

# Résolution des équations de Maxwell instationnaires avec charges dans un domaine singulier bidimensionnel

Franck ASSOUS<sup>a</sup>, Patrick CIARLET, Jr.<sup>b</sup>, Emmanuelle GARCIA<sup>a</sup>

<sup>a</sup> CEA/DIF/DPTA, B.P. 12, 91680 Bruyères-le-Châtel, France  
Courriel : assous@bruyeres.cea.fr, garciaem@ensta.fr

<sup>b</sup> ENSTA/UMA, 32, boulevard Victor, 75739 Paris cedex, France  
Courriel : ciarlet@ensta.fr

(Reçu le 15 novembre 1999, accepté le 10 janvier 2000)

---

## Résumé.

Dans [3] et [2], nous avons considéré la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires en l'absence de charges dans un domaine bidimensionnel non convexe, à l'aide d'une méthode appelée la *méthode du complément singulier*, pour laquelle les champs calculés sont continus. Nous en présentons ici une extension qui permet de traiter efficacement le cas des équations avec charges, avec un faible surcoût numérique. Ceci fait de la MCS une méthode de calcul bien adaptée à la résolution des équations couplées de Vlasov–Maxwell. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## *The solution to the time-dependent Maxwell equations with charges in a 2D nonsmooth domain*

## Abstract.

In [3] and [2], we considered the numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in the absence of charges in a 2D non-convex domain, using the so-called singular complement method (SCM), for which the computed fields are continuous. In this paper, we present an extension of the SCM, which allows to solve efficiently the time-dependent Maxwell equations with charges, with almost no additional computational cost. Thus, the numerical solution to the Vlasov–Maxwell system of equations can be achieved by coupling the SCM to a particle solver. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## *Abridged English version*

In [3] and [2], we proposed a method to solve numerically the time-dependent Maxwell equations in the absence of charges in a non-convex, simply connected, bounded polygonal domain  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^2$ . This method, called the *singular complement method* (SCM), relies on the orthogonal splitting of the solution in two parts:

---

Note présentée par Roland GLOWINSKI.

a regular one (at least  $H^1(\Omega)$  component-wise), and a singular one. With charges, one usually performs a ‘‘Poisson correction’’ to revert to the problem in the absence of charges ([4] and [9]). Unfortunately, when the problem to be solved is time-dependent, this requires the additional solution to a linear system at each time-step. In order to cope with this drawback, we present an extension of the SCM to Maxwell’s equations with charges.

Let us assume that there are  $K$  reentrant corners on the boundary  $\Gamma$  of  $\Omega$ . Let  $\nu$  and  $\tau$  denote the unit outward normal and the associated tangent. Let us introduce the functional spaces  $H$  and  $X$  (see (1)) (rot stands for the curl operator). The bilinear form  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_X \mapsto (\text{rot } \mathbf{u} \mid \text{rot } \mathbf{v})_0 + (\text{div } \mathbf{u} \mid \text{div } \mathbf{v})_0$  defines on  $X \times X$  a scalar product, and its associated norm  $\| \cdot \|_X$  is equivalent to the canonical norm. As  $\Omega$  is not convex,  $X \not\subset H^1(\Omega)^2$ : let  $X_R = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2; \mathbf{u} \cdot \tau|_\Gamma = 0 \}$ .

The aim of this paper is to provide some numerical tools to solve the following two problems: the static one, (2), and the time-dependent one, (4) or (5). It is well-known that both problems are well-posed. For the static problem, this can be inferred from the Helmholtz decomposition  $\mathbf{u} = \text{grad } \psi + \text{rot } \phi$ ,  $(\psi, \phi) \in \Psi \times \Phi$  (see (3)). For the time-dependent problem, taken as the ‘‘electrical part’’ of the set of equations which govern the TE mode, this stems from some energy norms estimates [1]. Note that (5) can be rewritten equivalently in  $X$  as (6).

In [3], we proved that, in the absence of charges, the set  $V = \{ \mathbf{u} \in X; \text{div } \mathbf{u} = 0 \}$  can be split as  $V = V_R \oplus^{\perp X} V_S$ , with  $V_R = V \cap H^1(\Omega)^2$ , and  $\dim(V_S) = K$ . Here,  $X = X_R \oplus^{\perp X} X_S$  holds true. Let  $S_d$  denote the ‘‘singular’’ subspace of  $L^2(\Omega)$ , that is the one which is orthogonal to the range of  $\Psi_R = \Psi \cap H^2(\Omega)$  by  $\Delta$ . Then one can prove the following, which is also valid when the domain  $\Omega$  is a bounded Lipschitz polyhedron of  $\mathbb{R}^3$ .

**THEOREM.** – *The bilinear form  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\text{div } \mathbf{u} \mid \text{div } \mathbf{v})_0$  defines on  $X_S \times X_S$  a scalar product, which is equivalent to  $(\cdot \mid \cdot)_X$ . In addition, the map  $\text{div}$  from  $X_S$  onto  $S_d$  is an isomorphism.*

In order to compute a basis  $(\mathbf{u}_S^k)_{1 \leq k \leq K}$  of  $X_S$ , one uses the Helmholtz decomposition of  $\mathbf{u}_S^k$  (with singular potentials). Those potentials are determined via a Dirichlet-to-Neumann procedure (cf. [3]). Now, let us proceed to compute the numerical solution of (2) and (6).

Let the solution  $\mathbf{u}$  of (2) be split as  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_S$ , with  $(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_S) \in X_R \times X_S$ , and  $\mathbf{u}_S = \sum_\ell \kappa_\ell \mathbf{u}_S^\ell$ . One gets  $(\mathbf{u} \mid \mathbf{v})_X = (f \mid \text{rot } \mathbf{v})_0 + (g \mid \text{div } \mathbf{v})_0$ , for all  $\mathbf{v}$  in  $X$ . Therefore, there holds  $\mathbb{K}^S \vec{\kappa} = \mathbb{R}^S \vec{f}^S + \mathbb{D}^S \vec{g}^S$ , with straightforward notations:  $\vec{\kappa}$  and  $\mathbf{u}_S$  can be computed. Then, thanks to the identity  $(\text{grad } \mathbf{v}_R \mid \text{grad } \mathbf{w}_R)_0 = (\mathbf{v}_R \mid \mathbf{w}_R)_X$ , for all  $(\mathbf{v}_R, \mathbf{w}_R) \in X_R \times X_R$  (cf. [5]), one can easily compute a  $P^1$  finite element (FE) approximation of the regular part  $\mathbf{u}_R$ .

The solution  $\mathbf{u}(t)$  of (6) can be decomposed continuously in time as  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_R(t) + \sum_\ell \kappa_\ell(t) \mathbf{u}_S^\ell$ : in the addition of  $\text{div } \mathbf{u} = g$ , one obtains (7)–(8), where  $\mathbb{M}^S$  is the singular mass matrix and  $\vec{\mu}_R''$  the vector with components  $(\mathbf{u}_R'' \mid \mathbf{u}_S^k)_0$ . The regular and singular subproblems remain coupled. (7)–(8) is semi-discretized in space ( $P^1$  FE for the regular part): the semi-discretized form of (7) is (9). Next, one uses a leap-frog scheme in time (with an ad hoc CFL condition) at times  $(t_n)_{n=0,1,\dots}$ .  $\mathbb{M}$  can be lumped without losing any accuracy (see [8]), which yields an explicit time-scheme. In order to decouple the regular and singular computations, one plugs the expression of  $\vec{\kappa}''$  from (8) in (7). This finally leads to a scheme called (10), not written here: computation of  $\vec{u}_R^{n+1}$ , once again implicit (but not too implicit, see below), then of  $\vec{\kappa}^{n+1}$ . One has the following:

**PROPOSITION.** – *The matrix used for the computation of  $\vec{u}_R^{n+1}$  in (10) is invertible, with or without lumping of  $\mathbb{M}$ . If  $\vec{u}_R$  is of dimension  $N_h$ , the cost of updating  $\vec{u}_R^{n+1}$  in (9) is  $O(N_h)$  after lumping (explicit case). In (10), the cost is  $O(K \cdot N_h)$ .*

Finally, the condition on the divergence of the regular part is taken into account by a dualization method thanks to an  $L^2$ -Lagrange multiplier and solved by a Uzawa algorithm [8].

The SCM also applies to other electromagnetic problems. Among them, the propagation of a TM mode (see [3] or [2]). Absorbing (nonhomogeneous) or mixed boundary conditions can also be taken into account;

domain with cuts can be handled. Furthermore, in a polyhedral domain of  $\mathbb{R}^3$ , the above algorithms will be applicable if one succeeds in discretizing the singular part.

## Introduction

Dans [3] et [2], nous avons considéré le problème de la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires en l'absence de charges dans un domaine polygonal non convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Pour cela, nous avons choisi de décomposer orthogonalement l'espace des solutions en un sous-espace régulier (composantes incluses dans  $H^1$ ) d'une part, et un sous-espace singulier d'autre part : c'est la *méthode du complément singulier* (MCS). En présence de charges, il est usuel de revenir au problème sans charges par l'intermédiaire d'une « correction de Poisson » (voir entre autres [4] et [9] pour des applications numériques). Cependant, lorsque la charge dépend du temps, cette méthode de « correction » nécessite la résolution additionnelle d'un système linéaire à chaque pas de temps. Pour pallier à cet inconvénient, nous proposons une extension de la MCS au cas avec charges, ce qui ouvre la voie à une résolution numérique efficace du système couplé de Vlasov–Maxwell dans un domaine non convexe.

### 1. Les problèmes modèles

Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal connexe et simplement connexe du plan, de frontière  $\Gamma$  et possédant  $K$  coins rentrants. Nous appellerons  $\nu = (\nu_x, \nu_y)^T$  la normale unitaire sortante en un point quelconque du domaine (coins exceptés), et  $\tau = (\nu_y, -\nu_x)^T$  la tangente associée. Dans la suite, les fonctions et les opérateurs à valeurs vectorielles seront notés en gras. On introduit les espaces fonctionnels suivants :

$$H = H(\text{div}, \Omega) \quad \text{et} \quad X = H(\text{div}, \Omega) \cap H_0(\text{rot}, \Omega). \quad (1)$$

L'application  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_X \mapsto (\text{rot } \mathbf{u} \mid \text{rot } \mathbf{v})_0 + (\text{div } \mathbf{u} \mid \text{div } \mathbf{v})_0$  définit sur  $X \times X$  un produit scalaire dont la norme induite, notée  $\|\cdot\|_X$ , est équivalente à la norme canonique. Dans le cas où la frontière  $\Gamma$  est de classe  $C^2$ , ou dans le cas où le domaine  $\Omega$  est convexe avec une frontière  $\Gamma$  lipschitzienne, l'espace  $X$  est inclus dans  $H^1(\Omega)^2$ . Ceci n'est plus vrai en présence de coins rentrants. Nous serons donc amenés à utiliser le sous-espace régularisé  $X_R$  de  $X$  :  $X_R = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2 ; \mathbf{u} \cdot \tau_\Gamma = 0\}$ .

Pour  $(f, g) \in L_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , on considère le *problème stationnaire (cas statique)* : trouver  $\mathbf{u} \in X$  telle que

$$\text{rot } \mathbf{u} = f, \quad \text{div } \mathbf{u} = g \quad \text{dans } \Omega. \quad (2)$$

L'unicité de la solution est une conséquence du fait que  $\|\cdot\|_X$  est une norme. L'existence se déduit classiquement de la décomposition de Helmholtz suivante, valable dans le cas bidimensionnel : tout champ  $\mathbf{u}$  de  $X$  se décompose sous la forme  $\mathbf{u} = \text{grad } \psi + \text{rot } \phi$ , où le couple  $(\psi, \phi) \in \Psi \times \Phi$  est caractérisé par  $\Delta\psi = \text{div } \mathbf{u}$  et  $\Delta\phi = -\text{rot } \mathbf{u}$ , avec

$$\Phi = \{\phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}; \Delta\phi \in L^2(\Omega), \partial\phi/\partial\nu_\Gamma = 0\} \quad \text{et} \quad \Psi = \{\psi \in H_0^1(\Omega); \Delta\psi \in L^2(\Omega)\}. \quad (3)$$

Étant donnés  $T > 0$ ,  $\mathbf{f} \in C^0(0, T; H) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)^2)$  et  $g \in C^1(0, T; L^2(\Omega))$  vérifiant  $\partial g/\partial t + \text{div } \mathbf{f} = 0$ ,  $\mathbf{u}_0 \in X$  telle que  $\text{div } \mathbf{u}_0 = g(0)$  et  $\mathbf{u}_1 \in H$ , on introduit le *problème d'évolution* : trouver  $\mathbf{u} \in C^0(0, T; X) \cap C^1(0, T; H)$  telle que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \text{rot } \text{rot } \mathbf{u} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{u} = g \quad \text{dans } \Omega, \quad (4)$$

avec les conditions initiales  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  et  $\partial\mathbf{u}/\partial t(0) = \mathbf{u}_1$ . On réécrit (4) sous forme variationnelle : trouver  $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0(0, T; H_0(\text{rot}, \Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H)$  telle que

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{u} | \mathbf{v})_0 + (\text{rot } \mathbf{u} | \text{rot } \mathbf{v})_0 = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} | \mathbf{v}\right)_0, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{rot}, \Omega), \text{ div } \mathbf{u} = g \text{ dans } \Omega, \quad (5)$$

avec les mêmes conditions initiales. D'après [1], ce problème, considéré comme la « partie électrique » des équations de Maxwell dans  $\mathbb{R}^2$  (mode TE), admet une solution unique ; il en est de même pour l'analogue de (5) posé dans  $X$  : trouver  $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0(0, T; X) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H)$  telle que

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{u} | \mathbf{v})_0 + (\mathbf{u} | \mathbf{v})_X = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} | \mathbf{v}\right)_0 + (g | \text{div } \mathbf{v})_0, \quad \forall \mathbf{v} \in X, \text{ div } \mathbf{u} = g \text{ dans } \Omega. \quad (6)$$

Comme on le verra au paragraphe 4, l'ajout des termes  $(\text{div } \mathbf{u} | \text{div } \mathbf{v})_0$  et  $(g | \text{div } \mathbf{v})_0$  simplifie le problème, grâce aux propriétés d'orthogonalité.

## 2. Décomposition en parties régulière et singulière

Dans [3], nous avons montré que, en l'absence de charges, l'espace des solutions admissibles  $V = \{\mathbf{u} \in X ; \text{div } \mathbf{u} = 0\}$ , se décompose en  $V = V_R \overset{\perp_X}{\oplus} V_S$ , avec  $V_R = V \cap H^1(\Omega)^2$ . Pour caractériser  $V_S$ , notons tout d'abord que l'opérateur  $\Delta$  est bijectif de  $\Phi$  dans  $L_0^2(\Omega)$ . Ensuite, d'après [6], si on appelle  $\Phi_R = \Phi \cap H^2(\Omega)$ , le sous-espace « singulier »  $S_n$  de  $L_0^2(\Omega)$ , qui est l'orthogonal de l'image par l'opérateur  $\Delta$  de  $\Phi_R$ , est de dimension  $K$ , le nombre de coins rentrants. Enfin, on a  $V_S = (\text{rot})^{-1}S_n$ , et par conséquent  $\dim(V_S) = K$ .

Il en est de même pour l'espace des solutions avec charges :  $X = X_R \overset{\perp_X}{\oplus} X_S$ . Si on note  $S_d$  le sous-espace « singulier » de  $L^2(\Omega)$  qui est orthogonal à l'image de l'opérateur  $\Delta$  défini sur  $\Psi_R = \Psi \cap H^2(\Omega)$ , on peut démontrer le résultat suivant, valable également lorsque le domaine  $\Omega$  est un polyèdre à bord lipschitzien de  $\mathbb{R}^3$ .

**THÉORÈME 2.1.** – *Le produit scalaire  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\text{div } \mathbf{u} | \text{div } \mathbf{v})_0$  définit sur  $X_S \times X_S$  un produit scalaire équivalent à  $(\cdot | \cdot)_X$ . De plus, l'application  $\text{div}$  de  $X_S$  dans  $S_d$  est un isomorphisme.*

## 3. Quelques considérations sur l'obtention d'une base singulière

Comme la dimension de  $S_d$  est aussi égale à  $K$  (cf. [6]), on en déduit de même que  $\dim(X_S) = K$ . Le problème qui se pose alors est de construire une base de ce sous-espace singulier. Soit donc un élément  $\mathbf{u}_S$  de  $X_S$  :  $\mathbf{u}_S = \mathbf{grad } \psi_S + \mathbf{rot } \phi_S$ . On introduit les décompositions orthogonales (également valables en 3d)  $\Phi = \Phi_R \overset{\perp_\Delta}{\oplus} \Phi_S$  et  $\Psi = \Psi_R \overset{\perp_\Delta}{\oplus} \Psi_S$ , par rapport au produit scalaire équivalent  $(\eta, \mu) \mapsto (\Delta\eta | \Delta\mu)_0$ .

D'après le théorème 2.1, la définition de  $S_d$  et la décomposition de  $\Psi$ , on en déduit que  $\psi_S \in \Psi_S$ . Ensuite, par orthogonalité dans  $X$ , on a  $(\mathbf{u}_S | \mathbf{rot } \phi_R)_X = 0$  pour tout élément  $\phi_R$  de  $\Phi_R$ . En d'autres termes,  $\Delta\phi_S$  est orthogonal à  $\Delta\Phi_R$  dans  $L_0^2(\Omega)$ , soit  $\phi_S \in \Phi_S$ . On retrouve ainsi le résultat de [10], à savoir  $X_S \subset \mathbf{grad } \Psi_S \oplus \mathbf{rot } \Phi_S$ . Cependant, on n'a pas l'inclusion inverse. En effet,  $X_S$  est de dimension  $K$ , alors que  $\mathbf{grad } \Psi_S$  et  $\mathbf{rot } \Phi_S$  sont deux sous-espaces orthogonaux de  $X$ , tous deux de dimension  $K$  (une seconde raison est que l'image par l'application  $\text{div}$  de  $\mathbf{rot } \Phi_S$  est réduite à  $\{0\}$ ).

Pour résoudre ce problème, considérons une base de  $\Phi_S$ , notée  $(\phi_S^k)_k$ , telle que  $\phi_S^k$  est de régularité  $H^2$  dans  $\Omega \setminus \mathcal{V}_k$ , où  $\mathcal{V}_k$  est un voisinage du  $k$ -ième coin rentrant (ce qui est loisible, voir [3]). On construit une base  $(\psi_S^k)_k$  de  $\Psi_S$  possédant les mêmes propriétés. Par le calcul, on vérifie alors aisément que, pour chaque  $k$ ,  $\mathbf{rot } \phi_S^k$  et  $\mathbf{grad } \psi_S^k$  ont leur partie la moins régulière proportionnelles entre elles dans  $\mathcal{V}_k$ . Il existe donc une constante non nulle  $c_k$  telle que  $\mathbf{x}_R^k = \mathbf{grad } \psi_S^k + c_k \mathbf{rot } \phi_S^k$  appartient à  $H^1(\Omega)^2 \cap X$ , c'est-à-dire à  $X_R$ . Qui plus est, la famille  $(\mathbf{x}_R^k)_k$  est libre, puisque l'image de cette famille par l'application

div engendre  $S_d$ . Pour conclure, il suffit de construire une famille libre  $(\mathbf{u}_S^k)_k$  de l'orthogonal de  $(\mathbf{x}_R^k)_k$  dans  $\mathbf{grad} \Psi_S \oplus \mathbf{rot} \Phi_S : (\mathbf{u}_S^k)_k$  est une base de  $X_S$ .

Les algorithmes de calcul de cette base se déduisent facilement de ceux utilisés pour le calcul d'une base de  $V_S$  : ils ont été abondamment décrits dans [3] pour la partie théorique, et dans [2] pour la partie numérique. Ils sont basés sur une méthode de type Dirichlet–Neumann ou Steklov–Poincaré, avec un développement en série au voisinage des coins rentrants, et la résolution d'un problème aux limites elliptiques hors de ce voisinage.

#### 4. Résolution des problèmes (2) et (6)

Supposons la base de  $X_S$ ,  $(\mathbf{u}_S^k)_k$ , calculée.

La résolution de (2) est aisée.

Soit une décomposition de la solution  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_S$ , avec  $(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_S) \in X_R \times X_S$ , et  $\mathbf{u}_S = \sum_{\ell} \kappa_{\ell} \mathbf{u}_S^{\ell}$ .

On a  $(\mathbf{u} | \mathbf{v})_X = (f | \mathbf{rot} \mathbf{v})_0 + (g | \mathbf{div} \mathbf{v})_0$ , pour tout  $\mathbf{v}$  dans  $X$ . En prenant successivement  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_S^k$ , pour  $1 \leq k \leq K$ , on obtient le système linéaire d'ordre  $K$ ,  $\mathbb{K}^S \vec{\kappa} = \mathbb{R}^S \vec{f}^S + \mathbb{D}^S \vec{g}^S$ , avec des notations évidentes. Par construction,  $\mathbb{K}^S$  étant inversible, on peut calculer  $\vec{\kappa}$  et donc  $\mathbf{u}_S$ .

Il suffit ensuite de résoudre un problème dont la solution est  $\mathbf{u}_R$ . On écrit que  $(\mathbf{u}_R | \mathbf{v}_R)_X$  est égal à  $(f | \mathbf{rot} \mathbf{v}_R)_0 + (g | \mathbf{div} \mathbf{v}_R)_0$ , pour tout  $\mathbf{v}_R$  dans  $X_R$ . Qui plus est, on a l'identité *primordiale*  $(\mathbf{grad} \mathbf{v}_R | \mathbf{grad} \mathbf{w}_R)_0 = (\mathbf{v}_R | \mathbf{w}_R)_X$  pour tout couple  $(\mathbf{v}_R, \mathbf{w}_R)$  de  $X_R \times X_R$  (cf. [5]). Ainsi, à l'aide d'une discrétisation par élément fini de type Lagrange  $P^1$ , on calcule *simplement* une approximation de la partie régulière, une fois la condition aux limites prise en compte.

Pour résoudre (6), d'après [1], on décompose sa solution en  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_R(t) + \sum_{\ell} \kappa_{\ell}(t) \mathbf{u}_S^{\ell}$  continûment en temps. Comme pour le problème statique, on procède à un découplage en parties régulière et singulière, qui sera cette fois *partiel*. En plus de la condition en divergence ( $\mathbf{div} \mathbf{u} = g$  dans  $\Omega$ ), on arrive en effet aux deux problèmes : trouver  $\mathbf{u}_R \in X_R$  et  $(\kappa_k)_k$  telles que

$$(\mathbf{u}_R'' | \mathbf{v}_R)_0 + (\mathbf{u}_R | \mathbf{v}_R)_X = -(\mathbf{f}' | \mathbf{v}_R)_0 + (g | \mathbf{div} \mathbf{v}_R)_0 - \sum_k \kappa_k'' (\mathbf{u}_S^k | \mathbf{v}_R)_0, \quad \forall \mathbf{v}_R \in X_R, \quad (7)$$

$$\mathbb{M}^S \vec{\kappa}'' + \mathbb{K}^S \vec{\kappa} = -\mathbb{M}^S \vec{f}^S + \mathbb{D}^S \vec{g}^S - \vec{\mu}_R'', \quad (8)$$

où  $\mathbb{M}^S$  est la matrice de masse *singulière* et  $\vec{\mu}_R''$  le vecteur de composantes  $(\mathbf{u}_R'' | \mathbf{u}_S^k)_0$ .

On procède ensuite à la semi-discrétisation en espace du problème variationnel (7)–(8), avec la condition de divergence. Comme pour le problème statique, on discrétise la partie régulière par une méthode EF de type Lagrange  $P^1$ , et on suppose  $(\mathbf{u}_S^k)_k$  connue. La formulation semi-discrétisée de l'équivalent de (7) s'écrit

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{M} \vec{u}_R + \mathbb{K} \vec{u}_R = -\frac{d}{dt} \mathbb{M} \vec{f} + \mathbb{D} \vec{g} - \sum_k \frac{d^2}{dt^2} \kappa_k \vec{\lambda}_k, \quad (9)$$

avec des notations évidentes. Ensuite, on utilise un schéma en temps de type saute-mouton (avec une condition CFL heuristique ad hoc) aux instants  $(t_n)_{n=0,1,\dots}$ . On peut effectuer la condensation de  $\mathbb{M}$  (en conservant l'ordre du schéma global), ce qui rend l'avancement en temps de (9) *explicite*. Afin de *découpler* le calcul des parties régulière et singulière approchées, on injecte dans (7) l'expression des composantes de  $\vec{\kappa}''$  obtenue d'après (8). On discrétise alors, ce qui donne la formulation (10), que l'on omet d'écrire. On arrive alors à un avancement découplé : calcul de  $\vec{u}_R^{n+1}$ , puis de  $\vec{\kappa}^{n+1}$ . Le calcul de  $\vec{\kappa}^{n+1}$  s'effectue sans difficulté, puisque le système d'équations différentielles n'est pas raide (cf. [3]). En revanche, le calcul de la partie régulière est devenu *implicite*, même après condensation de la matrice de masse. Fort heureusement, on peut démontrer aisément les deux résultats suivants, l'un portant sur la validité de la méthode, et l'autre sur sa complexité.

PROPOSITION 4.1. – La matrice permettant de calculer  $\vec{u}_R^{n+1}$  dans (10) est inversible, avec ou sans condensation de la matrice  $\mathbb{M}$ .

PROPOSITION 4.2. – Si  $\vec{u}_R$  est de dimension  $N_h$ , le coût de l'avancement en temps de (9) est  $O(N_h)$  après condensation (cas explicite). Dans (10), le coût passe à  $O(K \cdot N_h)$ .

La preuve de la seconde proposition est une conséquence du fait que la modification sur la matrice (passage de (9) à (10)) est de rang  $K$ , et se déduit aisément des formules d'inversion classiques (voir [7]).

Il reste, pour conclure, à déterminer un algorithme comprenant la prise en compte de la condition de divergence, qui s'écrit  $\text{div } \mathbf{u}_R = \tilde{g} = g - \sum_{\ell} \kappa_{\ell} \text{div } \mathbf{u}_S^{\ell}$ . Pour calculer  $\vec{u}_R^{n+1}$ , on impose cette condition à l'aide d'une formulation mixte. Le multiplicateur de Lagrange associé (qui appartient à  $L^2(\Omega)$ ) est alors déterminé en résolvant le problème dual par un algorithme de type Uzawa [8]. Quant au calcul de  $\vec{K}^{n+1}$ , la condition portant sur la divergence est automatiquement prise en compte.

### Conclusion et extensions possibles

Nous avons montré que la méthode du complément singulier s'adapte au cas d'un problème d'électromagnétisme (mode TE) posé dans un domaine de  $\mathbb{R}^2$ , que ce soit pour le problème stationnaire (2) ou pour le problème d'évolution en temps (4). Outre le caractère explicite de la résolution de (4), les champs calculés sont *continus*, ce qui fait de la méthode un bon complément d'un solveur particulière pour résoudre le système Vlasov–Maxwell.

Le calcul d'un mode TM, pour lequel la divergence du champ est toujours nulle, a déjà été étudié dans [3] et [2]. Parmi les extensions physiques possibles, notons que le cas d'une onde entrante (condition aux limites non nulle) peut être traité comme dans [2].

On ce qui concerne des *applications plus mathématiques*, le cas d'une condition aux limites mêlée ( $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\Gamma_1} = 0$ ,  $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\Gamma_2} = 0$ ) ou d'un domaine présentant une fracture sont également résolus par une approche similaire à ce qui a été exposé.

Enfin, dans un domaine polyédrique de  $\mathbb{R}^3$ , les méthodes et algorithmes décrits au paragraphe 4 seront applicables si on réussit à discrétiser la partie singulière par une méthode de type Galerkin.

### Références bibliographiques

- [1] Assous F., Ciarlet P., Jr., Quelques résultats sur la régularité en temps des équations de Maxwell instationnaires, C. R. Acad. Sc. Paris, Série I 327 (1998) 719–724.
- [2] Assous F., Ciarlet P., Jr., Segré J., Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domains : the singular complement method, J. Comput. Phys. (à paraître).
- [3] Assous F., Ciarlet P., Jr., Sonnendrücker E., Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners, Modél. Math. Anal. Numér. 32 (1998) 359–389.
- [4] Birdsall C.K., Langdon A.B., Plasmas Physics via Computer Simulation, Mac Graw-Hill, New York, 1985.
- [5] Costabel M., A coercive bilinear form for Maxwell's equations, J. Math. Anal. and Appl. 157 (1991) 527–541.
- [6] Grisvard P., Singularities in Boundary Value Problems, RMA 22, Masson, Paris, 1992.
- [7] Hager W.W., Updating the inverse of a matrix, SIAM Review 31 (1989) 221–239.
- [8] Heintzé E., Résolution des équations de Maxwell tridimensionnelles instationnaires par une méthode d'éléments finis conformes, Thèse de l'Université Paris-VI, 1992.
- [9] Hermeline F., Two coupled particle-finite volume methods using Delaunay–Voronoi meshes for the approximation of Vlasov–Poisson and Vlasov–Maxwell equations, J. Comput. Phys. 106 (1993) 1–18.
- [10] Moussaoui M., Espaces  $H(\text{div}, \text{rot}, \Omega)$  dans un polygone plan, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 322 (1996) 225–229.