le même type de raisonnement dans la suite, pour identifier à nouveau les coefficients issus de deux représentations distinctes de la solution de l'équation des ondes scalaires (5.22).

En effet, reprenons maintenant la théorie développée dans [41, 56]. Appelons β_j la valeur de l'angle au sommet au $j^{\text{ème}}$ coin rentrant, et α_j le rapport π/β_j qui appartient donc à $]1/2, 1[$. Soit $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ une fonction de troncature, égale à un dans un voisinage de zéro et à zéro au voisinage de l'infini. Soit enfin (r_j, θ_j) les coordonnées polaires par rapport au coin rentrant, de telle sorte que la frontière du domaine soit localement décrite par $\theta_j = 0$ et $\theta_j = \beta_j$. En suivant par exemple [41], si on pose

$$\tilde{\phi}_S^j(r_j, \theta_j) = \eta(r_j) r^{\alpha_j} \cos(\alpha_j \theta_j),$$

on peut alors décomposer Φ sous la forme

$$\Phi = \Phi_R \oplus \tilde{\Phi}_S \text{ avec } \tilde{\Phi}_S = \text{Vect}\{\tilde{\phi}_S^j\}_{1 \leq j \leq K}.$$

La somme reste directe, mais elle n'est plus orthogonale. D'après [41, Thm 5.3.1. page 160] et [56], après transposition de leurs résultats au cas d'un problème avec une condition aux limites de Neumann homogène, si on écrit cette fois $\phi(t)$ comme

$$\phi(t) = \tilde{\phi}_R(t) + \sum_{1 \leq j \leq K} \kappa_j^*(t) \tilde{\phi}_S^j, \quad (5.23)$$

avec $\tilde{\phi}_R \in \mathcal{C}^0(0, T; \Phi_R)$, on a les résultats

Théorème 2.1 *Supposons que $\mathbf{J} \in \mathcal{C}^1(0, T; H(\text{div } 0, \omega))$. Alors,*

$$\kappa_j^* \in \mathcal{C}^{0, 1-\alpha_j-\varepsilon}(0, T; \mathbb{R}) \cap H^{3/2-\alpha_j}(0, T; \mathbb{R}), \quad 1 \leq j \leq K, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

3 Discrétisation

Dans cette section, nous considérons le problème de la discrétisation des équations de Maxwell statiques et/ou dépendant du temps, à la lumière des résultats obtenus précédemment. Ceci signifie, en particulier, que nous allons *distinguer* les parties régulière et singulière, lors de la discrétisation. Notons que pour la discrétisation proprement dite des équations de Maxwell dépendant du temps, nous procédons en deux étapes, comme cela se fait classiquement, en commençant par une *semi-discrétisation* en espace, puis en finissant par la discrétisation en temps. Pour résumer :

- Discrétisation des éléments réguliers de V_R ;
- Discrétisation des éléments singuliers de V_S ;
- Discrétisation en temps, lorsque les champs en dépendent.

Dans la suite, nous présentons les méthodes dans le cas d'un seul coin rentrant, et nous évoquons brièvement le passage au cas de plusieurs coins rentrants.

Remarque 3.1 *En adoptant ce type incrémental de discrétisation, c'est-à-dire avec les parties régulière et singulière séparées, on respecte la structure de certains codes de calcul [44, 7]. En effet, supposons que l'on n'ait pas pris en compte la discrétisation de la partie singulière. Le code fournit néanmoins des résultats corrects, dès lors que l'on résout les équations de Maxwell dans un domaine polygonal convexe, ou dans un domaine à bord régulier, puisqu'il n'y a pas de partie singulière (il n'y a donc aucune raison de la prendre en compte numériquement)! L'ajout de la discrétisation de la partie du champ se trouvant dans V_S permet alors d'augmenter les possibilités du code de calcul.*

3.1 En espace : partie régulière

Pour discrétiser la partie régulière, on adopte l'élément fini de Hood-Taylor (cf. la sous-section 3.5.1 du chapitre 3). Rappelons que cet élément requiert la construction de deux maillages triangulaires, l'un grossier, et l'autre fin. Le champ est de type P_1 sur le maillage fin, et le multiplicateur de Lagrange qui assure la condition de divergence nulle du champ ($\rho \equiv 0$), est de type P_1 sur le maillage grossier. Nous n'insistons pas plus sur la méthode, qui a été abondamment décrite au chapitre 3. Ceci étant, il est primordial de noter que

Cette discrétisation ne permet pas d'approcher la solution entière, partie régulière plus partie singulière, dans un domaine non convexe.

En effet, supposons que l'on approche le champ uniquement par l'élément de Hood-Taylor. Notons $\tilde{\mathbf{E}}^h$ la solution approchée. Par construction, $\tilde{\mathbf{E}}^h \in H^1(\omega)^2$, puisque la méthode d'élément fini P_1 est conforme dans H^1 . Ainsi, comme $\tilde{\mathbf{E}}_h$ appartient¹ à V , on en déduit

$$\tilde{\mathbf{E}}^h \in V_R.$$

Or, on cherche à approcher $\mathbf{E}$, que l'on peut écrire sous la forme $\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \mathbf{E}_S$, $\mathbf{E}_R$ et $\mathbf{E}_S$ étant orthogonales dans V d'après (5.16). On arrive donc à

$$\|\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}^h\|_V^2 = \|\mathbf{E}_R - \tilde{\mathbf{E}}^h\|_V^2 + \|\mathbf{E}_S\|_V^2 \geq \|\mathbf{E}_S\|_V^2,$$

et ceci, quel que soit le maillage retenu. En conclusion, dès lors que $\mathbf{E}_S$ est non nul, la méthode numérique ne converge pas!

Il est donc bien nécessaire de définir une méthode d'approximation de la partie singulière de la solution, et c'est l'objet de la sous-section suivante.

3.2 En espace : partie singulière

Rappelons que nous nous sommes placés dans le cas d'un unique coin rentrant. Dans ce cas, l'espace V_S est de dimension un, et il suffit donc de déterminer $\mathbf{v}_S$, un vecteur de base. Notons que N et Φ_S sont aussi de dimension un.

Pour calculer $\mathbf{v}_S$, on utilise l'algorithme suivant :

¹Si l'on suppose pour simplifier que les conditions sur la divergence et sur la condition aux limites sont exactement prise en compte.

– **Première étape**

On calcule d'abord une base de N , c'est-à-dire un élément p_S non nul de $L_0^2(\omega)$ qui vérifie

$$\Delta p_S = 0 \text{ dans } \omega, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial p_S}{\partial \nu} \Big|_{\gamma_k} = 0, \quad 1 \leq k \leq N_A. \quad (5.25)$$

– **Deuxième étape**

On cherche ensuite $\mathbf{v}_S \in H(\text{rot}, \omega)$ solution de

$$\text{rot } \mathbf{v}_S = p_S \text{ dans } \omega, \quad (5.26)$$

$$\text{div } \mathbf{v}_S = 0 \text{ dans } \omega, \quad (5.27)$$

$$\mathbf{v}_S \cdot \boldsymbol{\tau}|_\gamma = 0. \quad (5.28)$$

Plutôt qu'une résolution directe de (5.26-5.28), il est plus simple d'utiliser l'isomorphisme de la proposition 1.2. A $\mathbf{v}_S \in V$ correspond un potentiel unique ϕ_S , élément de $H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega)$, et tel que

$$-\Delta \phi_S = p_S \text{ dans } \omega, \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \phi_S}{\partial \nu} \Big|_\gamma = 0. \quad (5.30)$$

Comme ϕ_S est dans $H^1(\omega)$, on peut résoudre ce problème à l'aide d'une formulation variationnelle, cf. (5.13). On sait alors que $\mathbf{v}_S = \mathbf{rot } \phi_S$.

Ci-dessous, nous exposons une méthode numérique d'obtention d'une base de V_S , que nous appelons *méthode de la partie principale*. Une méthode alternative est exposée dans l'Annexe.

Première étape : Calcul d'une base de N Avant de commencer, rappelons les propriétés suivantes, établies par Grisvard [41].

Proposition 3.1 *Soit p_S un élément de N . Alors*

- p_S appartient à $C^\infty(\overline{\omega} \setminus \mathcal{V}_{tc})$, pour tout voisinage $\mathcal{V}_{tc}$ de tous les coins du bord γ ;
- de plus p_S appartient à $H^1(\overline{\omega} \setminus \mathcal{V}_c)$, hors de tout voisinage $\mathcal{V}_c$ du coin rentrant.

On suit plus ou moins librement la méthode exposée dans [55]. Les propriétés de p_S , ainsi que l'expression de sa restriction (voir (5.79) en Annexe), nous permettent d'écrire la décomposition suivante, en coordonnées polaires centrées sur le coin rentrant, valable dans tout ω :

$$p_S = \tilde{p} + p_p, \quad \tilde{p} \in H^1(\omega), \quad p_p(r, \theta) = r^{-\alpha} \cos(\alpha\theta). \quad (5.31)$$

On appelle p_p *partie principale* de la singularité p_S .

Bien évidemment, p_S appartient à $L_0^2(\omega)$, et reste caractérisé par les propriétés (5.24-5.25). On en déduit alors que $\tilde{p}$, élément de $H^1(\omega)$, est l'unique solution du problème ci-dessous.

$$\Delta \tilde{p} = 0 \text{ dans } \omega, \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \nu} \Big|_{\gamma_k} = -\frac{\partial p_p}{\partial \nu} \Big|_{\gamma_k}, \quad 1 \leq k \leq N_A. \quad (5.33)$$

NB. Par construction, la partie principale p_p est à laplacien nul.

En ce qui concerne les égalités (5.33), arête par arête, on peut faire les commentaires suivants :

- Sur les deux arêtes dont une des extrémités est le coin rentrant, on sait que $\partial_\nu p_p = 0$.
- Sur les autres arêtes, $\partial_\nu p_p$ est une fonction régulière, puisque p_p est $\mathcal{C}^\infty$ hors de tout voisinage du coin rentrant.
- Ainsi, si on définit t_p comme la trace normale $\partial_\nu p_p$ sur toutes les arêtes ne touchant pas le coin, et 0 sur les deux arêtes restantes, on en déduit d'une part que $t_p \in L^2(\gamma)$ (et même $t_p \in H^\eta(\gamma)$, $0 \leq \eta < 1/2$) et que (5.33) peut être remplacée de façon équivalente par

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \nu|_{\gamma_k}} = -t_p \text{ sur } \gamma. \quad (5.34)$$

Notons pour finir que $\tilde{p}$, solution de (5.32) et (5.34), est connue à une constante près.

Pour résoudre numériquement ce problème, on introduit un maillage triangulaire de ω . On discrétise l'espace $H^1(\omega)$ à l'aide de l'élément fini de Lagrange P_1 . On note V_h le sous-espace de dimension N_h issu de cette discrétisation. On désigne par $\tilde{p}_h$ la solution discrète qui s'écrit $\tilde{p}_h = \sum_{i=1}^{N_h} \tilde{p}_i \lambda_i$, où $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N_h}$ sont les fonctions de base de V_h . Après discrétisation, la formulation variationnelle associée à (5.32) et (5.34) prend la forme matricielle suivante (avec des notations évidentes) :

$$\mathbb{K}_\omega \vec{p} = \vec{B}. \quad (5.35)$$

La matrice de rigidité $\mathbb{K}_\omega$ est une matrice creuse (en moyenne, sept éléments non nuls par ligne). Ce système matriciel n'est pas inversible, puisque l'on n'a pas pris en compte le fait que la solution $p_S^h = \tilde{p}_h + p_p$ est à moyenne nulle. En pratique, on fixe (arbitrairement) la valeur de $\tilde{p}_h$ en un point du bord, puis, une fois la solution numérique calculée, on utilise la condition $p_S \in L_0^2(\omega)$, c'est-à-dire

$$\int_\omega p_S^h d\omega = 0$$

pour déterminer la valeur de la constante.

Pour ce qui est de l'ordre de la méthode, on peut prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \|p_S - p_S^h\|_0 \leq C_\varepsilon h^{2\alpha-\varepsilon}. \quad (5.36)$$

Deuxième étape : Calcul de v_S Comme nous l'avons dit, nous commençons par calculer ϕ_S . Cette fois, il est loisible de prouver les résultats ci-dessous

Proposition 3.2 ϕ_S appartient à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\omega} \setminus \mathcal{V}_{tc})$, pour tout voisinage $\mathcal{V}_{tc}$ de tous les coins du bord γ .

D'après ce résultat de régularité, et d'après le développement local obtenu dans l'Annexe (cf. (5.90)), on peut écrire

$$\phi_S = \tilde{\phi} + \beta \phi_p, \quad \tilde{\phi} \in H^2(\omega), \quad \phi_p(r, \theta) = r^\alpha \cos(\alpha\theta), \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (5.37)$$

On sait par ailleurs que ϕ_S est un élément de $H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega)$, solution de (5.29-5.30). Pour déterminer une approximation numérique de ϕ_S , on procède alors comme suit. Tout d'abord, $\tilde{\phi}$ vérifie

$$\Delta \tilde{\phi} = -p_S \text{ dans } \omega, \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \nu}|_{\gamma_k} = -\beta \frac{\partial \phi_p}{\partial \nu}|_{\gamma_k}, \quad 1 \leq k \leq N_A. \quad (5.39)$$

1. Calcul de la constante β .

On peut vérifier que l'on a l'identité $\beta = \frac{1}{\pi} \|p_S\|_0^2$. Ceci permet de calculer une valeur numérique β_h de la constante, à l'aide de la formule approchée $\beta_h = \frac{1}{\pi} \|p_S^h\|_0^2$. À l'aide de (5.36), on déduit immédiatement que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, |\beta - \beta_h| \leq C_\varepsilon h^{2\alpha-\varepsilon}. \quad (5.40)$$

2. Détermination de $\tilde{\phi}_h$, approximation de $\tilde{\phi}$, solution de (5.38-5.39) : on procède comme pour le calcul de $\tilde{p}_h$... Après discrétisation, la formulation variationnelle associée à (5.38)-(5.39) prend la forme matricielle suivante (avec des notations évidentes) :

$$\mathbb{K}_\omega \vec{\Phi} = \vec{B}'. \quad (5.41)$$

On obtient donc l'approximation $\phi_S^h = \tilde{\phi}_h + \beta_h \phi_p$. On peut vérifier que

$$\|\phi_S - \phi_S^h\|_1 = O(h). \quad (5.42)$$

NB. Ceci signifie que l'on retrouve l'ordre de convergence optimal pour la méthode des éléments finis de Lagrange P_1 , que l'on connaît bien lorsque le domaine est convexe.

On finit par le calcul de $\mathbf{v}_S$, que l'on décompose selon

$$\mathbf{v}_S = \tilde{\mathbf{v}} + \beta \mathbf{v}_p, \quad \tilde{\mathbf{v}} \in H^1(\omega)^2, \quad \mathbf{v}_p(r, \theta) = \alpha r^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \sin(\alpha\theta) \\ \cos(\alpha\theta) \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

où β a été calculée ci-dessus, et $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{rot} \tilde{\phi}$. On peut choisir d'écrire simplement $\underline{\mathbf{v}}_S^h = \mathbf{rot} \tilde{\phi}_h + \beta_h \mathbf{v}_p$. D'après (5.42), on infère

$$\|\mathbf{v}_S - \underline{\mathbf{v}}_S^h\|_{0,\text{div}} = O(h). \quad (5.44)$$

Le champ discrétisé $\underline{\mathbf{v}}_S^h$ appartient seulement à $H(\text{div}, \omega)$ (et pas à X). Par ailleurs, chacune des deux composantes de $\mathbf{rot} \tilde{\phi}_h$ est seulement P_0 , c'est-à-dire constante par triangle.

Pour remédier à cette difficulté, on effectue une projection sur $L^2(\omega)^2$:
Trouver $\tilde{\mathbf{v}} \in L^2(\omega)^2$ tel que

$$\int_\omega \tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\lambda} d\omega = \int_\omega \mathbf{rot} \tilde{\phi} \cdot \boldsymbol{\lambda} d\omega, \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in L^2(\omega)^2. \quad (5.45)$$

Pour calculer une approximation numérique $\tilde{\mathbf{v}}_h$, on discrétise la formulation (5.45) à l'aide de l'élément fini de Lagrange P_1 , composante par composante. On obtient le système matriciel suivant :

$$\mathbb{M}_\omega \vec{\mathbf{v}} = \mathbb{R}_\omega \vec{\Phi}, \quad (5.46)$$

où $\mathbb{R}_\omega$ désigne la matrice du rotationnel.

NB. Le vecteur solution $\tilde{\mathbf{v}}_S$ contient les *deux* composantes de $\tilde{\mathbf{v}}_h$. Le système linéaire à résoudre est donc de taille $(2N_h) \times (2N_h)$.

On appelle alors $\mathbf{v}_S^h$ l'approximation finalement calculée, soit

$$\mathbf{v}_S^h = \tilde{\mathbf{v}}_h + \beta_h \mathbf{v}_p. \quad (5.47)$$

Par rapport à $\mathbf{v}_S^h$, cette approximation présente l'avantage d'appartenir à X . Par contre, on n'a plus la relation $\operatorname{div} \mathbf{v}_S^h = 0$. Quoiqu'il en soit, c'est l'approximation numérique finalement retenue, car elle possède les propriétés suivantes :

- La *partie principale* est très correctement approchée, puisque l'on a approché $\beta \mathbf{v}_p$ par $\beta_h \mathbf{v}_p$, avec

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \|\beta \mathbf{v}_p - \beta_h \mathbf{v}_p\|_X \leq C_\varepsilon h^{2\alpha-\varepsilon}. \quad (5.48)$$

- Pour ce qui est du *champ total*, on peut prouver que

$$\|\mathbf{v}_S - \mathbf{v}_S^h\|_0 = O(h). \quad (5.49)$$

- La partie $\tilde{\mathbf{v}}_h$ est un élément fini de Lagrange P_1 , composante par composante. Comme on l'a déjà annoncé plus haut, on utilise la même approximation pour la partie régulière de la solution, ce qui rend la programmation plus homogène.
- La méthode numérique est simple à mettre en œuvre (par exemple, par comparaison avec la méthode décrite en Annexe.)

Remarque 3.2 Une méthode alternative de calcul, qui fait appel l'écriture de la solution sous la forme d'une série au voisinage des coins rentrants, est exposée en Annexe.

Si, pour $f \in L_0^2(\omega)$, on veut résoudre un problème en rot-div :

Trouver $\mathbf{E} \in H(\operatorname{rot}, \omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= f, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}|_\gamma &= 0, \end{aligned}$$

il suffit de décomposer la solution sous la forme $\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \kappa \mathbf{v}_S$, avec $\mathbf{v}_S$ la base de V_S , et $\mathbf{E}_R \in V_R$ et $\kappa \in \mathbb{R}$ à déterminer. On calcule κ par *V-orthogonalité* de $\mathbf{E}_R$ et de $\mathbf{v}_S$, soit

$$\int_\omega \operatorname{rot} \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{v}_S d\omega = \int_\omega f \operatorname{rot} \mathbf{v}_S d\omega = \kappa \int_\omega \operatorname{rot} \mathbf{v}_S \operatorname{rot} \mathbf{v}_S d\omega.$$

En utilisant (5.26), on trouve

$$\kappa = \frac{\int_\omega f p_S d\omega}{\|\mathbf{p}_S\|_0^2}.$$

Bien sûr, on peut en calculer une approximation, notée κ_h , en remplaçant les valeurs exactes par les valeurs numériques. De (5.36), on déduit alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, |\kappa - \kappa_h| \leq C_\varepsilon h^{2\alpha-\varepsilon}. \quad (5.50)$$

Rappelons que le calcul de la partie régulière $\mathbf{E}_R$ se fait par une méthode numérique classique, c'est-à-dire en utilisant l'élément fini de Lagrange P_1 , composante par composante.

En conclusion, on constate qu'il n'y a que peu de modifications à effectuer si on dispose au préalable d'un code de calcul résolvant le problème pour des domaines réguliers.

3.3 Résolution du problème d'évolution

La formulation variationnelle

On commence par écrire le problème (5.1-5.4) sous une forme variationnelle classique, soit
Trouver $\mathbf{E} \in V$ tel que

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{E}, \mathbf{F})_0 + c^2(\operatorname{rot} \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{F})_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{dt}(\mathbf{J}, \mathbf{F})_0, \quad \forall \mathbf{F} \in V. \quad (5.51)$$

En utilisant la décomposition orthogonale de l'espace des solutions $V = V_R \oplus V_S$, ainsi que de la solution $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_R(t) + \kappa(t)\mathbf{v}_S$ (cf. (5.18) avec $K = 1$), on introduit une nouvelle formulation variationnelle, en ajoutant à l'espace des fonctions test V_R la fonction $\mathbf{v}_S$. Avec cette décomposition, la formulation variationnelle ci-dessus s'écrit, pour $\mathbf{F} \in V_R$ (en utilisant l'orthogonalité de la décomposition.)

Trouver $\mathbf{E}_R \in V_R$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{E}_R, \mathbf{F}_R)_0 + c^2(\operatorname{rot} \mathbf{E}_R, \operatorname{rot} \mathbf{F}_R)_0 = & -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{dt}(\mathbf{J}, \mathbf{F}_R)_0 \\ & -\kappa''(t)(\mathbf{v}_S, \mathbf{F}_R)_0, \quad \forall \mathbf{F}_R \in V_R. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ce système fait apparaître comme inconnue supplémentaire $\kappa''(t)$, la dérivée seconde de $\kappa(t)$ par rapport au temps. On lui adjoint donc une équation supplémentaire, obtenue cette fois-ci en prenant $\mathbf{v}_S$ comme fonction test, soit

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{E}_R, \mathbf{v}_S)_0 + \kappa''(t)\|\mathbf{v}_S\|_0^2 + c^2\kappa(t)\|p_S\|_0^2 = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{dt}(\mathbf{J}, \mathbf{v}_S)_0. \quad (5.53)$$

Remarque 3.3 Lorsque le domaine ω possède K coins rentrants, la solution s'exprimant suivant (5.18), on ajoute à l'espace des fonctions test V_R les K fonctions $(\mathbf{v}_S^i)_{1 \leq i \leq K}$. La formulation variationnelle (5.52) devient alors, pour $\mathbf{F} \in V_R$

Trouver $\mathbf{E}_R \in V_R$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{E}_R, \mathbf{F}_R)_0 + c^2(\operatorname{rot} \mathbf{E}_R, \operatorname{rot} \mathbf{F}_R)_0 = & -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{dt}(\mathbf{J}, \mathbf{F}_R)_0 \\ & - \sum_{1 \leq j \leq K} \kappa_j''(t)(\mathbf{v}_S^j, \mathbf{F}_R)_0, \quad \forall \mathbf{F}_R \in V_R. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Ce système fait apparaître les K inconnues supplémentaires $(\kappa_j''(t))_{1 \leq j \leq K}$. On lui adjoint donc K équations, obtenues en prenant comme fonctions test les K fonctions $\mathbf{v}_S^i$. On a alors, en utilisant l'orthogonalité de $(\operatorname{rot} \mathbf{v}_S^i)_{1 \leq i \leq K}$ et $\operatorname{rot} \mathbf{F}_R$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{E}_R, \mathbf{v}_S^i)_0 + \sum_{1 \leq j \leq K} \kappa_j''(t)(\mathbf{v}_S^j, \mathbf{v}_S^i)_0 + c^2\kappa_i(t)(p_S^j, p_S^i)_0 = & -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{dt}(\mathbf{J}, \mathbf{v}_S^i)_0, \\ & 1 \leq i \leq K. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Discrétisation de la formulation (5.52-5.53)

On procède d'abord à la semi-discrétisation *en espace* du problème variationnel (5.52-5.53). On désigne par $V_R^h \subset V_R$ l'espace des fonctions test régulières, et par $\mathbf{E}^h(t) = \mathbf{E}_R^h(t) + \kappa(t)\mathbf{v}_S$ la solution discrète. On a

$$\mathbf{E}_R^h(t) = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{k=1,2} E_{k,R}^i \phi_k^i,$$

avec $(\phi_k^i)_{1 \leq i \leq N_h, 1 \leq k \leq 2}$ les fonctions de base de la méthode d'éléments finis. Ici, on discrétise un champ de vecteurs : on considère donc $\phi_1^i = (\lambda_i, 0)^T$ et $\phi_2^i = (0, \lambda_i)^T$, pour $1 \leq i \leq N_h$, avec $(\lambda^i)_{1 \leq i \leq N_h}$ les fonctions de base usuelles, i.e. scalaires. On suppose de plus que $\mathbf{v}_S$ est connue de manière exacte. La formulation variationnelle semi-discrétisée en espace s'écrit alors comme la formulation continue (5.52-5.53). Nous ne la réécrivons pas ici.

Remarque 3.4 *Nous présentons la formulation dans le cas d'une approximation interne $V_R^h \subset V_R$, pour simplifier la présentation. Cette hypothèse n'est pas nécessaire, et ne correspond d'ailleurs pas aux formulations mixtes présentées au chapitre 3, dans lesquelles on a dualisé les contraintes sur la divergence des champs. Dans ces conditions, les fonctions de l'espace d'approximation noté W_R^h ne sont plus à divergence nulle, et l'introduction du multiplicateur de Lagrange p^h (qui dualise la condition sur la divergence discrète $\operatorname{div} \mathbf{E}_R^h = 0$) ajoute un terme en $(p^h, \operatorname{div} \mathbf{F}_R)_0$ à la formulation variationnelle. Enfin, la perte de l'orthogonalité entre V_S et W_R^h (puisque $W_R^h \not\subset V_R$) entraîne l'apparition d'un terme supplémentaire a priori non nul dans la formulation (5.52), du type $(\operatorname{rot} \mathbf{v}_S, \operatorname{rot} \mathbf{w}_R^h)_0$ pour $\mathbf{w}_R^h \in W_R^h$, dont l'approximation numérique ne pose pas de difficulté supplémentaire.*

Avancement en temps du schéma

La formulation (5.52) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{M}_\omega \vec{\mathbf{E}}_R + c^2 \mathbb{R}_\omega \vec{\mathbf{E}}_R = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{dt} \mathbb{M}_\omega \vec{\mathbf{J}} - \kappa''(t) \vec{\Lambda}, \quad (5.56)$$

où $\mathbb{M}_\omega$ désigne la matrice de masse, $\mathbb{R}_\omega$ la matrice rotationnelle, et $\vec{\Lambda}$ le vecteur obtenu en intégrant sur ω la fonction $\mathbf{v}_S$ contre l'ensemble des fonctions de base (ϕ^i) de V_R^h .

NB. On a des identifications du type $(\mathbf{E}_R^h, \mathbf{v}_S)_0 = (\vec{\mathbf{E}}_R | \vec{\Lambda})$, par définition de $\vec{\mathbf{E}}_R$ et $\vec{\Lambda}$, et ainsi de suite...

Comme $\mathbf{v}_S$ est singulière, ce calcul doit se faire avec précision au voisinage du coin rentrant. Nous détaillerons ce point un peu plus loin.

A partir de l'équation scalaire (5.53), on exprime $\kappa''(t)$ par

$$\kappa''(t) = \frac{1}{\|\mathbf{v}_S\|_0^2} \left(-\frac{1}{\varepsilon_0} (\vec{\mathbf{J}} | \vec{\Lambda}) - c^2 \|p_S\|_0^2 \kappa(t) - (\vec{\mathbf{E}}_R'' | \vec{\Lambda}) \right) \quad (5.57)$$

où ' désigne la dérivée première par rapport au temps, et on substitue cette expression dans le système (5.56). On obtient

$$\mathbb{M}_\omega \vec{\mathbf{E}}_R'' + c^2 \mathbb{R}_\omega \vec{\mathbf{E}}_R = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbb{M}_\omega \vec{\mathbf{J}} + \frac{1}{\|\mathbf{v}_S\|_0^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} (\vec{\mathbf{J}} | \vec{\Lambda}) + c^2 \|p_S\|_0^2 \kappa(t) + (\vec{\mathbf{E}}_R'' | \vec{\Lambda}) \right) \vec{\Lambda}, \quad (5.58)$$

qui est implicite en $\vec{\mathbf{E}}_R''$. Après discrétisation *en temps* de cette expression par un schéma explicite du second ordre (saute-mouton), on obtient

$$\mathbb{M}_\omega \vec{\mathbf{E}}_R^{n+1} - \frac{1}{\|\mathbf{v}_S\|_0^2} (\vec{\mathbf{E}}_R^{n+1} | \vec{\Lambda}) \vec{\Lambda} = \vec{\mathbf{G}}^n, \quad (5.59)$$

où la notation X^n (resp. X^{n+1}) désigne une variable X à l'instant $t^n = n\Delta t$ (resp. $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$), avec Δt le pas de temps, et $\vec{\mathbf{G}}^n = (\vec{\mathbf{G}}_x^n, \vec{\mathbf{G}}_y^n)^T$ l'ensemble des quantités connues

à l'instant n . On pose

$$\vec{U} := \frac{1}{\|\mathbf{v}_S\|_0^2} \vec{\Lambda}$$

de sorte que (5.59) peut s'écrire

$$(\mathbb{M}_\omega - \vec{U} \vec{\Lambda}^T) \vec{E}_R^{n+1} = \vec{G}^n. \quad (5.60)$$

On peut facilement résoudre ce système par exemple à l'aide de la formule d'inversion suivante (voir [42])

$$(\mathbb{M}_\omega - \vec{U} \vec{\Lambda}^T)^{-1} = \mathbb{M}_\omega^{-1} + \mathbb{M}_\omega^{-1} \vec{U} (\mathbb{I} - \vec{\Lambda}^T \mathbb{M}_\omega^{-1} \vec{U})^{-1} \vec{\Lambda}^T \mathbb{M}_\omega^{-1}, \quad (5.61)$$

qui ne nécessite, comparé à la résolution du système obtenu sans traitement des singularités, soit $\mathbb{M}_\omega \vec{E}_R^{n+1} = \vec{G}^n$, que l'inversion supplémentaire de la "matrice" $(\mathbb{I} - \vec{\Lambda}^T \mathbb{M}_\omega^{-1} \vec{U})$, qui est ici un scalaire! Rappelons que la matrice de masse $\mathbb{M}_\omega$ que nous utilisons est diagonalisée à l'aide d'une formule de quadrature (voir la sous-section 3.5.3), ce qui a été d'ailleurs un critère important dans le choix de la méthode de résolution des équations de Maxwell instationnaires, de sorte que la formule (5.61) est très facile à utiliser numériquement.

Remarque 3.5 1. Lorsque le domaine ω possède K coins rentrants, on obtient une expression analogue à (5.60) et $(\mathbb{I} - \vec{\Lambda}^T \mathbb{M}_\omega^{-1} \vec{U})$ est une matrice de taille $K \times K$, puisque $\vec{\Lambda}$ et $\vec{U}$ sont cette fois des matrices de taille $2N_h \times K$. Ce système apparaît donc comme une perturbation de rang K du système obtenu sans prendre en compte les singularités.

2. Pour ω ne possédant qu'un seul coin rentrant, le système d'équations (5.59) peut s'écrire pour chaque ligne i , sous la forme générale :

$$A_i X_i - \sum_j B_j X_j = F_i,$$

dont on peut obtenir, après quelques manipulations algébriques, une expression de la solution X_i donnée par :

$$X_i = \frac{F_i (1 - \sum_j \frac{B_j}{A_j}) + \sum_j \frac{B_j}{A_j} F_j}{A_i (1 - \sum_j \frac{B_j}{A_j})}.$$

Une fois calculée la valeur de $\vec{E}_R^{n+1}$, on en déduit facilement, à chaque pas de temps, la valeur de $\kappa^{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \kappa(t^{n+1})$, à l'aide d'une discrétisation en temps de l'équation différentielle (5.57). Pour des raisons pratiques, on utilise aussi le schéma saute-mouton. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \kappa^{n+1} = & 2\kappa^n - \kappa^{n-1} - c^2 \Delta t^2 \frac{\|p_S\|_0^2}{\|\mathbf{v}_S\|_0^2} \kappa^n \\ & - \frac{(\vec{E}_R^{n+1} - 2\vec{E}_R^n + \vec{E}_R^{n-1} | \vec{\Lambda})}{\|\mathbf{v}_S\|_0^2} - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \|\mathbf{v}_S\|_0^2} (\vec{J}^{n+1/2} - \vec{J}^{n-1/2} | \vec{\Lambda}). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Remarque 3.6 En termes de mise en œuvre informatique, la prise en compte des singularités par cette méthode ne génère que les modifications suivantes :

1. l'ajout dans la formulation classique (5.56) du terme en $\kappa''(t) \vec{\Lambda}$, et donc l'utilisation de la méthode d'inversion,
2. la résolution (quasi-immédiate) de l'équation supplémentaire (5.62).

3.4 Quelques détails d'intégration numérique

Pour conclure cette Section, nous allons présenter succinctement le principe du calcul des coefficients $\|p_S\|_0^2$ et $\|\mathbf{v}_S\|_0^2$ qui interviennent dans l'expression de la constante β et de l'équation différentielle, ainsi que pour le calcul de $\vec{\Lambda}$.

1. Calcul de $\|p_S\|_0^2$ et de $\|\mathbf{v}_S\|_0^2$

Pour le calcul de $\|p_S\|_0^2$, on décompose p_S en partie régulière $\tilde{p}$ et partie principale p_p , suivant (5.31), de sorte que l'intégrale sur ω de p_S^2 s'écrit

$$\|p_S\|_0^2 = \int_{\omega} (\tilde{p} + p_p)^2 d\omega = \int_{\omega} \tilde{p}^2 d\omega + 2 \int_{\omega} \tilde{p} p_p d\omega + \int_{\omega} p_p^2 d\omega.$$

En utilisant la représentation discrète $\tilde{p}_h = \sum_{i=1}^{N_h} \tilde{p}_i \lambda_i$ pour $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N_h}$ fonctions de base de V_h , on a alors

$$\|p_S^h\|_0^2 = \sum_{i,j=1}^{N_h} \tilde{p}_i \tilde{p}_j (\lambda_i, \lambda_j)_0 + 2 \sum_{j=1}^{N_h} \tilde{p}_j (p_p, \lambda_j)_0 + \int_{\omega} r^{-2\alpha} \cos^2(\alpha\theta) d\omega.$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$\|p_S^h\|_0^2 = (\mathbb{M}_{\omega} \vec{p} | \vec{p}) + 2(\vec{S} | \lambda_i) + \int_{\omega} r^{-2\alpha+1} \cos^2(\alpha\theta) dr d\theta, \quad (5.63)$$

où $\vec{S}$ est le vecteur obtenu en intégrant sur ω la partie principale p_p contre l'ensemble des fonctions de base (λ_j) de V_h . Tous ces termes peuvent se calculer numériquement. Le premier terme ne pose pas de difficulté particulière. Comme p_p est singulier, le calcul de $\vec{S}$ doit se faire avec précision, au même titre que celui de $\vec{\Lambda}$. Le dernier nécessite également un calcul précis au moins au voisinage du coin rentrant. Une même formule peut être utilisée pour traiter ces 3 cas. C'est l'objet du point 2.

Le calcul de $\|\mathbf{v}_S\|_0^2$ se fait suivant les mêmes principes.

2. Calcul de $\vec{\Lambda}$ et de $\vec{S}$

Les quantités $\vec{\Lambda}$ et $\vec{S}$ ne dépendant pas du temps, elles peuvent être calculées une fois pour toutes. Pour $\vec{\Lambda}$, on décompose (comme pour le calcul de $\|p_S^h\|_0^2$ ci-dessus) $\mathbf{v}_S^h$ en parties régulière $\tilde{\mathbf{v}}_h$ et partie principale $\mathbf{v}_p$, suivant (5.47), de sorte que, pour une fonction de base ϕ_i donnée, $(\mathbf{v}_S^h, \phi_i)_0$ s'écrit

$$(\mathbf{v}_S^h, \phi_i)_0 = (\vec{\mathbf{v}}, \phi_i)_0 + \beta_h (\mathbf{v}_p, \phi_i)_0.$$

En utilisant la représentation discrète de $\vec{\mathbf{v}}$ (où $\vec{\mathbf{v}}$ désigne le vecteur associé à la partie régulière $\tilde{\mathbf{v}}_h$) sur l'ensemble des fonctions de base ϕ_i , on a alors

$$\vec{\Lambda} = \mathbb{M}_{\omega} \vec{\mathbf{v}} + \beta_h \vec{\Lambda}_S$$

où $\vec{\Lambda}_S$ est le vecteur obtenu en intégrant sur ω la fonction $\mathbf{v}_p$ contre l'ensemble des fonctions ϕ_i . Le premier terme se calcule facilement.

Pour le calcul de $\vec{S}$ et $\vec{\Lambda}_S$, on utilise les expressions analytiques des parties principales p_p (5.31) et $\mathbf{v}_p$ (5.43) dans une formule d'intégration numérique. Pour ce faire, on fait appel à une formule de quadrature de Gauss exacte à l'ordre 5, construite sur 7 points par triangle (cf. par exemple [70]), dont aucun n'est situé sur les arêtes ou les sommets des triangles. Cette formule ne nécessite donc pas la valeur des fonctions singulières au coin rentrant, qui sont infinies !

4 Le cas d'une condition aux limites de Silver-Müller

On suppose dans cette section que seule une partie γ_C de la frontière γ est un conducteur parfait. Sur l'autre partie, notée γ_A , on modélise une condition d'ondes entrantes ou absorbantes (voir chapitre 3). Dans le cas que nous avons choisi de présenter ici, c'est-à-dire données et champs indépendants de z , cette condition s'écrit en dimension 2 sur le système en $(\mathbf{E}, B)$:

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} + cB = \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{sur } \gamma_A. \quad (5.64)$$

$\mathbf{g}$ est dû ici à une onde incidente, qui est un champ donné "suffisamment" régulier, défini sur γ_A , ou $\mathbf{g} = 0$ pour une condition absorbante.

Remarque 4.1 *Sans restreindre la généralité, on peut toujours choisir la position de la frontière artificielle γ_A de sorte qu'elle n'intersecte pas la singularité géométrique. Autrement dit, il existe un voisinage du coin rentrant $\mathcal{V}_c$ tel que $\mathcal{V}_c \cap \gamma_A = \emptyset$. Cette hypothèse permet de montrer que la trace tangentielle de $\mathbf{E}$ sur le bord γ_A , $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} := cB + \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau}$ est régulière. Elle appartient à $H^{1/2}$ arête par arête de γ_A , et se recolle en zéro en chaque extrémité (i.e. les points composant $\overline{\gamma}_A \cap \overline{\gamma}_C$) qui n'est pas un coin de $\partial\omega$: on note cette propriété $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\gamma_A} \in H_{\perp}^{1/2}(\gamma_A)$, cf. [19].*

On désigne dans ce cas par W l'espace des solutions défini par

$$W = \{\mathbf{E} \in H(\text{rot}, \omega), \text{div } \mathbf{E} = 0, \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\gamma_C} = 0, \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\gamma_A} \in H_{\perp}^{1/2}(\gamma_A)\}. \quad (5.65)$$

De même que dans le cas où toute la frontière est conducteur parfait, W n'est pas inclus dans $H^1(\omega)^2$. On introduit donc l'espace régularisé W_R de W :

$$W_R = W \cap H^1(\omega)^2 = \{\mathbf{E} \in H^1(\omega)^2, \text{div } \mathbf{E} = 0, \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\gamma_C} = 0\}. \quad (5.66)$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 3 sous-section 3.5.2, la prise en compte de cette condition fait apparaître dans la formulation variationnelle, des termes intégraux supplémentaires sur la frontière γ_A , et le problème à résoudre s'écrit :

Trouver $\mathbf{E}(t) \in W$ tel que

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{E}, \mathbf{F})_0 + c \frac{d}{dt} \int_{\gamma_A} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\sigma + c^2(\text{rot } \mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{F})_0 \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \mathbf{F} \right)_0 + c \frac{d}{dt} \int_{\gamma_A} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\sigma \quad \forall \mathbf{F} \in W, \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \text{ dans } \omega, \quad (5.68)$$

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\gamma_C} = 0. \quad (5.69)$$

4.1 Décomposition de la solution en parties régulière et singulière

La singularité étant de nature géométrique, on choisit de garder le même espace V_S de solutions singulières. Ainsi, on peut montrer (voir [37]) que l'espace des solutions W se décompose en

$$W = W_R \oplus V_S, \quad (5.70)$$

avec W_R défini par (5.66), et V_S précédemment introduit. Dans ce cas, la décomposition n'est plus orthogonale, mais elle est cependant préférable à une décomposition orthogonale, car elle permet d'utiliser comme fonction test $\mathbf{v}_S$, base de V_S , qui ne dépend pas du temps, et dont le calcul est effectué une fois pour toutes (voir la remarque ci-dessous).

Remarque 4.2 1. La perte de l'orthogonalité n'a que peu de conséquence d'un point de vue numérique. Elle fait apparaître dans la formulation finale deux termes supplémentaires que nous détaillerons plus loin.

2. On pourrait aussi décomposer W en $W = V_R \oplus V_S \oplus V_A$ (en particulier $\mathbf{v}_R \in V_R$ est tel que $\mathbf{v}_R \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\gamma} = 0$), et V_A se caractérisant comme l'ensemble des solutions du problème elliptique (cf. [37]) :

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_A = \mathbf{C} \text{ste dans } \omega, \quad (5.71)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_A = 0 \text{ dans } \omega, \quad (5.72)$$

$$\mathbf{v}_A \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \gamma_C, \quad (5.73)$$

$$\mathbf{v}_A \cdot \boldsymbol{\tau} = cB(t) + \mathbf{g}(t) \cdot \boldsymbol{\tau} \text{ sur } \gamma_A. \quad (5.74)$$

Avec cette décomposition, le terme non nul $(\operatorname{rot} \mathbf{w}_R, \operatorname{rot} \mathbf{v}_S)_0$, pour $\mathbf{w}_R \in W_R$ et $\mathbf{v}_S \in V_S$ se réduit à $(\operatorname{rot} \mathbf{v}_A, \operatorname{rot} \mathbf{v}_S)_0$, ce qui met en évidence que W_R est "presque" orthogonale à V_S . Cependant, l'utilisation dans une méthode numérique d'une telle décomposition nécessiterait le calcul de $\mathbf{v}_A$ à chaque pas de temps, et rendrait la méthode numérique très coûteuse.

Avec cette décomposition, et en notant encore $\mathbf{E}_R(t)$ la partie régulière de la solution appartenant à W_R , la formulation analogue à (5.52) s'écrit,

Trouver $\mathbf{E}_R \in W_R$ tel que

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{E}_R, \mathbf{F}_R)_0 + c \frac{d}{dt} \int_{\gamma_A} \mathbf{E}_R \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}_R \cdot \boldsymbol{\tau} d\sigma + c^2(\operatorname{rot} \mathbf{E}_R, \operatorname{rot} \mathbf{F}_R)_0 + c^2 \kappa(t)(p_S, \operatorname{rot} \mathbf{F}_R)_0 \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{dt}(\mathbf{J}, \mathbf{F}_R)_0 + c \frac{d}{dt} \int_{\gamma_A} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}_R \cdot \boldsymbol{\tau} d\sigma - \kappa''(t)(\mathbf{v}_S, \mathbf{F}_R)_0, \quad \forall \mathbf{F}_R \in W_R, \end{aligned} \quad (5.75)$$

où le seul terme supplémentaire dû à la non-orthogonalité est $c^2 \kappa(t)(p_S, \operatorname{rot} \mathbf{F}_R)_0$.

On ajoute aussi une équation pour calculer la fonction $\kappa(t)$, obtenue de même en prenant $\mathbf{v}_S$ comme fonction test. On a alors :

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{E}_R, \mathbf{v}_S)_0 + \kappa''(t)\|\mathbf{v}_S\|_0^2 + c^2(\operatorname{rot} \mathbf{E}_R, p_S)_0 + c^2 \kappa(t)\|p_S\|_0^2 = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{dt}(\mathbf{J}, \mathbf{v}_S)_0. \quad (5.76)$$

Dans ce cas, le terme dû à la non-orthogonalité est $c^2(\operatorname{rot} \mathbf{E}_R, p_S)_0$. Il est intéressant de noter qu'il n'y a pas de termes sur γ_A dans l'équation (5.76), puisque $\mathbf{v}_S \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\gamma_A} = 0$. C'est aussi un des intérêts de la décomposition retenue.

Il reste alors à semi-discrétiser en espace la formulation (5.75-5.76), ce qui se fait sans difficulté particulière par rapport au cas où toute la frontière est un conducteur parfait. Après discrétisation en temps par un schéma explicite, on vérifie que les termes supplémentaires sont connus à l'instant n pour le calcul de $\mathbf{E}_R^{n+1}$. Le schéma peut alors s'écrire sous une forme analogue à (5.56), et le même algorithme peut être utilisé pour la résolution.

5 Résultats numériques

Nous concluons ce chapitre par quelques exemples de résolution numérique de problèmes-test. De manière générale, notons que la place mémoire supplémentaire, nécessaire au traitement des singularités, est négligeable, et que le temps nécessaire au calcul initial d'une base de V_S , et à la résolution à chaque pas de temps de l'équation supplémentaire, induite par la méthode, est minime.

5.1 Calcul numérique de la partie singulière

Nous allons construire un cas-test pour lequel on sait déterminer des solutions analytiques p_s^a , ϕ_S^a et $\mathbf{v}_S^a$. Pour cela, on considère un domaine ω constitué de $3/4$ de cercle, centré en l'origine, de rayon R_e , dont la frontière présente un coin rentrant d'angle $\beta = 3\pi/2$.

Remarque 5.1 *Le domaine ω n'est pas polygonal. Cependant, les résultats des sections précédentes restent valables, puisque ω est convexe au voisinage des points non réguliers autres que le coin rentrant. De plus, le maillage constitue une approximation polygonale de ω .*

Pour exhiber une solution analytique du problème (5.24-5.25), on se place en géométrie radiale (r, θ) centrée sur le coin rentrant, et on cherche une solution sous la forme

$$p_S^a(r, \theta) = \sum_{n \geq -1} A_n r^{n\alpha} \cos(n\alpha\theta) \quad (5.77)$$

avec A_{-1} arbitraire (fixé égal à 1). La valeur $A_0 \beta \frac{R_e^2}{2}$ étant la moyenne de p_S , $p_S \in L_0^2(\omega)$ entraîne $A_0 = 0$. On calcule A_1 en imposant la condition aux limites $\partial p_S^a / \partial \nu(R_e, \theta) = 0$ sur le bord extérieur, ce qui entraîne $A_1 = A_{-1} R_e^{-2\alpha}$. L'unicité de la solution nous permet de conclure que $A_n = 0$, $\forall n \geq 2$.

On peut de la même façon chercher une solution ϕ_S^a de (5.29-5.30) sous la forme (5.90), soit

$$\phi_S^a = - \sum_{n \geq 1} \frac{B_n}{n\alpha} r^{n\alpha} \cos(n\alpha\theta) - \sum_{n \geq -1, n \neq 0} \frac{A_n}{4n\alpha + 4} r^{n\alpha+2} \cos(n\alpha\theta),$$

et calculer B_1 de sorte que la condition aux limites $\partial \phi_S^a / \partial \nu(R_e, \theta) = 0$ sur le bord extérieur soit vérifiée. On obtient $B_1 = \frac{\alpha-2}{4\alpha-4} A_{-1} R_e^{2-2\alpha} + \frac{\alpha+2}{4\alpha+4} A_1 R_e^2$. Puisqu'il y a unicité de la solution, on déduit que $B_n = 0$, $\forall n \geq 2$.

Enfin, A_n et B_n étant désormais connus (en fait seuls A_{-1} , A_1 et B_1 sont non nuls) on peut vérifier que l'expression $\mathbf{v}_S^c$ donnée par (5.96) pour ces valeurs de A_{-1} , A_1 et B_1 est bien la solution $\mathbf{v}_S^a$ recherchée.

Nous avons représenté sur la figure 5.3 les solutions analytiques et calculées (à la même échelle). En ce qui concerne la représentation graphique, nous avons choisi d'exclure le nœud singulier de la représentation plutôt que de tronquer la valeur infinie en ce nœud, afin de ne pas "écraser" l'image par une valeur arbitrairement grande.

Sur la figure 5.3-a, on constate que la méthode permet bien de calculer $\mathbf{v}_S \in V_S$, ce qu'une méthode d'éléments finis classique P_1 conforme ne permet pas de faire. Sur la figure 5.3-b, on peut vérifier que la méthode est également efficace pour le terme le plus singulier, ce qu'une méthode d'éléments finis d'arête (conforme dans $H(\text{rot}, \omega)$) ne permet pas d'appréhender aisément. Enfin, avec le résultat du calcul de la fonction ϕ (voir figure 5.3-c), qui est régulière ($\phi \in H^{1+\alpha-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$), on vérifie le bon comportement de cette méthode pour une solution régulière.

5.2 Cas d'évolution

Dans cette section, nous présentons les résultats de deux cas-test, représentatifs de problèmes d'électromagnétisme. Le premier cas consiste à calculer les champs électromagnétiques induits par un courant, dont les caractéristiques spatiales et temporelles évoquent l'effet d'un

faisceau de particules. Le second cas concerne l'étude d'une onde guidée dans un type de géométrie fréquemment rencontrée, par exemple dans des dispositifs hyperfréquences.

Exemple avec un courant $\mathbf{J}$

On considère un domaine ω en forme de "L", dont la géométrie est représentée sur la figure 5.4. On impose sur la frontière une condition aux limites de conducteur parfait. Les conditions initiales sur le champ électromagnétique sont identiquement nulles. L'onde électromagnétique est générée par un courant $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = (J_x, J_y)^T$, dont le support est représentée sur cette même figure, avec $(J_x, J_y) = (0, 10 \sin(\zeta t))$, où ζ désigne la pulsation associée à la fréquence de $2,5 \cdot 10^9$ Hertz.

Ce courant est la source d'une onde qui va se propager dans le sens des x positifs et négatifs. Physiquement, pour une donnée initiale identiquement nulle, le champ solution reste régulier tant que l'onde n'a pas atteint le coin rentrant, ce qui définit un instant t_s . En d'autres termes, si on écrit

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_R(\mathbf{x}, t) + \kappa(t) \mathbf{v}_S(\mathbf{x}),$$

$\kappa(t)$ reste nulle pour tout temps t inférieur à un temps t_s , et $\mathbf{E}_R(\mathbf{x}, t)$ coïncide avec $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$. Par contre, pour $t > t_s$, $\kappa(t) \neq 0$, et $\mathbf{v}_S(\mathbf{x})$ étant à support dans tout le domaine ω , on a $\kappa(t) \mathbf{v}_S \neq 0$. Cependant, on souhaite obtenir le comportement physiquement évident suivant : le champ en un point $\mathbf{x}$ et à l'instant t est nul, pour tout temps $t < t_{\mathbf{x}}$, où $t_{\mathbf{x}}$ désigne le temps mis par l'onde pour atteindre le point $\mathbf{x}$.

On vérifie alors (voir figure 5.5) que $\mathbf{E}_R(\mathbf{x}, t)$ devient non nulle et "compense" la valeur $\kappa(t) \mathbf{v}_S(\mathbf{x})$, soit $\mathbf{E}_R(\mathbf{x}, t) = -\kappa(t) \mathbf{v}_S(\mathbf{x})$, de sorte que $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ reste effectivement nulle tant que $t_s < t < t_{\mathbf{x}}$.

Un cas de guide d'ondes

Dans ce dernier exemple, nous présentons l'étude de la propagation d'une onde TEM dans une géométrie singulière. Ce cas permet d'illustrer le bon comportement de la méthode avec une formulation plus complète, c'est-à-dire avec différents types de conditions aux limites sur le bord et plusieurs coins rentrants. On considère un guide d'onde "en T", dont la géométrie et les données sont invariantes suivant la direction z . Ainsi, le domaine de calcul se réduit à une coupe transversale de ce guide (voir figure 5.6).

Une onde incidente pénètre dans le guide par la frontière γ_A^1 (bord gauche), et en sort par la frontière γ_A^2 (bord droit). La condition aux limites sur γ_A s'exprime ici par

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} - cB = g, \quad g(t)|_{\gamma_A^1} = C \sin(\zeta t), \quad g(t)|_{\gamma_A^2} = 0, \quad (5.78)$$

où C désigne une constante et ζ est associée à la fréquence $2,5 \cdot 10^9$ Hertz. A l'instant initial, le champ électromagnétique à l'intérieur du guide est identiquement nul. Comme dans le cas précédent, le champ est régulier tant que l'onde incidente n'a pas atteint le premier coin rentrant, puis devient singulier.

Le résultat obtenu par une méthode d'éléments finis nodal sans traitement des singularités est représenté sur la figure 5.6 (image de droite), et montre une solution peu vraisemblable, avec une erreur sur la solution qualitativement très importante.

Nous avons ensuite effectué ce même calcul, mais avec la *méthode du complément singulier* qui prend en compte la singularité. La même figure 5.6 représente des isovalues du champ électrique obtenu après 1000 pas de temps.

On constate sur ce cas-test également que la méthode proposée permet effectivement de capturer la singularité, et ce avec une très bonne précision, y compris dans un voisinage du coin rentrant.

Annexe : méthode Dirichlet-Neumann

Nous décrivons ici une seconde méthode numérique de calcul d'une base de $V_S, \mathbf{v}_S$. L'algorithme reste semblable à celui de la section 3.2, c'est-à-dire que nous passons toujours par les étapes intermédiaires du calcul d'une base de N, p_S , puis de ϕ_S , l'antécédent de p_S par l'isomorphisme $-\Delta$.

Première étape : Calcul de p_S Afin de tirer parti le plus possible de la connaissance de l'expression *locale* (dans un voisinage du coin rentrant) des singularités, il est intéressant de construire les algorithmes de calcul à partir d'une méthode de décomposition de domaine [6]. Avec cette approche, on obtient une expression explicite de p_S au voisinage du coin rentrant. En dehors de ce voisinage, p_S est régulière (ie. de régularité au moins H^1), on peut donc utiliser une formulation variationnelle pour la déterminer. De plus, la connaissance explicite de p_S permet de conserver l'orthogonalité entre les parties régulière et singulière de la solution.

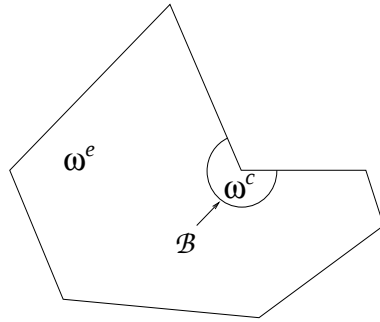


FIG. 5.2 – Le voisinage du coin rentrant et le domaine ω^e .

On considère le domaine ω représenté sur la figure 5.1, qui possède un coin rentrant, composé localement de deux segments de droite se rencontrant en un point selon un angle $\beta = \pi/\alpha$, avec $\alpha \in]1/2, 1[$. On introduit une partition de ω en ω^c et ω^e , où ω^c désigne un secteur angulaire de rayon R , centré sur le coin rentrant, et ω^e l'ouvert tel que $\omega^c \cap \omega^e = \emptyset$ et $\overline{\omega^c} \cup \overline{\omega^e} = \overline{\omega}$. Enfin on note γ^c (resp. γ^e) la frontière de ω^c (resp. ω^e), que l'on décompose en $\mathcal{B} \cup \tilde{\gamma}^c$ (resp. $\mathcal{B} \cup \tilde{\gamma}^e$), où $\mathcal{B}$ est l'interface $\gamma^c \cap \gamma^e$. Dans la suite, on notera par un exposant c ou e la restriction d'une quantité à ω^c ou ω^e .

Première étape : Calcul d'une base de N Détaillons le processus de calcul de p_S . Il est divisé en *quatre étapes*. Les deux premières étapes sont "formelles" (mais justifiées mathématiquement) ; les deux suivantes permettent de calculer numériquement p_S .

Les étapes 1 et 2 consistent respectivement à construire une expression de p_S^c sous la forme d'une série, puis à déterminer les coefficients de la série en fonction de la trace de p_S^c sur l'interface, c'est-à-dire $p_{S|B}^c$, et enfin à calculer un opérateur de transfert sur $\mathcal{B}$.

Ces deux étapes permettent de poser le problème à résoudre dans ω^e pour pouvoir calculer p_S^e numériquement (étape 3). A partir de là, à l'étape 4, on calcule les coefficients de la série, en utilisant le raccord des trace sur l'interface ($p_{S|B}^c = p_{S|B}^e$), pour obtenir finalement une expression numérique de p_S^e .

1. Calcul de la solution locale p_S^c : que sait-on de la restriction de p_S à ω^c ?

$$p_S^c \in L^2(\omega^c), \quad \Delta p_S^c = 0 \text{ dans } \omega^c, \quad \frac{\partial p_S^c}{\partial \nu} \Big|_{\tilde{\gamma}^c} = 0.$$

En utilisant la méthode de séparation des variables (justifiée mathématiquement à partir de la régularité de p_S , rappelée à la proposition 3.1), on détermine analytiquement la solution

locale singulière au voisinage du coin rentrant. On obtient, en coordonnées polaires centrées sur le coin rentrant, i.e. $0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \beta$,

$$p_S^c(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n r^{n\alpha} \cos(n\alpha\theta) = A_0 + \sum_{n>0} (A_{-n} r^{-n\alpha} + A_n r^{n\alpha}) \cos(n\alpha\theta).$$

Par ailleurs, on sait que les fonctions $\theta \mapsto \cos(n\alpha\theta)$ sont deux à deux orthogonales sur $]0, \beta[$; en effet, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\int_0^\beta \cos(m\alpha\theta) \cos(n\alpha\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \beta/2 & \text{si } m = n \in \mathbb{N}^* \\ \beta & \text{si } m = n = 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\omega^c} p_S^c(r, \theta)^2 d\omega &= \int_0^R \int_0^\beta \left(A_0 + \sum_{n>0} (A_{-n} r^{-n\alpha} + A_n r^{n\alpha}) \cos(n\alpha\theta) \right)^2 r dr d\theta \\ &= \frac{\beta}{2} \left[A_0^2 R^2 + \sum_{n>0} \int_0^R (A_{-n} r^{-n\alpha} + A_n r^{n\alpha})^2 r dr \right]. \end{aligned}$$

Comme p_S^c est un élément de $L^2(\omega^c)$, on en déduit immédiatement que tous les termes de la série sont nécessairement bornés. Or, on peut vérifier à partir d'un calcul élémentaire, que ceci implique que $A_{-n} = 0$, pour tout $n > 1$. Au final,

$$p_S^c(r, \theta) = \sum_{n \geq -1} A_n r^{n\alpha} \cos(n\alpha\theta). \quad (5.79)$$

Remarque A.1 Si $A_{-1} = 0$, tous les termes se trouvent appartenir à $H^1(\omega^c)$, et on peut en déduire que p_S^c est de régularité H^1 au voisinage du coin rentrant. Dans la suite, nous allons supposer que A_{-1} est non nul, et nous verrons en conclusion de ce qui se passe, si tel n'est pas le cas...

Comme on l'a remarqué, les termes de la série sont deux à deux orthogonaux (sauf pour $n = \pm 1$), lorsqu'on les intègre le long de l'interface $\mathcal{B}$. Chacun des A_n s'exprime donc sous forme intégrale à partir de p_S^c :

$$A_0 = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\beta p_S^c(R, \theta) d\theta, \quad (5.80)$$

$$A_1 = \frac{2\alpha}{\pi} R^{-\alpha} \int_0^\beta p_S^c(R, \theta) \cos(\alpha\theta) d\theta - R^{-2\alpha} A_{-1}, \quad (5.81)$$

$$A_n = \frac{2\alpha}{\pi} R^{-n\alpha} \int_0^\beta p_S^c(R, \theta) \cos(n\alpha\theta) d\theta, \quad \forall n \geq 2. \quad (5.82)$$

NB. Ci-dessus, A_1 est calculé en fonction de A_{-1} .

2. Calcul de l'opérateur *capacité* T , qui à $p_S^c|_{\mathcal{B}}$ associe $\frac{\partial p_S^c}{\partial \nu^c|_{\mathcal{B}}}$:

On désigne par ν^c la normale unitaire sortante à ω^c . D'après (5.80-5.82), on définit alors l'opérateur capacité par dérivation terme à terme de la série, ce qui donne

$$T(p_S^c) = \frac{2\alpha^2}{\pi R} \sum_{n \geq 1} n \left\{ \int_0^\beta p_S^c(R, \theta') \cos(n\alpha\theta') d\theta' \right\} \cos(n\alpha\theta) - 2\alpha \frac{A_{-1}}{R^{\alpha+1}} \cos(\alpha\theta). \quad (5.83)$$

Ensuite, on isole le terme qui dépend de A_{-1} , puisque l'on a vu que les coefficients sont tous déterminés par la donnée de $p_S^c|_{\mathcal{B}}$ et de A_{-1} . En notant T_1 le premier terme du membre de droite, on a

$$T(p_S^c) = T_1(p_S^c) - 2\alpha \frac{A_{-1}}{R^{\alpha+1}} \cos(\alpha\theta). \quad (5.84)$$

3. Résolution du problème extérieur en p_S^e : que sait-on de la restriction de p_S à ω^e ?

$$p_S^e \in H^1(\omega^e), \Delta p_S^e = 0 \text{ dans } \omega^e, \frac{\partial p_S^e}{\partial \nu}|_{\tilde{\gamma}^e} = 0.$$

Pour pouvoir caractériser p_S^e , il reste à obtenir une condition aux limites sur l'interface $\mathcal{B}$. Comme p_S est de régularité H^1 hors de tout voisinage du coin rentrant, et donc dans un voisinage de $\mathcal{B}$, et comme Δp_S appartient à $L^2(\omega)$, on en déduit² les conditions de transmission $p_{S|B}^e = p_{S|B}^c$ et $\frac{\partial p_S^e}{\partial \nu^e}|_{\mathcal{B}} = \frac{\partial p_S^c}{\partial \nu^c}|_{\mathcal{B}}$. On obtient alors la condition aux limites sur $\mathcal{B}$ pour le problème extérieur, posé dans ω^e . En notant ν^e la normale unitaire sortante à ω^e , le problème devient

Trouver $p_S^e \in H^1(\omega^e)/\mathbb{R}$ tel que

$$\Delta p_S^e = 0 \text{ dans } \omega^e, \quad (5.85)$$

$$\frac{\partial p_S^e}{\partial \nu^e}|_{\tilde{\gamma}^e} = 0, \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial p_S^e}{\partial \nu^e} + T_1(p_S^e) = 2\alpha \frac{A_{-1}}{R^{\alpha+1}} \cos(\alpha\theta) \text{ sur } \mathcal{B}, \quad (5.87)$$

qui s'écrit sous forme variationnelle

$$\int_{\omega^e} \mathbf{grad} p_S^e \cdot \mathbf{grad} q \, d\omega + \int_{\mathcal{B}} T_1(p_S^e) q \, d\sigma = \frac{2\alpha A_{-1}}{R^{\alpha+1}} \int_{\mathcal{B}} \cos(\alpha\theta) q \, d\sigma, \quad \forall q \in H^1(\omega^e)/\mathbb{R}. \quad (5.88)$$

Comme la forme bilinéaire $(p, q) \mapsto \int_{\mathcal{B}} T_1(p) q \, d\sigma$ est symétrique positive, ce problème est bien posé, à A_{-1} fixé.

Pour résoudre numériquement le problème extérieur, on introduit un maillage triangulaire de ω^e . On discrétise l'espace $H^1(\omega^e)/\mathbb{R}$ à l'aide de l'élément fini de Lagrange P_1 . Pour lever l'indétermination sur les constantes, on fixe (arbitrairement) la valeur de p_h^e à zéro en un des sommets du bord. On note V_h^e le sous-espace de dimension N_h^e issu de cette discrétisation. On désigne par p_h^e la solution discrète qui s'écrit $p_h^e = \sum_{i=1}^{N_h^e} p_i \lambda_i$, où $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N_h^e}$ sont les fonctions de base de V_h^e . Après discrétisation, la formulation variationnelle (5.88) prend la forme matricielle suivante (avec des notations évidentes) :

$$(\mathbb{K}_{\omega^e} + \mathbb{T}_{\mathcal{B}}) \vec{p}_S^e = A_{-1} \vec{F}. \quad (5.89)$$

La matrice de rigidité $\mathbb{K}_{\omega^e}$ est une matrice creuse. Par contre, la matrice de transfert $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est pleine, mais étant définie sur l'interface $\mathcal{B}$, elle reste de petite taille.

4. Le calcul des $(A_n)_{n \geq 0}$ se fait simplement à partir des formules (5.80-5.82), à l'aide de la condition de transmission $p_{S|B}^e = p_{S|B}^c$. On reconstruit ainsi la solution dans tout l'ouvert. Mais pas au nœud singulier, qui se trouve sur le bord ; de toutes façons, la valeur limite de p_S est indéterminée en ce point, d'après l'expression (5.79).
5. Pour déterminer complètement la solution (connue à une constante près), on impose la condition $\int_{\omega} p_S \, d\omega = 0$, i.e. $\int_{\omega^e} p_S^e \, d\omega + \int_{\omega^c} p_S^c \, d\omega = 0$.

Remarque A.2 Si A_{-1} est nul, la solution de (5.88) est $p_S^e \equiv 0$. Et le calcul des coefficients $(A_n)_{n \geq 0}$ donne également un résultat nul. p_S est donc nul dans ce cas. C'est pourquoi on a supposé la non nullité de A_{-1} au départ.

Une autre façon de se rendre compte qu'il faut que A_{-1} soit non nul est que, dans le cas contraire, p_S appartient à $H^1(\omega)$, et qu'il est solution du problème de Neumann homogène (5.24)-(5.25). Il est donc normal de retrouver une solution nulle.

²Le lecteur intéressé par l'obtention de ce type de condition peut utiliser avec profit la technique de la sous-section 2.2.2 du chapitre 2.

Deuxième étape : Calcul d'une base de V_S

– Calcul de ϕ_S :

On résout tout d'abord le système (5.29-5.30), de façon semblable à ce que nous venons de voir pour p_S , sachant que cette fois, la solution est de régularité H^1 .

1. Expression de la solution locale ϕ_S^c : grâce aux résultats de régularité de la proposition 3.2, on peut appliquer la technique de séparation des variables, pour trouver

$$\phi_S^c = - \sum_{n \geq 1} \frac{B_n}{n\alpha} r^{n\alpha} \cos(n\alpha\theta) - \sum_{n \geq -1} \frac{A_n}{4n\alpha + 4} r^{n\alpha+2} \cos(n\alpha\theta). \quad (5.90)$$

La première somme correspond à la solution du problème de laplacien nul ; notons que la sommation ne comprend aucune indice négatif, puisque cette fois la régularité *minimale* est H^1 ; il n'y a pas non plus de terme constant, car sa valeur sera imposée par le fait que ϕ_S est à moyenne nulle. La seconde sommation exprime la dépendance par rapport à la décomposition de p_S^c (5.79). Les $(B_n)_{n \geq 1}$ peuvent être écrits en fonction de la trace de ϕ_S^c sur $\mathcal{B}$, soit :

$$n = 1 B_1 = - \frac{2\alpha^2}{\pi R^\alpha} \int_0^\beta \phi_S^c(R, \theta) \cos(\alpha\theta) d\theta - \left(\frac{\alpha}{4 - 4\alpha} A_{-1} R^{2-2\alpha} + \frac{\alpha}{4 + 4\alpha} A_1 R^2 \right), \quad (5.91)$$

$$n \geq 2 B_n = - \frac{2n\alpha^2}{\pi R^{n\alpha}} \int_0^\beta \phi_S^c(R, \theta) \cos(n\alpha\theta) d\theta - \frac{n\alpha}{4n\alpha + 4} A_n R^2. \quad (5.92)$$

2. L'opérateur capacité t est égal à :

$$t(\phi_S^c) = T_1(\phi_S^c) - \frac{1}{2} \int_0^R p_S^c(r, \theta) dr + \frac{\alpha}{2 - 2\alpha} A_{-1} R^{1-\alpha} \cos(\alpha\theta). \quad (5.93)$$

3. Le problème extérieur en ϕ_S^e est équivalent à la formulation variationnelle :
Trouver $\phi_S^e \in H^1(\omega^e)/\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} & \int_{\omega^e} \mathbf{grad} \phi_S^e \cdot \mathbf{grad} \psi d\omega + R \int_0^\beta T_1(\phi_S^e) \psi(R, \theta) d\theta = \\ & \int_{\omega^e} p_S^e \psi d\omega + \frac{1}{2} R \int_0^\beta \left\{ \int_0^R p_S^c(r, \theta) dr \right\} \psi(R, \theta) d\theta \\ & - \frac{\alpha}{2 - 2\alpha} A_{-1} R^{2-\alpha} \int_0^\beta \cos(\alpha\theta) \psi(R, \theta) d\theta, \quad \forall \psi \in H^1(\omega^e)/\mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.94)$$

La résolution du problème extérieur s'effectue en discrétisant la formulation (5.94). On note ϕ_h^e la solution discrétisée sur les fonctions de base de V_h^e , de sorte que $\phi_h^e = \sum_{i=1}^{N_h^e} f_i \lambda_i$ est solution du système matriciel suivant :

$$(\mathbb{K}_{\omega^e} + \mathbb{T}_{\mathcal{B}}) \vec{\Phi}_S^e = \mathbb{M}_{\omega^e} \vec{p}_S^e + A_{-1} \vec{G} \quad (5.95)$$

où $\mathbb{M}_{\omega^e}$ désigne la matrice de masse, c'est-à-dire la matrice associée au produit scalaire dans $L^2(\omega^e)$ (elle possède la même structure logique que $\mathbb{K}_{\omega^e}$, et elle est donc creuse). Ce système étant analogue à celui obtenu pour le calcul de $\vec{p}^e$, la programmation de cette formulation ne requiert que la modification du second membre.

4. On calcule alors les $(B_n)_{n \geq 1}$ à partir des formules (5.91-5.92), et on reconstruit la solution dans tout le domaine ω .

– Calcul de $\mathbf{v}_S$:

On calcule $\mathbf{v}_S$ en prenant le rotationnel vectoriel de ϕ_S .

1. Calcul de la solution locale $\mathbf{v}_S^c$:

$$\mathbf{v}_S^c = \sum_{n \geq 1} B_n r^{n\alpha-1} \begin{pmatrix} \sin(n\alpha\theta) \\ \cos(n\alpha\theta) \end{pmatrix} + \sum_{n \geq -1} A_n r^{n\alpha+1} \begin{pmatrix} \frac{n\alpha}{4n\alpha+4} \sin(n\alpha\theta) \\ \frac{n\alpha+2}{4n\alpha+4} \cos(n\alpha\theta) \end{pmatrix},$$

avec $B_1 \neq 0$. (5.96)

2. Pour calculer $\mathbf{v}_S^e$, on réalise la projection sur $L^2(\omega^e)^2$:

Trouver $\mathbf{v}_S^e \in L^2(\omega^e)^2$ tel que

$$\int_{\omega^e} \mathbf{v}_S^e \cdot \boldsymbol{\lambda} d\omega = \int_{\omega^e} \mathbf{rot} \phi_S^e \cdot \boldsymbol{\lambda} d\omega, \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in L^2(\omega^e)^2. \quad (5.97)$$

Pour calculer une approximation numérique $\mathbf{v}_h$ de $\mathbf{v}_S$ base de V_S , on projette l'expression (5.96) de $\mathbf{v}_S^c$ aux nœuds du maillage de ω^c , les coefficients $(A_n)_{n \geq -1}$ et $(B_n)_{n \geq 1}$ ayant été calculés, pour obtenir $\mathbf{v}_h^c$. Pour le calcul de $\mathbf{v}_h^e$, approximation de $\mathbf{v}_S^e$, on discrétise la formulation (5.97) et on obtient le système matriciel suivant :

$$\mathbb{M}_{\omega^e} \vec{\mathbf{v}}_S^e = \mathbb{R}_{\omega^e} \vec{\Phi}_S^e, \quad (5.98)$$

où $\mathbb{R}_{\omega^e}$ désigne la matrice du rotationnel.

NB. Le vecteur solution $\vec{\mathbf{v}}^e$ contient les deux composantes de $\mathbf{v}_h^e$. Le système linéaire à résoudre est donc de taille $(2N_h^e) \times (2N_h^e)$.

Remarque A.3 Les solutions analytiques locales p_S^c , ϕ_S^c et $\mathbf{v}_S^c$ sont données sous forme de série ; on doit pour le calcul numérique les tronquer. Cependant, ces séries convergent très vite, ce qui signifie que peu de termes (moins d'une dizaine) suffisent pour obtenir une solution précise. Notons que, pour le calcul de ϕ_S , cette technique est semblable à la méthode des éléments finis localisés cf. [52].

Pour conclure cette Annexe, nous allons présenter succinctement le calcul des coefficients $\|p_S\|_0^2$ et $\|\mathbf{v}_S\|_0^2$ qui interviennent dans l'équation différentielle, ainsi que le calcul de $\vec{\Lambda}$.

1. Calcul de $\|p_S\|_0^2$ et de $\|\mathbf{v}_S\|_0^2$

Pour le calcul de $\|p_S\|_0^2$, on décompose l'intégrale sur ω en la somme d'une intégrale sur ω^c et d'une intégrale sur ω^e . Dans ω^c , on utilise l'expression analytique de p_S^c , donnée par (5.79).

Dans ω^e , on utilise la représentation discrète $p_h^e = \sum_{i=1}^{N_h^e} p_i \lambda_i$ pour $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N_h^e}$ fonctions de base de V_h^e , l'espace d'approximation de $L^2(\omega^e)$. On a alors

$$\|p_S^h\|_0^2 = \int_0^R \int_0^\beta \left(\sum_{n \geq -1} A_n r^{n\alpha} \cos(n\alpha\theta) \right)^2 r dr d\theta + \sum_{i,j=1}^{N_h^e} p_i p_j (\lambda_i, \lambda_j)_{0,\omega^e}.$$

Le premier terme se calcule analytiquement, le second numériquement, ce qui donne

$$\|p_S^h\|_0^2 = \frac{\beta}{2} (A_{-1} A_1 R^2 + A_0^2 R^2 + \sum_{\substack{n \geq -1 \\ n \neq 0}} A_n^2 \frac{R^{2+2n\alpha}}{2+2n\alpha}) + (\mathbb{M}_{\omega^e} \vec{\mathbf{p}}^e | \vec{\mathbf{p}}^e). \quad (5.99)$$

Le calcul de $\|\mathbf{v}_S^h\|_0^2$ se fait suivant les mêmes principes.

2. Calcul de $\vec{\Lambda}$

Pour $\vec{\Lambda}$, qui ne dépend pas du temps et peut être calculé une fois pour toutes, on partitionne le domaine ω en 3 sous-domaines ω_i , $1 \leq i \leq 3$. On décompose

$$(\mathbf{v}_S, \phi)_0 = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{v}_S, \phi)_{0,\omega_i} \quad (5.100)$$

et on utilise dans chaque sous-domaine une méthode d'intégration numérique différente selon la régularité de $\mathbf{v}_S$.

- (a) Le domaine ω_1 est le plus intérieur et correspond à la première couronne de mailles autour du coin rentrant. On peut, sans restreindre la généralité, construire un maillage tel que ω_1 soit constitué de m triangles $(T_j)_{j=1,\dots,m}$ isocèles, d'angle $\delta\theta := \frac{\beta}{m}$ au coin rentrant, et de côté r_1 . Dans ces conditions, $(\mathbf{v}_S, \phi)_{0,\omega_1}$ se décompose en

$$\sum_{j=1}^m \int_{T_j} \mathbf{v}_S \cdot \phi|_{T_j} d\mathbf{x}.$$

On exprime d'une part le domaine d'intégration de T_j en coordonnées polaires (r, θ) centrées sur le coin rentrant, de sorte que

$$\int_{T_j} \cdot d\mathbf{x} \text{ s'écrit comme } \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \int_0^{r_1 f_j(\theta)} \cdot r dr d\theta$$

où $\theta \mapsto r_1 f_j(\theta)$ décrit le côté du triangle T_j opposé au coin rentrant. On exprime d'autre part chaque fonction de base λ restreinte à T_j en coordonnées polaires (rappelons que $\phi = (\lambda, 0)^T$ ou $(0, \lambda)^T$). On obtient les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \lambda(r, \theta) &= 1 - \frac{r}{r_1 f_j(\theta)} && \text{fonction associée au coin rentrant} \\ \lambda(r, \theta) &= \frac{\sin \theta_{j+1}}{r_1 \sin \delta\theta} r \cos \theta - \frac{\cos \theta_{j+1}}{r_1 \sin \delta\theta} r \sin(\theta) && \text{deuxième fonction} \\ \lambda(r, \theta) &= -\frac{\sin \theta_j}{r_1 \sin \delta\theta} r \cos \theta + \frac{\cos \theta_j}{r_1 \sin \delta\theta} r \sin \theta && \text{troisième fonction.} \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant les expressions analytiques de $\mathbf{v}_S$ (voir (5.96)), on calcule analytiquement en variable r la quantité $(\mathbf{v}_S, \phi)_{0,\omega_1}$. Ainsi, le seul terme à approcher numériquement (en variable θ) est de la forme

$$\int_0^{\frac{\delta\theta}{2}} \frac{\cos((n\alpha + k)\theta)}{(\cos \theta)^{(n\alpha + l)}} d\theta,$$

où k et l prennent des valeurs comprises entre -1 et 4 . On le calcule à l'aide d'une formule de Lobatto à 7 points utilisée entre deux zéros successifs de l'intégrande.

- (b) Le domaine ω_2 correspond à $\omega^c \setminus \omega_1$, dans lequel l'expression analytique (5.96) de $\mathbf{v}_S$ est toujours valable. Par contre, on ne connaît pas une expression facilement utilisable des fonctions de base, du fait du maillage non structuré. On utilise alors l'expression (5.96) dans la formule d'intégration numérique retenue, en l'occurrence une formule de Gauss sur 7 points exacte à l'ordre 5.
- (c) Dans le domaine le plus extérieur ω_3 (en pratique, on prend ω^e), la fonction $\mathbf{v}_S$ est régulière, et a été approchée numériquement sur les fonctions de base de V_R^h . Ainsi, $(\mathbf{v}_S, \phi)_{0,\omega_3}$ se calcule avec la même formule de quadrature que celle utilisée dans le cas de fonctions régulières.

Figure 5.3

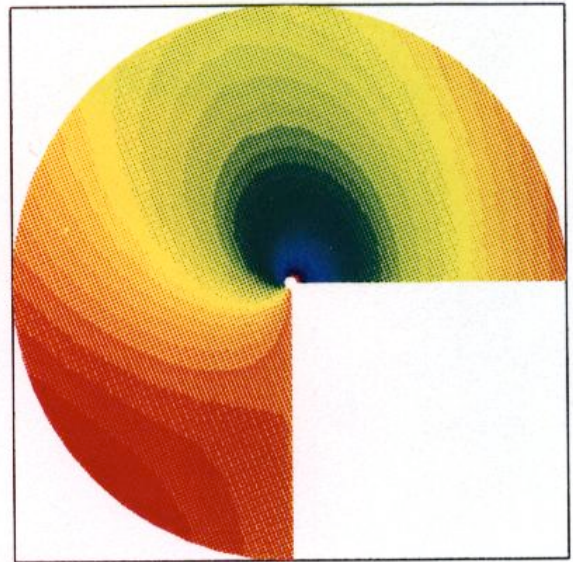
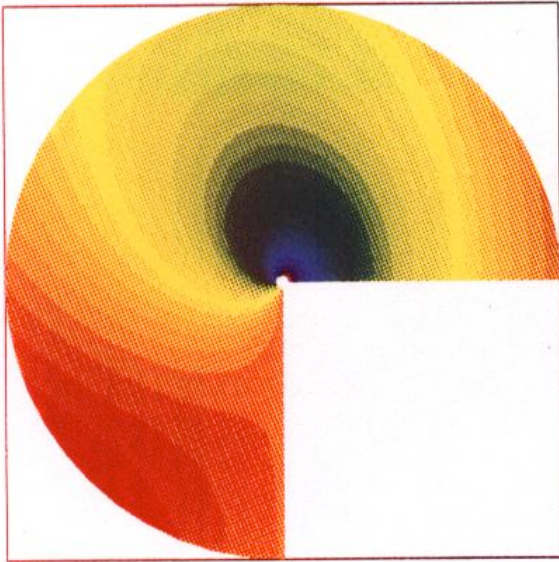


Figure 5.3-a v_s^y analytique et calculé.

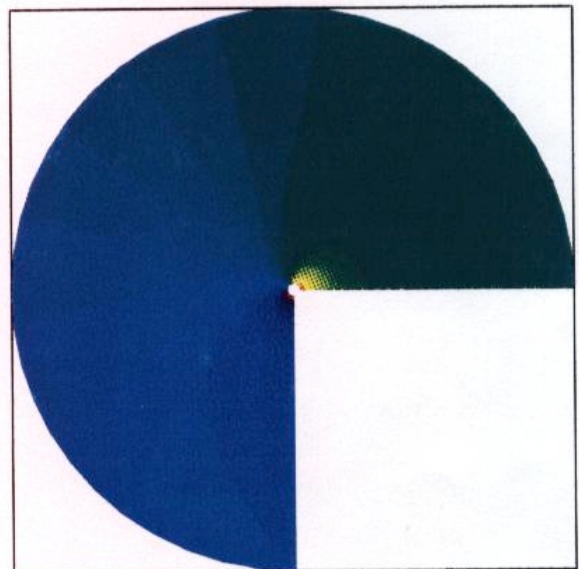
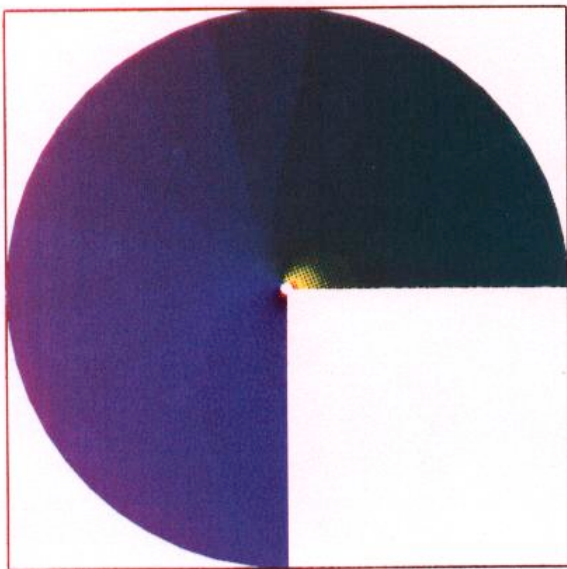


Figure 5.3-b p_s analytique et calculé.

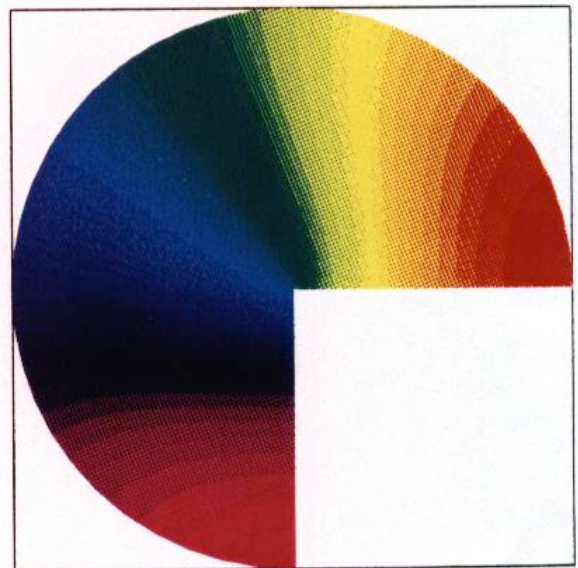
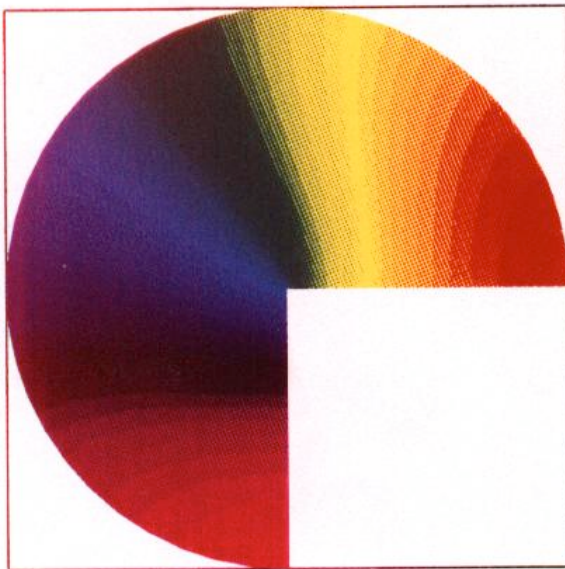


Figure 5.3-c ϕ_s analytique et calculé.

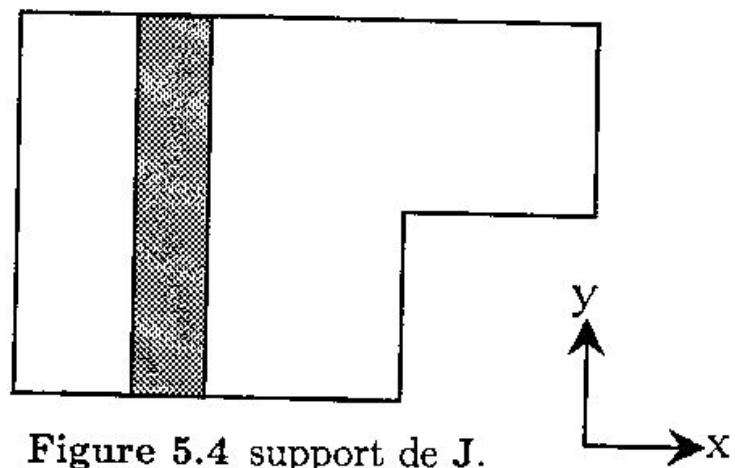


Figure 5.4 support de J .

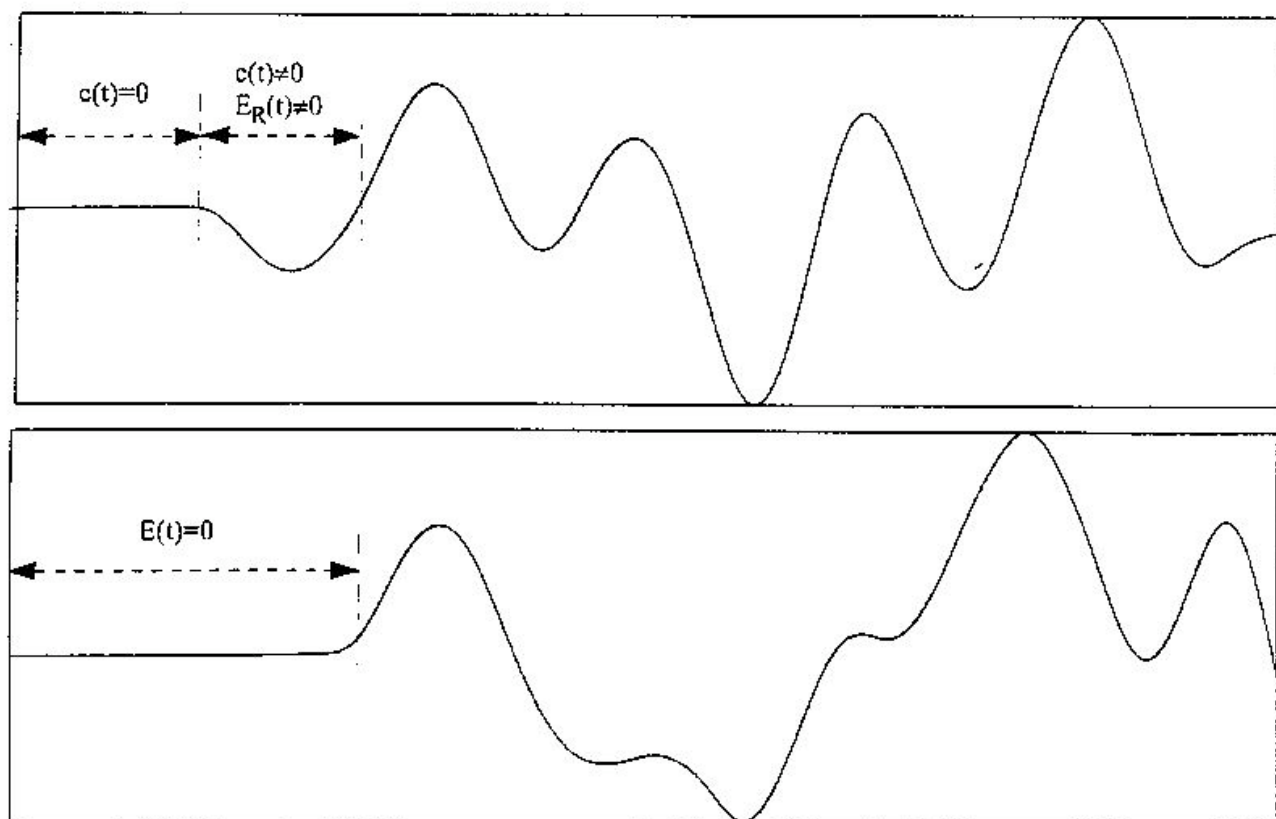


Figure 5.5 comparaison en en point x de $E_R(x, t)$ (en haut)
et de $E(x, t)$ (en bas) en fonction du temps.

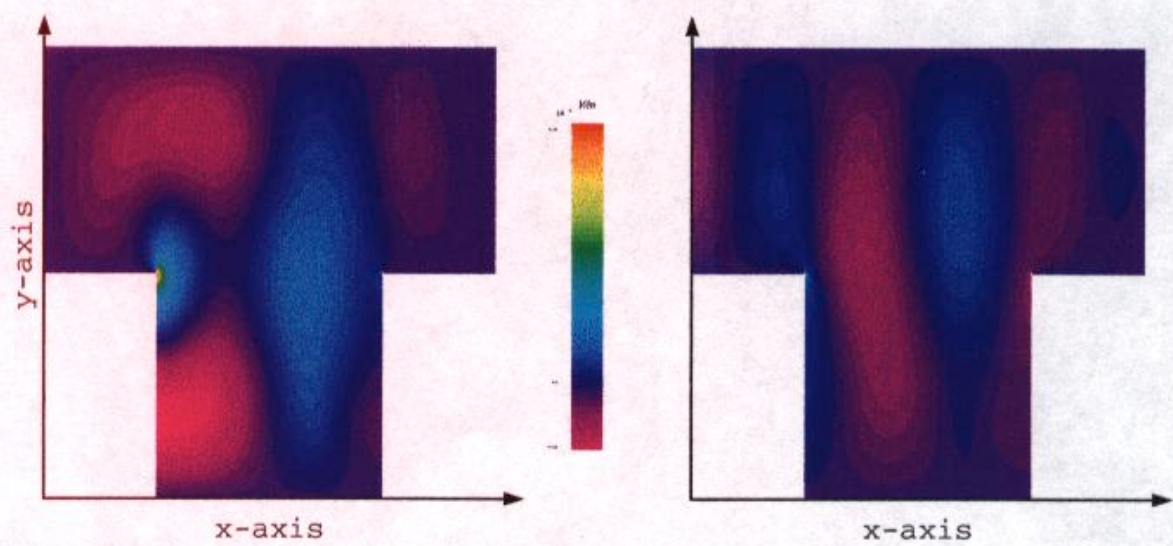


Figure 5.6 Champ EM, avec et sans traitement des singularites

Bibliographie

- [1] **R.A. Adams**, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York (1975).
- [2] **C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, V. Girault**, Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **21**, 823–864 (1998).
- [3] **F. Assous, P. Ciarlet, Jr.**, Une caractérisation de l’orthogonal de $\Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ dans $L^2(\Omega)$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **325**, Série I, 605–610 (1997).
- [4] **F. Assous, P. Ciarlet, Jr., E. Garcia**, Résolution des équations de Maxwell instationnaires avec charges dans un domaine singulier bidimensionnel, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **330**, Série I, 391–396 (2000).
- [5] **F. Assous, P. Ciarlet, Jr., S. Labrunie**, Theoretical tools to solve the axisymmetric Maxwell equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **25**, 49–78 (2002).
- [6] **F. Assous, P. Ciarlet, Jr., E. Sonnendrücker**, Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners, *Modél. Math. Anal. Numér.*, **32**, 359–389 (1998).
- [7] **F. Assous, P. Degond, E. Heintzé, P.A. Raviart, J. Segré**, On a finite element method for solving the three-dimensional Maxwell equations, *J. Comput. Phys.*, **109**, 222–237 (1993).
- [8] **I. Babuska**, The finite element method with Lagrange multipliers, *Numer. Math.*, **20**, 179–192 (1973).
- [9] **C.A. Balanis**, *Antenna Theory*, second edition, Wiley, New-York (1997).
- [10] **F. Battlo, F. Freund, M.M. Freund**, Charge distribution analysis, ‘*Le vide, les couches minces. Supplément au n° 260*’, 114–121 (1992).
- [11] **J. Bérenger**, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *J. Comput. Phys.*, **109**, 185–200 (1994).
- [12] **A.J. Berkhout**, *Seismic migration*, Elsevier, Amsterdam, Oxford, New-York, Tokyo (1984).
- [13] **C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday**, *Spectral methods for axisymmetric domains*, Series in Applied Mathematics, Gauthier-Villars, Paris and North Holland, Amsterdam (1999).
- [14] **C.K. Birdsall, A.B. Langdon**, *Plasmas physics via computer simulation*, Mac Graw-Hill, New-York (1985).
- [15] **A. Bossavit**, *Electromagnétisme en vue de la modélisation*, Mathématiques & Applications 14, Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [16] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris (1983).
- [17] **F. Brezzi**, On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers, *R.A.I.R.O. Anal. Numér.*, **R2**, 129–151 (1974).
- [18] **F. Brezzi, M. Fortin**, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer Verlag, New York (1991).
- [19] **A. Buffa, P. Ciarlet, Jr.**, On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations. Part I : an integration by parts formula in Lipschitz polyhedra, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **24**, 9–30 (2001).
- [20] **F. Chatelin**, *Valeurs propres de matrices*, Masson, Paris (1978).
- [21] **F.F. Chen**, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum Press, New-York, London (1974).

- [22] **P.G. Ciarlet**, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris (1982).
- [23] **P. Ciarlet, Jr., V. Girault**, Condition *inf-sup* pour l'élément fini de Taylor-Hood P_2 -iso- P_1 ; application aux équations de Maxwell, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **335**, 827–832 (2002).
- [24] **P. Ciarlet, Jr., J. Zou**, Finite element convergence for the Darwin model to Maxwell's equations, *Modél. Math. Anal. Numér.*, **31**, 213–250 (1997).
- [25] **J.F. Claerbout**, *Imaging the Earth's interior*, Blackwell Scientific Publications, Oxford (1985).
- [26] **M. Costabel**, A coercive bilinear form for Maxwell's equations, *J. Math. Anal. and Appl.*, **157**, 527–541 (1991).
- [27] **M. Costabel, M. Dauge, S. Nicaise**, Singularities of Maxwell interface problems, *Modél. Math. Anal. Numér.*, **33**, 627–649 (1999).
- [28] **M. Dauge**, *Elliptic boundary value problems on corner domains*, Lecture Notes in Mathematics, 1341, Springer Verlag, Berlin (1988).
- [29] **R. Dautray, J.L. Lions**, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Vol. 1, Masson, Paris (1987).
- [30] **R. Dautray, J.L. Lions**, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Vol. 3, Masson, Paris (1987).
- [31] **P. Degond, P.A. Raviart**, An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations, *Forum Math.*, **4**, 13–44 (1992).
- [32] **E. Durand**, *Electrostatique*, Masson, Paris (1964).
- [33] **B. Engquist, A. Majda**, Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, *Math. Comput.*, **31**, 629–651 (1977).
- [34] **P. Fernandes, G. Gilardi**, Magnetostatic and electrostatic problems in inhomogeneous anisotropic media with irregular boundary and mixed boundary conditions, *Math. Models Meth. App. Sci.*, **7**, 957–991 (1997).
- [35] **R. Feynman, Leighton, Sands**, *The Feynman lectures on physics : electromagnetism*, Addison-Wesley, Reading, USA (1964).
- [36] **M. Fortin, R. Glowinski**, *Augmented Lagrangian methods*, Springer Series in Computational Mathematics, 5, Springer Verlag, New York (1986).
- [37] **E. Garcia**, Résolution des équations de Maxwell stationnaires avec charges dans des domaines non convexes, *Thèse de l'Université P. et M. Curie*, Paris, France (2002).
- [38] **J. Garsoux**, *Espaces vectoriels topologiques et distributions*, Dunod, Paris (1963).
- [39] **V. Girault, P.A. Raviart**, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer Verlag, Berlin (1986).
- [40] **P. Grisvard**, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and studies in Mathematics, 24, Pitman, London (1985).
- [41] **P. Grisvard**, *Singularities in boundary value problems*, RMA 22, Masson, Paris (1992).
- [42] **W.W. Hager**, Updating the inverse of a matrix, *SIAM Review*, **31**, 221–239 (1989).
- [43] **C. Hazard, M. Lenoir**, Formulations variationnelles pour la diffraction des ondes électromagnétiques, *Chapitre 5 de l'Ecole des Ondes INRIA, Aspects récents en méthodes numériques pour les équations de Maxwell*, édités par G. Cohen et P. Joly, INRIA (1998).
- [44] **E. Heintzé**, Résolution des équations de Maxwell tridimensionnelles stationnaires par une méthode d'éléments finis conformes, *Thèse de l'Université P. et M. Curie*, Paris, France (1992).
- [45] **J. Hennequin**, *Electromagnétisme et relativité restreinte*, Dunod Université, Paris (1970).
- [46] **J.D. Jackson**, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons, New-York (1975).

- [47] **P. Joly, B. Mercier**, Une nouvelle condition transparente d'ordre 2 pour les équations de Maxwell en dimension 3, *Rapport INRIA* **1047** (1989).
- [48] **N.A. Krall, A.W. Trivelpiece**, *Principles of Plasma Physics*, McGraw-Hill, New-York (1973).
- [49] **J.D. Kraus**, *Antennas*, McGraw-Hill series in electrical engineering, New-York (1988).
- [50] **L. Landau, E. Lifchitz**, *Théorie du champ*, Mir, Moscou, URSS (1966).
- [51] **L. Landau, E. Lifchitz**, *Physique théorique 8, électrodynamique des milieux continus*, 2ème édition, ed. Librairie du globe, éditions MIR (1990).
- [52] **M. Lenoir and A. Tounsi**, The localized finite-element method and its application to the two-dimensional sea keeping problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, **25**, 729–752 (1988).
- [53] **P. Lesaint**, Finite elements methods for symmetric hyperbolic equations, *Numer. Math.*, **21**, 244–255 (1977).
- [54] **J.L. Lions, E. Magenes**, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1, Dunod, Paris (1968).
- [55] **M. Moussaoui**, Sur l'approximation des solutions du problème de Dirichlet dans un ouvert avec coins, dans *Singularities and constructive methods for their treatment*, édités par P. Grisvard *et al*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag 1121 (1985).
- [56] **M. Moussaoui, V.H. Tran**, Sur les coefficients des singularités des solutions de l'équation des ondes dans un polygone plan, *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I*, t. **316**, 257–260 (1993).
- [57] **K. Muller**, *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*, Springer Verlag, Berlin (1969).
- [58] **J. Nečas**, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris (1967).
- [59] **J.C. Nédélec**, Mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$, *Numer Math.*, **35**, 315–341 (1980).
- [60] **J.C. Nédélec**, A new family of mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$, *Numer. Math.*, **50**, 57–81 (1986).
- [61] **S. Nicaise**, Exact controllability of Maxwell's equations in heterogeneous media and an application to an inverse source problem, *SIAM J. Control Optim.*, **38**, 1145–1170 (2000).
- [62] **J. Perez**, *Une introduction à la supraconductivité*, cours de 1^{ère} année ENSTA, Paris (1998).
- [63] **I. Perugia**, A mixed formulation for 3D magnetostatic problems; theoretical analysis and face-edge finite element, *Numer. Math.*, **84**, 305–326 (1999).
- [64] **O. Pironneau**, *Méthodes des éléments finis pour les fluides*, Masson, Paris (1988).
- [65] **P.A. Raviart, E. Sonnendrücker**, A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations, *Numer. Math.*, **73**, 329–372 (1996).
- [66] **G.T. Ruck, D.E. Barrick, W.D. Stuart, C.K. Krichbaum**, *Radar Cross Section Handbook*, Plenum Press, New-York, London (1970).
- [67] **E. Sonnendrücker**, Analyse mathématique et numérique des équations de Vlasov-Darwin, *Thèse de l'E.N.S. Cachan* (1995).
- [68] **C. Weber**, A local compactness theorem for Maxwell's equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **2**, 12–25 (1980).
- [69] **E.W. Weibel**, *Phys. Rev. Letters*, **2**, 83 (1959).
- [70] **O.C. Zienkiewicz**, *La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur*, Ediscience, Paris (1973).