Stage de Master 2, mathématiques appliquées à la mécanique des fluides

Étude de la T-coercivité explicite pour discrétiser les équations de Navier-Stokes avec l'élément fini mixte $\mathbf{P}^1 \times P^0$.

Encadrement :	Erell Jamelot	erell.jamelot@cea.fr
Collaboration :	Patrick Ciarlet	patrick.ciarlet@ensta-paris.fr

Le stage est proposé aux étudiants préparant un diplôme de niveau Master 2 en mathématiques appliquées, connaissant la méthode des éléments finis ou des volumes finis et ayant de bonnes capacités en analyse numérique et programmation. Il se déroulera au CEA de Paris-Saclay dans le Laboratoire de Modélisation et de Simulation en mécanique des Fluides (LMSF), au sein du Service de Thermohydraulique et de Mécanique des Fluides (STMF) de la Direction des Énergies (DES), en collaboration avec Patrick Ciarlet, professeur à l'ENSTA (Laboratoire de Mathématiques Appliquées).

Les équations de Navier-Stokes incompressibles sont parmi les modèles les plus utilisés pour décrire les écoulements d'un fluide newtonien (c'est-à-dire un fluide dont la viscosité est indépendante des forces extérieures appliquée au fluide). Ces équations modélisent le champ de vitesse et le champ de pression du fluide. En notant $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 le domaine physique et T le temps final de l'étude, elles s'écrivent : Trouver le couple $(\mathbf{u}, p)$ tel que

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ et } \mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T). \qquad (1)$$

Le vecteur $\mathbf{u}$ représente le champ de vitesse du fluide et le scalaire p la pression du fluide divisée par la masse volumique, supposée constante. Le paramètre ν représente la viscosité cinématique du fluide, et le vecteur $\mathbf{f}$ la résultante des forces extérieures agissant sur le fluide, divisée par la masse volumique. Ce système d'équations est complété avec des conditions initiales et des conditions aux limites adéquates. La première des deux équations n'est autre que la loi de Newton, tandis que la seconde découle de la conservation de la masse dans le cas d'un fluide incompressible.

L'approximation numérique de ces équations est un véritable défi en raison de leur caractère tridimensionnel et instationnaire, de la contrainte de divergence nulle et enfin de la non-linéarité du terme de convection $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$.

Dans le cas stationnaire, on se ramène au problème de Stokes, qui s'écrit :

$$\text{Trouver le couple } (\mathbf{u}, p) \text{ tel que } -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ et } \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \qquad (2)$$

muni de conditions aux limites. Par la suite, on considère que $\mathbf{u}_{|\partial\Omega} = 0$ et $p \in L^2_0(\Omega)$, où $L^2_0(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) | \int_\Omega q = 0\}$. Posons $\mathbf{H}^1_0(\Omega) = (H^1_0(\Omega))^d$. La formulation variationnelle associée au problème (2) s'écrit :
Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{X}$ tel que pour tout $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$

$$a((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) := \nu(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1_0(\Omega)} - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p)_0 + (\operatorname{div} \mathbf{u}, q)_0 = \ell_{\mathbf{f}}((\mathbf{v}, q)), \tag{3}$$

avec $\ell_{\mathbf{f}}((\mathbf{v}, q)) := \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)}$.

On peut montrer que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est T-coercive [1], c'est-à-dire qu'il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega))$ bijectif tel que la forme bilinéaire $a_T((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, p)) := a((\mathbf{u}, p), T(\mathbf{v}, p))$ est coercive. On peut alors réécrire le problème (3) sous la forme coercive suivante [2] : Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ tel que pour tout $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$

$$a_T((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = \ell_{\mathbf{f}}(T((\mathbf{v}, q)). \tag{4}$$

La formulation coervice (4) peut être discrétisé avec d'une paire d'éléments finis non stable pour discrétiser la formulation classique (3), comme la paire $\mathbf{P}^1 - P^0$ [3]. Cependant, pour cette discrétisation, on a besoin de connaître une approximation de la pression. Celle-ci peut être calculée en discrétisant la formulation classique (3) à l'aide d'une paire d'éléments finis stable, comme la paire $\mathbf{P}^1_{nc} \times P^0$ [4, Exemple 4]. Cette méthode en deux étapes permet d'améliorer notablement les erreurs obtenues, d'autant plus dans le cas où la viscosité est petite. Or, dans les applications qui intéressent le LMSF, la viscosité est de l'ordre de 10^{-5}. On propose dans ce stage d'utiliser cette stratégie pour résoudre les équations de Navier-Stokes à l'aide de la paire $\mathbf{P}^1 \times P^0$, en ayant calculé la pression initiale avec la paire $\mathbf{P}^1_{nc} \times P^0$. L'implémentation se fera sur une maquette numérique Octave. On pourra s'inspirer des travaux développés dans[5].

References

[1] A.-S. Bonnet-Ben Dhia and P. Ciarlet Jr. Méthodes variationnelles pour l'analyse de problèmes non coercifs, 2022. Cours du M2 AMS (IPP).

[2] P. Ciarlet Jr. and E. Jamelot. Explicit T-coercivity for Stokes problem: a coercive finite element discretization, 2024. soumis.

[3] Y. Li and L.T. Zikatanov. New stabilized $P_1 \times P_0$ finite element methods for nearly inviscid and incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 393:114815, 2022.

[4] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *RAIRO, Sér. Anal. Numér.*, 7(3):33–75, 1973.

[5] J.-L. Guermond and P.D. Minev. High-order time stepping for the Navier–Stokes equations with minimal computational complexity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 310:92–103, 2017.