MA201 La méthode des éléments finis.
Corrigé du contrôle continu du 13 novembre 2009.

Problème : Autour de la diffusion

Partie 1 Diffusion neutronique (10 pts)

1. (a) **(0,5 pt)** On cherche une solution u du problème (1) dans $L^2(\Omega)$ qui vérifie $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega < \infty$. u devra donc être dans $H^1(\Omega)$. D'autre part, on impose une condition aux limites de Dirichlet homogène (condition essentielle). Par conséquent, on va poser la formulation variationnelle associée à ce problème dans $H_0^1(\Omega)$.

   (b) **(1 pt)** Donnons deux méthodes pour traiter cette question.

   – Puisque u est dans $H_0^1(\Omega)$, ∇u est un élément de $L^2(\Omega)^2$ et par conséquent $D\nabla u$ également. Ceci prouve que $D\nabla u$ est un élément de $H(\mathrm{div};\Omega) = \{w \in L^2(\Omega) \,|\, \mathrm{div}\, w \in L^2(\Omega)\}$. La Proposition 1.17. page 29 du polycopié indique alors que si v est dans $H_0^1(\Omega)$, on a la formule d'intégration par parties de type Stokes

   $$\int_\Omega -\mathrm{div}(D\nabla u) v \, d\Omega = \int_\Omega D\nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega.$$

   Ceci permet de montrer que la formulation variationnelle associée à (1) est

   $$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega D\nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{FV1}$$

   – Une autre façon de procéder consiste à faire l'intégration par parties au sens des distributions. Si v est dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on peut écrire

   $$\begin{aligned} \int_\Omega f\, v \, d\Omega = \int_\Omega -\mathrm{div}(D\nabla u) v \, d\Omega &= \langle -\mathrm{div}(D\nabla u), v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\ &= \langle D\nabla u, \nabla v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^2, \mathcal{D}(\Omega)^2} \\ &= \int_\Omega D\nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega. \end{aligned}$$

   On aboutit à (FV1) en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

   (c) **(0,5 pt)** Si u est solution de (FV1) alors $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega < \infty$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ car u est dans $H_0^1(\Omega)$.

D'autre part, en raisonnant au sens des distributions, pour $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\, \mathcal{D}(\Omega)} &= \int_\Omega f\, v\, d\Omega \\ &= \int_\Omega D\nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega \\ &= \langle D\nabla u, \nabla v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^2,\, \mathcal{D}(\Omega)^2} \\ &= \langle -\mathrm{div}(D\nabla u), v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\, \mathcal{D}(\Omega)} \end{aligned}$$

Ainsi, $-\mathrm{div}(D\nabla u) = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Et, puisque $f \in L^2(\Omega)$, on a $-\mathrm{div}(D\nabla u) = f$ presque partout dans Ω.

2. (a) **(1pt)** Vérifions les hypothèses du théorème de Lax-Milgram :
   - $H_0^1(\Omega)$ muni de norme $\|.\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla .\|_{L^2(\Omega)^2}$ est un espace de Hilbert.
   - $l(v) = \displaystyle\int_\Omega f v\, d\Omega$ est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. En effet, on a
     $$\begin{aligned} |l(v)| &\le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \sqrt{C_P}\, \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$
     où C_P désigne la constante de Poincaré.
   - $a(u, v) = \displaystyle\int_\Omega D\nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega$ est une forme bilinéaire, continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)^2$. En effet, d'une part on a
     $$|a(u, v)| \le \max(D_1, D_2)\, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$
     D'autre part, on peut écrire
     $$|a(u, u)| \ge \min(D_1, D_2)\, \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$
     Le théorème de Lax-Milgram (polycopié page 39) permet de conclure que la formulation variationnelle est bien posée.

   (b) **(1pt)** D'après la question 1. (c), la solution u de (FV1) vérifie $-D_i \Delta u = f$ presque partout dans Ω_i, $i = 1, 2$.

   Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega) (\subset H_0^1(\Omega))$ une fonction test dans (FV1).

$$\begin{aligned} \int_\Omega f v\, d\Omega &= \int_\Omega D\nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega \\ &= \sum_{i=1,\,2} \int_{\Omega_i} D_i \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega \\ &= \sum_{i=1,\,2} D_i \left[-\int_{\Omega_i} \Delta u v\, d\Omega + \left\langle \frac{\partial u}{\partial n_i}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i),\, H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)} \right] \end{aligned}$$

D'après les égalités $-D_i\Delta u = f$ presque partout dans Ω_i, il reste

$$\sum_{i=1,2} D_i \left\langle \frac{\partial u}{\partial n_i}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i),\, H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)}.$$

Par ailleurs, puisque $v|_{\partial\Omega_i\cap\partial\Omega} = 0$ et $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$, on conclut que

$$\left\langle D_1\frac{\partial u}{\partial n_1} - D_2\frac{\partial u}{\partial n_1}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma),\, H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} = 0.$$

En d'autres termes,

$$D_1\frac{\partial u}{\partial n_1} = D_2\frac{\partial u}{\partial n_1} \text{ sur l'interface } \Sigma.$$

3. (a) **(1,25pt)** Tout d'abord, par symétrie du domaine, lorsque (x, y) décrit Ω_1 (respectivement Ω_2, Σ, $\partial\Omega$), $(-x, y)$ décrit Ω_1 (respectivement Ω_2, Σ, $\partial\Omega$). Observons ensuite que $u_{sym} \in L^2(\Omega)$ et $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_{sym}|^2\, d\Omega <$ ∞. En effet, pour presque tout $(x, y) \in \Omega$, on a $\frac{\partial u_{sym}}{\partial x}|_{(x,y)} = -\frac{\partial u}{\partial x}|_{(-x,y)}$ et $\frac{\partial u_{sym}}{\partial y}|_{(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{(x,y)}$. On a donc $u_{sym} \in H^1(\Omega)$. De plus, si $(x, y) \in \partial\Omega$, $(-x, y) \in \partial\Omega$ et donc $u_{sym} = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$. Enfin, pour presque tout $(x, y) \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}
-\mathrm{div}(D\nabla u_{sym})(x,y) &= -\tfrac{\partial}{\partial x}\left(D\tfrac{\partial u_{sym}}{\partial x}\right)(x,y) - \tfrac{\partial}{\partial y}\left(D\tfrac{\partial u_{sym}}{\partial y}\right)(x,y)\\
&= -\tfrac{\partial}{\partial x}\left(D(x,y)\tfrac{\partial u_{sym}}{\partial x}|_{(x,y)}\right) - \tfrac{\partial}{\partial y}\left(D(x,y)\tfrac{\partial u_{sym}}{\partial y}|_{(x,y)}\right)\\
&= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(D(-x,y)\tfrac{\partial u}{\partial x}|_{(-x,y)}\right) - \tfrac{\partial}{\partial y}\left(D(x,y)\tfrac{\partial u}{\partial y}|_{(x,y)}\right)\\
&= -\tfrac{\partial}{\partial x'}\left(D(x',y)\tfrac{\partial u}{\partial x'}|_{(x',y)}\right) - \tfrac{\partial}{\partial y}\left(D(x',y)\tfrac{\partial u}{\partial y}|_{(x',y)}\right)\\
&= f(x',y) = f(-x,y) = f(x,y).
\end{aligned}$$

Ainsi, u_{sym} vérifie (1). D'après l'unicité de la solution (question 2 (a)), on déduit $u_{sym} = u$. Ceci prouve que u est symétrique par rapport à l'axe (Ox). De la même façon, on montre que u est symétrique par rapport à l'axe (Oy). En conclusion, u est symétrique par rapport aux axes (Ox) et (Oy).

(b) **(1,25pt)** Bien sûr, $u|_{\Omega_{xy}} \in H^1(\Omega_{xy})$, $u = 0$ presque partout sur $\partial\Omega_{xy} \cap \partial\Omega$ et $-\mathrm{div}(D\nabla u) = f$ presque partout dans Ω_{xy}. De plus, on remarque que, d'une part

$$\frac{\partial u_{sym}}{\partial x}|_{(x,y)} = -\frac{\partial u}{\partial x}|_{(-x,y)}$$

(car $u_{sym}(-x,y)=u(x,y)$). D'autre part,

$$\frac{\partial u_{sym}}{\partial y}|_{(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{(x,y)}.$$

Ainsi, lorsque $x=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{(0,y)} = 0$ et donc $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur (Oy).

De même, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{(x,0)} = 0$ et donc $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur (Ox).

On en conclut que $V = \{v \in H^1(\Omega_{xy}) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{xy} \cap \partial\Omega\}$ puisqu'on a une condition aux limites essentielles sur la partie de la frontière $\partial\Omega_{xy} \cap \partial\Omega$.

(c) **(0,5pt)** Ceci permet de réduire par quatre la dimension du problème à résoudre.

4. (a) **(1pt)** L'élément fini de Lagrange Q^1 est défini par (K_l, Σ_l, P_l) :

$$\begin{aligned} K_l &= \text{carré} \\ \Sigma_l &= 4 \text{ sommets du carré} \\ P_l &= \{a + bx + cy + dxy, (x,y) \in K_l\} \end{aligned}$$

Si on choisit un maillage de $\overline{\Omega_{xy}}$ formé de carrés $(K_l)_{1\leq l \leq n}$ et si on note $\{M_i\}_{1\leq i\leq N_0}$ les sommets de ces carrés n'appartenant pas à $\partial\Omega$, on construit donc

$$V_h = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_{xy}}) | v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_{xy} \text{ et } v_h|_{K_l} \in P_l, 1 \leq l \leq L \right\}$$

NB. Une base est donnée par $(w_i)_{1\leq i \leq N_0}$: $w_i \in V_h$, $w_i(M_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq j \leq N_0$.

Le problème variationnel en discret est alors :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{u}_h \in V_h \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_{\Omega_{xy}} D\nabla \underline{u}_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega_{xy}} f\, v_h \, d\Omega, \ \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \qquad \text{(FV2D)}$$

(b) **(0,5pt)** On choisit $v_h = w_i$ dans (FV2D), $i = 1..N_0$, et on exprime $\underline{u}_h$ dans la base des $(w_j)_j$, c'est-à-dire : $\underline{u}_h = \sum_j \alpha_j\, w_j$, avec $\alpha_j = \underline{u}_h(M_j)$:

$$\begin{aligned} F_i = \int_{\Omega_{xy}} f\, w_i \, d\Omega &= \textstyle\sum_j \alpha_j \displaystyle\int_{\Omega_{xy}} D\nabla w_j \cdot \nabla w_i \, d\Omega \\ &= \textstyle\sum_j \mathbb{K}_{ij}\alpha_j, \text{ avec } \mathbb{K}_{ij} = \displaystyle\int_{\Omega_{xy}} D\nabla w_j \cdot \nabla w_i \, d\Omega. \end{aligned}$$

On déduit que $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_0}$ de composantes α_j est solution de

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_0} \text{ tel que} \\ \mathbb{K}\vec{\alpha} = \vec{F} \text{ dans } \mathbb{R}^{N_0}, \end{array} \right.$$

avec $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N_0 \times N_0}$ de coefficients $\mathbb{K}_{ij}$ et $\vec{F} \in \mathbb{R}^{N_0}$ de composantes F_i.

NB. Si on choisit le maillage de sorte que tous les carrés soient ou bien dans $\overline{\Omega_1}$ ou bien dans $\overline{\Omega_2}$, alors on a

$$\int_{\Omega_{xy}} D\nabla w_j \cdot \nabla w_i \, d\Omega = \sum_l \int_{\overset{\circ}{K}_l} D\nabla w_j \cdot \nabla w_i \, d\Omega = \sum_l D|_{\overset{\circ}{K}_l} \int_{\overset{\circ}{K}} \nabla w_j \cdot \nabla w_i \, d\Omega,$$

ce qui simplifie les calculs.

5. (c) **(1pt)** $\mathbb{K}$ est symétrique, définie-positive, donc inversible. D'autre part, $\mathbb{K}$ est creuse (voir chapitre 3 du polycopié). En effet, si $\mathbb{K}_{ij} \neq 0$ alors supp $(w_i) \cap$ supp (w_j) contient au moins un carré. En d'autres termes, M_i et M_j sont sommets d'un même carré. Ceci autorise au plus <u>neuf</u> coefficients non-nuls par ligne de la matrice $\mathbb{K}$.
6. (d) **(0,5pt)** On a $P^1 \subset P_l$ mais $P^2 \not\subset P_l$. D'après les estimations d'erreur (Théorème 2.4 page 88 du polycopié), si $u \in H^t(\Omega_{xy})$, avec $t \geq 2$, on aura

$$\|\underline{u} - \underline{u}_h\|_{H^1(\Omega_{xy})} \leq C\, h\, |\underline{u}|_{H^2(\Omega_{xy})}\,,$$

avec C indépendante de $\underline{u}$ et de h.

Partie 2 Convection-Diffusion (4 pts)

1. **(1,5pt)** On recherche $\varphi \in H^1(\Omega)$. D'autre part, comme on impose la condition aux limites essentielle $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$, on va se placer dans $H_0^1(\Omega)$.

Puisque, $f - \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in \Psi = \{w \in H^1(\Omega), \Delta w \in L^2(\Omega)\}$. On peut donc intégrer par parties avec la formule de Green classique (Proposition 1.16. du polycopié). Pour $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\,\psi\, d\Omega &= -\int_\Omega \Delta\varphi\,\psi\, d\Omega + \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{v}\,\psi\, d\Omega \\ &\overset{I.P.P.}{=} \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\, d\Omega + \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{v}\,\psi\, d\Omega. \end{aligned}$$

Ainsi, φ est bien solution de la formulation variationnelle (FV3).

Réciproquement, si φ est solution de (FV3), $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et donc $\varphi = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$ et $\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, d\Omega < \infty$. En raisonnant au sens des distributions, on trouve, pour $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
\langle f, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} &= \int_\Omega f \, \psi \, d\Omega \\
&= \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, d\Omega + \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{v} \, \psi \, d\Omega \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^3 \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \, d\Omega + \langle \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{v}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^3 \displaystyle\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} + \langle \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{v}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\
&= -\textstyle\sum_{i=1}^3 \displaystyle\left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x_i}, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} + \langle \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{v}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\
&= \langle -\Delta\varphi + \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{v}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} ,
\end{aligned}
$$

où l'on a dérivé au sens des distributions.

Ainsi, $f = -\Delta\varphi + \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{v}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme $f \in L^2(\Omega)$, on a cette égalité dans $L^2(\Omega)$ et donc presque partout dans Ω.

2. **(1pt)** Vérifions les hypothèses du théorème de Lax-Milgram :
   - $H_0^1(\Omega)$ muni de norme $\|.\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla.\|_{L^2(\Omega)^2}$ est un espace de Hilbert.
   - $l(\psi) = \displaystyle\int_\Omega f \, \psi \, d\Omega$ est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ (voir Partie 1, question 2 (a)).
   - $a(\varphi, \psi) = \displaystyle\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, d\Omega + \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{v} \, \psi \, d\Omega$ est une forme bilinéaire et continue sur $H_0^1(\Omega)^2$. En effet, on a

   $$
   \begin{aligned}
   |a(\varphi, \psi)| &\leq \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \\
   &\leq \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)^3} + \sqrt{C_P} \, \|\boldsymbol{v}\|_{L^\infty(\Omega)^3} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} \\
   &\leq (1 + \sqrt{C_P} \, \|\boldsymbol{v}\|_{L^\infty(\Omega)^3}) \, \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)^3} ,
   \end{aligned}
   $$

   où C_P désigne la constante de Poincaré.

   Peut-on montrer que a est coercive sur $H_0^1(\Omega)^2$?

   $$
   a(\varphi, \varphi) = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi \, d\Omega + \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{v} \, \varphi \, d\Omega
   $$

Il faut pouvoir traiter le second terme.

3. **(1,5 pt)** Pour conclure, il faut comparer les deux termes de $a(\varphi,\varphi)$. Or, nous savons que

$$\left|\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{v}\,\varphi\,d\Omega\right| \;\le\; \sqrt{C_P}\;\|\boldsymbol{v}\|_{L^\infty(\Omega)^3}\,\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,.$$

Ainsi,

$$a(\varphi,\varphi) \;\ge\; (1-\sqrt{C_P}\;\|\boldsymbol{v}\|_{L^\infty(\Omega)^3})\,\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,.$$

On aura donc la coercivité de a si $(1-\sqrt{C_P}\;\|\boldsymbol{v}\|_{L^\infty(\Omega)^3}) > 0$, ce qui correspond bien à la condition de l'énoncé.

Exercice : Formules de quadrature et estimations d'erreur (7pts)

1. **(2 pts)** Cas $l(\cdot)$ remplacé par $\tilde{l}_h(\cdot)$:

Notons α (respectivement M) la constante de coercivité (respectivement de continuité) de a et $L = \sup_{w_h\in V_h}\dfrac{\left|l(w_h)-\tilde{l}_h(w_h)\right|}{\|w_h\|_V}$.

Soit $v_h \in V_h$. Comme indiqué dans l'énoncé, commençons par majorer le terme $\|u'_h - v_h\|_V$ en utilisant la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$.

$$\begin{array}{rcl}
\alpha\;\|v_h-u'_h\|^2_V & \le & a(v_h-u'_h, v_h-u'_h)\\
& = & a(v_h, v_h-u'_h) - a(u'_h, v_h-u'_h)\\
& = & a(v_h, v_h-u'_h) - \tilde{l}_h(v_h-u'_h)\\
& = & a(v_h, v_h-u'_h) - l(v_h-u'_h) - (\tilde{l}_h - l)(v_h-u'_h)\\
& = & a(v_h-u, v_h-u'_h) - (\tilde{l}_h - l)(v_h-u'_h)\\
& \le & M\;\|v_h-u\|_V\,\|v_h-u'_h\|_V + L\;\|v_h-u'_h\|_V\,.
\end{array}$$

Ainsi donc, on a

$$\|v_h-u'_h\|_V \le \frac{M}{\alpha}\;\|v_h-u\|_V + \frac{L}{\alpha}.$$

On peut alors écrire

$$\|u-u'_h\|_V \le \|u-v_h\|_V + \|v_h-u'_h\|_V \le (1+\frac{M}{\alpha})\;\|v_h-u\|_V + \frac{L}{\alpha}.$$

Puisque que ceci est vrai pour tout $v_h\in V_h$, on obtient le résultat de l'énoncé en prenant $C' = \max\,(1+\frac{M}{\alpha}, \frac{L}{\alpha})$.

2. **(2,5 pts)** Cas $l(\cdot)$ et $a(\cdot,\cdot)$ remplacés par $\tilde{l}_h(\cdot)$ et $\tilde{a}_h(\cdot,\cdot)$:

   Notons $\tilde{\alpha}$ la constante de coercivité de $\tilde{a}_h$ et $Z_{(v_h)} = \sup\limits_{z_h \in V_h} \dfrac{|a(v_h,z_h) - \tilde{a}_h(v_h,z_h)|}{\|z_h\|_V}$.

   Soit $v_h \in V_h$. Suivons de nouveau l'énoncé et majorons le terme $\|u_h'' - v_h\|_V$ en utilisant la coercivité de $\tilde{a}_h(\cdot,\cdot)$.

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{\alpha}\ \|v_h - u_h''\|_V^2 & \leq & \tilde{a}_h(v_h - u_h'', v_h - u_h'') \\
& = & \tilde{a}_h(v_h, v_h - u_h'') - \tilde{a}_h(u_h'', v_h - u_h'') \\
& = & \tilde{a}_h(v_h, v_h - u_h'') - \tilde{l}_h(v_h - u_h'') \\
& = & (\tilde{a}_h - a)(v_h, v_h - u_h'') + a(v_h, v_h - u_h'') - l(v_h - u_h'') \\
& & -(\tilde{l}_h - l)(v_h - u_h'') \\
& = & (\tilde{a}_h - a)(v_h, v_h - u_h'') + a(v_h - u, v_h - u_h'') \\
& & -(\tilde{l}_h - l)(v_h - u_h'') \\
& \leq & Z_{(v_h)}\ \|v_h - u_h''\|_V + M\ \|v_h - u\|_V\, \|v_h - u_h''\|_V \\
& & +L\ \|v_h - u_h''\|_V\,.
\end{array}$$

   Ceci implique

$$\|v_h - u_h''\|_V \leq \frac{Z_{(v_h)}}{\tilde{\alpha}} + \frac{M}{\tilde{\alpha}}\ \|v_h - u\|_V + \frac{L}{\tilde{\alpha}}.$$

   On peut alors écrire

$$\|u - u_h''\|_V \leq \|u - v_h\|_V + \|v_h - u_h''\|_V \leq \frac{Z_{(v_h)}}{\tilde{\alpha}} + (\frac{M}{\tilde{\alpha}} + 1)\ \|v_h - u\|_V + \frac{L}{\tilde{\alpha}}.$$

   Puisque ceci est valable pour tout $v_h \in V_h$, on obtient le résultat de l'énoncé avec $C'' = \max\,(\frac{1}{\tilde{\alpha}}, (1 + \frac{M}{\tilde{\alpha}}), \frac{L}{\tilde{\alpha}})$.

3. **(1 pt)** En plus de l'erreur d'approximabilité $\inf\limits_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$, on doit tenir compte des erreurs de quadrature. Il faut notamment calculer chacun des deux membres avec suffisamment de précision pour ne pas détériorer l'ordre de convergence de la méthode.

4. **(1,5 pt)** Dans Ω ouvert polygonal (borné) inclus dans $\mathbb{R}^2$, avec l'élément fini de Lagrange P^k ($k \geq 1$) sur des maillages triangulaires :
   - si on résout "trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u = 1$ dans Ω, alors il n'y a pas besoin de quadrature.
   - si on résout "trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u = f$ dans Ω avec $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, alors on raisonne par interpolation du second membre. On peut alors utiliser la question 1 pour prouver que la méthode converge.

– si on résout "trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\mathrm{div}(\beta \nabla u) = f$ dans Ω avec $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et $\beta \in L^\infty(\Omega)$, alors on raisonne par interpolation du premier et du second membre. On peut alors utiliser la question 2 pour prouver que la méthode converge.