



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 353–358



Numerical Analysis/Partial Differential Equations

The Singular Complement Method for 2d scalar problems

La Méthode du Complément Singulier pour des problèmes scalaires 2d

Patrick Ciarlet Jr.^a, Jiwen He^b

^a ENSTA/UMA et CNRS, URA 853, 32, boulevard Victor, 75739 Paris cedex 15, France

^b Department of Mathematics, University of Houston, 4800 Calhoun Road, Houston, TX 77204-3008, USA

Received 15 September 2002; accepted after revision 14 January 2003

Presented by Roland Glowinski

Abstract

We propose a method, which allows us to recover an optimal error convergence rate, when it is used in addition to the usual P_1 Lagrange Finite Element Method, in 2d non-convex domains. It can be applied to the Laplace problem, the heat or wave equations, or similar problems with piecewise constant coefficients. *To cite this article: P. Ciarlet Jr., J. He, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Nous présentons une méthode d'approximation qui permet de retrouver l'estimation d'erreur optimale, lorsqu'elle est utilisée avec la méthode usuelle des Eléments Finis de Lagrange P_1 , dans des domaines bidimensionnels non-convexes. Celle-ci peut-être appliquée aux équations de Poisson, de la chaleur ou des ondes scalaires, ainsi qu'à des problèmes similaires à coefficients constants par morceaux. *Pour citer cet article : P. Ciarlet Jr., J. He, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Version française abrégée

Les nombres entre parenthèses renvoient à la version anglaise.

La Méthode du Complément Singulier (SCM) a été introduite par Assous et al. [3,2] pour résoudre les équations de Maxwell instationnaires dans des domaines singuliers. Pour l'étude du problème de Poisson, on peut la reformuler (voir ci-dessous), pour qu'elle coïncide avec celle proposée par Moussaoui [7]. La SCM diffère de la Méthode de la Fonction Singulière Duale (DSFM, cf. [4]), au sens où elle ne requiert pas de fonction de troncature. De fait, on échange cette fonction de troncature par une condition aux limites inhomogène.

E-mail addresses: ciarlet@ensta.fr (P. Ciarlet Jr.), jiwenhe@math.uh.edu (J. He).

Le problème à résoudre est un problème du type, pour $f \in L^2(\omega)$:

Trouver $u \in H_0^1(\omega)$ tel que $-\Delta u = f$ dans ω .

Ci-dessus, le domaine ω est borné, à bord polygonal, avec un unique coin rentrant, d'angle π/α , $\alpha \in]1/2, 1[$. On appelle (r, θ) les coordonnées polaires centrées en ce coin. Notons que l'on peut facilement généraliser la SCM au cas d'un domaine avec plusieurs coins rentrants.

A l'aide de la décomposition (1) (cf. [5]), on peut décomposer la solution u en une partie régulière et une partie singulière, sous la forme (2), où p_s est une base de N et ϕ_s appartient à $H_0^1(\omega)$ et est tel que $-\Delta \phi_s = p_s$. On les appelle respectivement singularités duale et primale. Elles peuvent être représentées sous la forme (3). Noter que p_s est différente de la fonction singulière duale de [4] en ce sens que cette dernière est de la forme $p'_s = \eta(r) r^{-\alpha} \sin(\alpha\theta)$, avec η une fonction de troncature régulière. On a alors par construction $p'_s|_{\partial\omega} = 0$, mais par contre $\Delta p'_s$ n'est plus nul sur ω , et met en jeu un terme en η'' , à comparer à la partie régulière de (3a), \tilde{p} , telle que $\tilde{p}|_{\partial\omega} \neq 0$ et $\Delta \tilde{p} = 0$ dans ω . On peut retrouver cette idée dans [6,1].

L'analyse numérique de la SCM est relativement standard, au sens où elle reprend les formules continues (2), (3), la seule difficulté résidant dans le fait que l'on approche des fonctions à trace non nulle sur le bord.

La partie régulière \tilde{u} est approchée à l'aide de la Méthode des Eléments Finis (EF), via l'Elément Fini de Lagrange P_1 , une fois définie une triangulation régulière \mathcal{T}_h , de sommets $(M_i)_{1 \leq i \leq N+N_b}$ (les N_b derniers sommets se trouvant sur le bord). L'espace discret ainsi construit est noté V_h^0 , et les fonctions de base sont notées $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N+N_b}$, cf. (4).

Pour ce qui est de la discrétisation des singularités primale et duale, on utilise également les EF pour la partie régulière (respectivement $\tilde{\phi}$ et \tilde{p}), alors que la partie principale (resp. $\phi_P = r^\alpha \sin(\alpha\theta)$ et $p_P = r^{-\alpha} \sin(\alpha\theta)$) est supposée connue, ce qui signifie en pratique que l'on peut se servir de formules exactes, ou de quadrature suffisamment précises (on reviendra sur ce point plus bas).

Pour l'approximation p_s^h de p_s on a le résultat

Lemme 0.1. $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ tel que $\|p_s - p_s^h\|_0 < C_\varepsilon h^{2\alpha-\varepsilon}$.

Pour approcher c dans (2) et β dans (3), on remplace simplement p_s par p_s^h : on obtient c_h et β_h , telles que

Lemme 0.2. $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ tel que $|c - c_h| < C_\varepsilon h^{2\alpha-\varepsilon}$ et $|\beta - \beta_h| < C_\varepsilon h^{2\alpha-\varepsilon}$.

Une fois β_h connue, on en déduit l'approximation $\phi_s^h = \tilde{\phi}_h + \beta_h \phi_P$ de ϕ_s , pour trouver

Lemme 0.3. $\exists C > 0$ tel que $\|\phi_s - \phi_s^h\|_1 < Ch$.

On recolle le tout, en calculant finalement l'approximation EF \tilde{u}_h de la partie régulière, cf. (5), pour obtenir l'approximation SCM $u_h = \tilde{u}_h + c_h \phi_s^h$ de la solution u , qui vérifie

Théorème 0.4. $\exists C > 0$ tel que $\|u - u_h\|_1 < Ch$.

En reformulant la décomposition de u_h (resp. celle de u) sous la forme (6) (resp. (7)), on retrouve la méthode introduite par Moussaoui [7] dans un domaine en L, avec un coefficient singulier λ_h (resp. λ).

Nous concluons par des expérimentations numériques. Commençons par le point numérique *fondamental* suivant : pour calculer $\|p_s^h\|^2$, on remarque que l'on peut écrire $\|p_s^h\|_0^2 = \|\tilde{p}_h\|_0^2 + 2(\tilde{p}_h, p_P)_0 + \|p_P\|_0^2$. Il convient alors de calculer le terme le plus singulier $\|p_P\|_0^2$ avec prudence. On découpe le domaine ω en deux : un secteur angulaire ω^c au voisinage du coin rentrant, et ω^e . Dans ω^c , on effectue un calcul *analytique*, alors que l'on applique une formule de quadrature usuelle dans ω^e . Cette méthode peut être appliquée à un calcul 3d.

On présente deux types d'exemples.

Tout d'abord, dans une suite de domaines de la forme (8). On dispose alors d'expressions analytiques pour les singularités p_s et ϕ_s (et pour le coefficient β). L'espace V_h^0 est construit à partir d'une triangulation *uniforme* \mathcal{T}_h , où le pas h , égal dans ce cas à la longueur des arêtes du bord, varie de 2^{-3} à 2^{-6} . On a représenté à la Fig. 1 la vitesse de convergence, exprimée comme l'exposant ν tel que $\| \cdot - \cdot_h \| = O(h^\nu)$. Si ensuite on prend une solution exacte de la forme $u = r^\alpha \sin(\alpha\theta)$, on obtient la super-convergence rapportée à la Fig. 2 (u_h^* est calculée à l'aide des EF de Lagrange P_1 , sans SCM).

Pour conclure, on s'est intéressé au cas d'un domaine en T, avec deux coins rentrants, pour vérifier la validité de la SCM dans ce cas, cf. (9), en utilisant à nouveau une triangulation uniforme, avec $h \in [2^{-7}, 2^{-3}]$. Comme on ne dispose pas d'une solution exacte dans ce cas, on a considéré la solution obtenue avec la SCM pour $h = 2^{-7}$, u^\dagger , comme exacte. Les résultats, rapportés au Tableau 1, montrent encore une fois le bon comportement de la SCM.

1. Introduction

The Singular Complement Method has originally been introduced by Assous et al. [3,2], for the 2d static or instationary Maxwell equations without charges. In this Note, we consider its design and implementation for the 2d Poisson problem. Extensions to the heat or (instationary) wave equations, or to similar problems with piecewise constant coefficients can be obtained similarly.

In the case of the 2d Poisson problem, it is shown that the SCM can be reformulated to coincide with the approach of Moussaoui [7]. It differs from the DSFM of Blum and Dobrowolski [4] in that it requires no cut-off function. As a matter of fact, the cut-off function is traded for a nonhomogeneous boundary condition, when the numerical implementation of the SCM is carried out. This idea parallels that of [6] (static Maxwell equations in 2d domains without charges) and [1] (Maxwell equations in 2d axisymmetric domains).

2. Principle

Let ω denote a 2d polygon, with a single reentrant corner (of angle π/α , $\alpha \in]1/2, 1[$). Let the line segments of $\partial\omega$ be denoted as $\{\gamma_k\}_{k=1}^K$. Consider the Poisson equation, given $f \in L^2(\omega)$:

$$\text{Find } u \in H_0^1(\omega) \text{ such that } -\Delta u = f \quad \text{in } \omega.$$

The splitting of the solution into regular and singular parts is based on the decomposition of $L^2(\omega)$ [5]:

$$L^2(\omega) = \Delta(H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)) \oplus N, \quad \text{with } N = \{p \in L^2(\omega) : \Delta p = 0, p|_{\gamma_k} = 0, 1 \leq k \leq K\}. \tag{1}$$

With a single reentrant corner, there holds $\dim(N) = 1$, so that one has $N = \text{Vect}(p_s)$. Then, let ϕ_s be the element of $H_0^1(\omega)$ such that $-\Delta\phi_s = p_s$. One can write

$$u = \tilde{u} + c\phi_s, \quad \text{with } \tilde{u} \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega) \text{ and } c = \frac{(f, p_s)_0}{\|p_s\|_0^2}. \tag{2}$$

If (r, θ) denote the polar coordinates centered at the reentrant corner, with $\{\theta = 0\}$ and $\{\theta = \pi/\alpha\}$ being the local representation of the incoming edges, a possible choice for the (dual) singularity p_s is

$$p_s = \tilde{p} + r^{-\alpha} \sin(\alpha\theta), \quad \tilde{p} \in H^1(\omega), \quad \text{and } \phi_s = \tilde{\phi} + \beta r^\alpha \sin(\alpha\theta), \quad \tilde{\phi} \in H^2(\omega), \quad \beta = \frac{1}{\pi} \|p_s\|_0^2. \tag{3}$$

Note that the difference with the DSFM [4] resides in the above formula (3), as $\tilde{p}|_{\partial\omega} \neq 0$. Actually, the (dual) Singular Function used by Blum and Dobrowolski has the form $p'_s = \eta(r)r^{-\alpha} \sin(\alpha\theta)$, where η is a smooth cut-off function, so that instead $p'_s|_{\partial\omega} = 0$. But then $\Delta p'_s$ does not uniformly vanish on ω , and it involves furthermore η'' .

3. Numerical analysis

The regular part \tilde{u} is approximated via the P_1 Lagrange FEM, given a regular triangulation \mathcal{T}_h , with vertices $(M_i)_{1 \leq i \leq N+N_b}$, the last N_b vertices standing on the boundary $\partial\omega$. Let

$$V_h^0 = \{v_h \in C^0(\omega): v_h|_T \in P_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h(M_i) = 0, N + 1 \leq i \leq N + N_b\}$$

and $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N+N_b}$ the usual basis functions, i.e., $\phi_i(M_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq N + N_b$. (4)

First, the approximation of the singular part p_s , discretized in part using the FEM, reads, for $r > 0$,

$$p_s^h = p_h^* - q_h + r^{-\alpha} \sin(\alpha\theta), \quad q_h = Q_h(r^{-\alpha} \sin(\alpha\theta)), \quad \text{and} \quad Q_h(g) = \sum_{i=N+1}^{N+N_b} g(M_i)\phi_i;$$

$$p_h^* \in V_h^0 \text{ such that } (\nabla p_h^*, \nabla v_h)_0 = (\nabla q_h, \nabla v_h)_0, \quad \forall v_h \in V_h^0.$$

Lemma 3.1. $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ such that $\|p_s - p_s^h\|_0 < C_\varepsilon h^{2\alpha-\varepsilon}$.

If one considers the matrix form of the discrete variational formulation of p_h^* , with solution $\underline{p}^* = (p_h^*(M_1), \dots, p_h^*(M_N))^T \in \mathbb{R}^N$, one gets $\mathbb{K}\underline{p}^* = \underline{q}$, where \mathbb{K} is the usual rigidity matrix.

Second, one takes $c_h = (f, p_s^h)_0 / \|p_s^h\|_0^2$ and $\beta_h = (1/\pi) \|p_s^h\|_0^2$.

Lemma 3.2. $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ such that $|c - c_h| < C_\varepsilon h^{2\alpha-\varepsilon}$ and $|\beta - \beta_h| < C_\varepsilon h^{2\alpha-\varepsilon}$.

Last, the approximation of ϕ_s : $\phi_s^h = \phi_h^* - \beta_h q'_h + \beta_h r^\alpha \sin(\alpha\theta)$, with $q'_h = Q_h(r^\alpha \sin(\alpha\theta))$ and $\phi_h^* \in V_h^0$ such that $(\nabla \phi_h^*, \nabla v_h)_0 = (p_s^h, v_h)_0 + \beta_h (\nabla q'_h, \nabla v_h)_0, \forall v_h \in V_h^0$.

Lemma 3.3. $\exists C > 0$ such that $\|\phi_s - \phi_s^h\|_1 < Ch$.

Using again the vector representation $\underline{\phi}^* \in \mathbb{R}^N$, one gets $\mathbb{K}\underline{\phi}^* = \underline{l} + \beta_h \underline{q}'$. If one sets $p = \|p_s^h\|_0^2$, combining the above with the expression of β_h yields an upper block triangular linear system, which reads

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} & -\underline{q}' \\ 0 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\phi}^* \\ \beta_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{l} \\ p \end{pmatrix}.$$

As far as the regular part \tilde{u} is concerned, one writes

$$\tilde{u}_h \in V_h^0 \text{ such that } (\nabla \tilde{u}_h, \nabla v_h)_0 = (f, v_h)_0 - c_h (p_s^h, v_h)_0, \quad \forall v_h \in V_h^0. \tag{5}$$

Lemma 3.4. $\exists C > 0$ such that $\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_1 < Ch$.

Or, in matrix form, with $f_s = (f, p_s^h)_0$ and the expression of c_h

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} & \underline{l} \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\tilde{u}} \\ c_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_0 \\ f_s \end{pmatrix}.$$

The discrete solution is then $u_h = \tilde{u}_h + c_h \phi_s^h$. Summing up the above lemmas, one finds the

Theorem 3.5. $\exists C > 0$ such that $\|u - u_h\|_1 < Ch$.

Interestingly, one can split this expression of the discrete solution in another way:

$$u_h = u_h^* - \lambda_h q'_h + \lambda_h r^\alpha \sin(\alpha\theta), \quad \text{with } u_h^* = \tilde{u}_h + c_h \phi_h^* \text{ and } \lambda_h = c_h \beta_h. \tag{6}$$

The approximation u_h^* belongs to V_h^0 and it is readily seen that its vector counterpart \underline{u}^* is the solution to $\mathbb{K}\underline{u}^* = \underline{f}_0 + \lambda_h \underline{q}'$, with $\lambda_h = \frac{1}{\pi} f_s$. This yields yet another upper block triangular linear system,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} & -q' \\ 0 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}^* \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_0 \\ f_s \end{pmatrix}.$$

Going one step further back, let us define q' , a smooth lifting of the trace of the singular part $r^\alpha \sin(\alpha\theta)|_{\partial\omega}$. Then the above linear system exactly corresponds to a discretization of the continuous splitting

$$u = \tilde{u}' + \lambda r^\alpha \sin(\alpha\theta) \quad \text{with } \tilde{u}' = u^* - \lambda q' \in H^2(\omega) \text{ and } \lambda = \frac{1}{\pi}(f, p_s)_0. \tag{7}$$

These splittings (6), (7) were originally introduced by Moussaoui [7] for an L-shaped domain.

As a conclusion, one can then use either continuous and/or discretized forms corresponding to (2) or (7). In addition, these methods can be easily extended to the case of a polygon with several reentrant corners.

4. Numerical experiments

To evaluate the accuracy of the SCM, let us first consider the family of cheese-shaped domains

$$\omega = \{(r, \theta) : r \in]0, 1[, \theta \in]0, \pi/\alpha[\} \quad \text{with } \alpha \in]1/2, 1[. \tag{8}$$

Thus, for this case, the analytical expressions of p_s and ϕ_s as well as β are known: $p_s^\alpha = (r^{-\alpha} - r^\alpha) \sin(\alpha\theta)$, $\phi_s^\alpha = [(r^\alpha - r^{2-\alpha})/(4 - 4\alpha) - (r^\alpha - r^{2+\alpha})/(4 + 4\alpha)] \sin(\alpha\theta)$ and $\beta^\alpha = 1/(4 - 4\alpha) - 1/(4 + 4\alpha)$. The FE space V_h^0 is derived from the regular triangulation \mathcal{T}_h of ω where h denotes the (common) length of the boundary edges, ranging from 2^{-3} to 2^{-6} . Note that the domain ω is not a polygon and that the mesh is a polygonal approximation of ω ; since ω is locally convex at all the other corners of the boundary, the results of the previous sections are still valid. The convergence rates of $\|p_s - p_s^h\|_0$, $\|\phi_s - \phi_s^h\|_1$ and $|\beta - \beta_h|$ with the reentrant corner of angle, denoted by $\Theta_\alpha (= \pi/\alpha)$, varying in $]\pi, 2\pi[$ are pictured in Fig. 1, in terms of the exponent of h . The computed (marks) and theoretical (lines) results are in very good accordance.

Note that, for the computation of $\|p_s^h\|_0^2$, a crucial step for the accuracy of the SCM, the decomposition $p_s^h = \tilde{p}_h + p_P$ is used with $p_P = r^{-\alpha} \sin(\alpha\theta)$ the principal part of p_s^h . This yields $\|p_s^h\|_0^2 = \|\tilde{p}_h\|_0^2 + 2(\tilde{p}_h, p_P)_0 + \|p_P\|_0^2$. The subsequent numerical integration of $\|p_P\|_0^2$ is split over the partition $\omega = \omega^c \cup \omega^e$, where ω^c stands for an open angular sector of radius R_c centered at the reentrant corner. This results in a sum of an integral over ω^c and one over ω^e . In ω^c , the analytic expression of $\|p_P\|_{0,\omega^c}^2$ is used: $\|p_P\|_{0,\omega^c}^2 = R_c^{2-2\alpha} \Theta_\alpha / (4 - 4\alpha)$. In ω^e , p_P is smoother, and $\|p_P\|_{0,\omega^e}^2$ is numerically computed over a triangular mesh of ω^e with a standard quadrature formula. This method can be used in 3d computations.

To study the performance of the SCM, we consider the Poisson equation in the cheese-shaped domains (8)

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \{\theta = 0\} \cup \{\theta = \Theta_\alpha\}, \quad u = r^\alpha \sin(\alpha\theta) \quad \text{on } \{r = 1\}.$$

The exact solution of the underlying problem is $u^\alpha = r^\alpha \sin(\alpha\theta)$, the (primal) singular function. Fig. 2 depicts the variation versus Θ_α of the convergence rates of $\|u - u_h\|_1$ (SCM) and $\|u - u_h^*\|_1$ (standard FEM). It appears that the superconvergence in the H^1 -norm is obtained for the SCM, independent of Θ_α . The standard P_1 finite element method cannot yield such a result and its convergence rate deteriorates as theoretically predicted (dashed line) when Θ_α approaches to 2π .

We conclude our numerical experiments by studying the behavior of the SCM in the case of a polygon with two reentrant corners. In this case, the dimension of N is 2, and so one has to compute the numerical approximations of $p_s^j = \tilde{p}^j + r_j^{-\alpha_j} \sin(\alpha_j \theta_j)$, $\tilde{p}^j \in H^1(\omega)$, $j = 1, 2$, and the same for ϕ_s^j , $j = 1, 2$. One uses again the FEM together with the explicit knowledge of the principal parts. This is no difficulty. We consider thus the Poisson equation over the T-shaped domain

$$\omega = (-2, 1) \times (-1, 1) \setminus ((-2, -1) \times (-1, 0) \cup (0, 1) \times (-1, 0)) \tag{9}$$

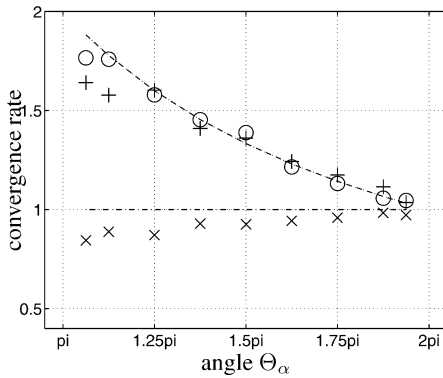


Fig. 1. Convergence rate of $\|p_s - p_s^h\|_0$ (circle), $\|\phi_s - \phi_s^h\|_1$ (x-mark) and $|\beta - \beta_h|$ (plus).
 Fig. 1. Vitesse de convergence de $\|p_s - p_s^h\|_0$ (cercle), $\|\phi_s - \phi_s^h\|_1$ (x) et $|\beta - \beta_h|$ (plus).

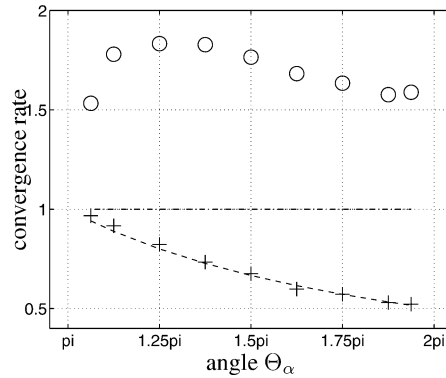


Fig. 2. Convergence rate of $\|u - u_h\|_1$ (circle) and $\|u - u_h^*\|_1$ (plus).
 Fig. 2. Vitesse de convergence de $\|u - u_h\|_1$ (cercle) et $\|u - u_h^*\|_1$ (plus).

Table 1
 Discretization errors
 Tableau 1
 Erreurs de discrétisation

h	$\ u^\dagger - u_h^*\ _1$	$\ u^\dagger - u_h\ _1$	$\max_{j=1,2} c^{j,\dagger} - c_h^j $	$\max_{j=1,2} \lambda^{j,\dagger} - \lambda_h^j $	$\max_{j=1,2} \ p_s^{j,\dagger} - p_s^{j,h}\ _0$
2^{-3}	9.371e-2	3.307e-3	6.331e-3	6.002e-3	5.648e-3
2^{-4}	6.207e-2	9.106e-4	2.432e-3	2.223e-3	2.474e-3
2^{-5}	4.262e-2	2.366e-4	8.672e-4	7.778e-4	9.509e-4
2^{-6}	3.142e-2	5.099e-5	2.458e-4	2.184e-4	2.816e-4

with the non-homogeneous right-hand side function $f = 1$; i.e., $-\Delta u = 1$ in ω , $u = 0$ on $\partial\omega$. The FE approximation is based on the uniform triangulation \mathcal{T}_h of ω where h denotes the (common) length of the edges of the elementary squares, ranging from 2^{-3} to 2^{-7} . Note that it is not possible to provide an analytical solution. Instead, we compare our results to the computations (denoted with the superscript \dagger) made by the SCM with the finest triangulation $h = 2^{-7}$. Again, numerical results given in Table 1 show that the SCM recovers the optimal error convergence rate as in the case of a single reentrant corner.

References

[1] F. Assous, P. Ciarlet Jr., S. Labrunie, J. Segré, Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in axisymmetric singular domains: the Singular Complement Method, J. Comput. Phys., submitted.
 [2] F. Assous, P. Ciarlet Jr., J. Segré, Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domains: the Singular Complement Method, J. Comput. Phys. 161 (2000) 218–249.
 [3] F. Assous, P. Ciarlet Jr., E. Sonnendrücker, Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners, Math. Mod. Numer. Anal. 32 (1998) 359–389.
 [4] H. Blum, M. Dobrowolski, Une méthode d'éléments finis pour la résolution des problèmes elliptiques dans des ouverts avec coins, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 293 (1981) 99–101.
 [5] P. Grisvard, Singularities in Boundary Value Problems, in: RMA, Vol. 22, Masson, Paris, 1992.
 [6] C. Hazard, S. Lohrengel, A singular field method for Maxwell's equations: numerical aspects in two dimensions, SIAM J. Appl. Math., to appear.
 [7] M. Moussaoui, Sur l'approximation des solutions du problème de Dirichlet dans un ouvert avec coins, in: P. Grisvard, et al. (Eds.), Singularities and Constructive Methods for their Treatment, Vol. 1121, Springer-Verlag, 1984, pp. 199–206.