MA201 La méthode des éléments finis.
Corrigé du contrôle continu du 9 novembre 2007.

Corrigé 1 Questions de cours.

1. Soit $v \in H^1(\Omega)$, on multiplie $-\Delta u = f$ par v et on intègre par parties :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f v\, d\Omega &= -\int_\Omega \Delta u\, v\, d\Omega = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\Gamma \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\Gamma - \int_{\Gamma_F} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\Gamma \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\Gamma + \lambda \int_{\Gamma_F} uv\, d\Gamma - \int_{\Gamma_F} gv\, d\Gamma.\end{aligned}$$

   Pour obtenir une formulation variationnelle utilisable, on choisit de se placer dans le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ suivant :

$$H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \ : \ v_{|\Gamma_D} = 0\},$$

   ce qui permet d'éliminer le terme $\displaystyle\int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\Gamma$. Par ailleurs, $u \in H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$ ($u_{|\Gamma_D} = 0$ est une condition aux limites esentielle).
   On aboutit à la formulation variationnelle

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega) \text{ telle que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega + \lambda \int_{\Gamma_F} uv\, d\Gamma = \int_\Omega f v\, d\Omega + \int_{\Gamma_F} gv\, d\Gamma,\ \forall v \in H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega).\end{array}\right.$$

2. Le cadre variationnel abstrait est

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \\ a(u,v) = \ell(v),\ \forall v \in V.\end{array}\right.$$

   Dans notre cas :

   - $V = H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ (cf. théorème 1.2, page 15) : c'est donc un espace de Hilbert. On le munit du produit scalaire et de la norme de $H^1(\Omega)$ dans la suite.
   - a est une forme bilinéaire et continue sur V (cf. théorème 1.2). Par ailleurs, d'après l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (page 28 ou TD2), a est coercive.

- ℓ est une forme linéaire et continue sur V (cf. théorème 1.2).

D'après le théorème de Lax-Milgram (page 30), la formulation variationnelle est bien posée.

3. Soit u la solution de la formulation variationnelle.
Comme $u \in H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega < \infty \text{ et } u_{|\Gamma_D} = 0.$$

Ensuite, on choisit une fonction-test v dans $\mathcal{D}(\Omega)$ ($\subset H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$), et on dérive au sens des distributions :

$$\begin{aligned}
\ell(v) &= \langle f, v \rangle \,; \\
a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\Omega = \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle \\
&= -\sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v \rangle = -\langle \Delta u, v \rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Et, puisque $f \in L^2(\Omega)$, on a $-\Delta u = f$ presque partout dans Ω.
Pour conclure, on prend v dans $C^\infty(\bar{\Omega})$ telle que $v_{|\Gamma_D} = 0$ et on intègre par parties. Il reste :

$$\int_{\Gamma_F} gv \, d\Gamma = \lambda \int_{\Gamma_F} uv \, d\Gamma + \int_{\Gamma_F} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma.$$

En admettant que les traces sur Γ_F de $\{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) \ : \ v_{|\Gamma_D} = 0\}$ constituent un sous-espace dense dans $L^2(\Gamma_F)$, la dernière relation suit :

$$\left(\lambda u + \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{|\Gamma_F} = g.$$

Elle est valable presque partout sur Γ_F, puisque $g \in L^2(\Gamma_F)$.

4. On reprend la technique exposée au paragraphe 2.3 (pages 71 et suivantes), avec $(\Gamma_D, \Gamma_F) = (\Gamma_1, \Gamma_2)$. Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage triangulaire de Ω, et $(M_i)_{i=1,N}$ les nœuds du maillage. On suppose que les nœuds[1]

[1] **NB.** Γ_D^h est une partie *fermée* de la frontière ! Ses extrémités lui appartiennent...

$M_i \in \Gamma_1^h$ sont au nombre de N_D, et ont pour indices $N-N_D+1,\cdots,N$. On pose enfin

$$\begin{array}{l} V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \ : \ v_{h|T} \in P^1(T),\ \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ V_h^{0,D} = \{v_h \in V_h \ : \ v_{h|\Gamma_D} = 0\} \end{array}.$$

Par construction $V_h^{0,D} \subset H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$, et une base de $V_h^{0,D}$ est $(w_i)_{i=1,N'}$, avec $N' = N - N_D$. La formulation variationnelle discrète est alors

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h^{0,D} \text{ telle que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega + \lambda \int_{\Gamma_F} u_h v_h \, d\Gamma = \int_\Omega f v_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_F} g v_h \, d\Gamma,\ \forall v_h \in V_h^{0,D}. \end{array}\right.$$

5. On écrit $u_h = \displaystyle\sum_{j=1,N'} U_j\, w_j$, avec $U_j = u_h(M_j)$, et on choisit $v_h = w_i$ pour $1 \le i \le N'$ dans la formulation discrète. On trouve :

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1,N'} \left(\int_\Omega \nabla w_j \cdot \nabla w_i \, d\Omega\right) U_j + \lambda \sum_{j=1,N'} \left(\int_{\Gamma_F} w_j w_i \, d\Gamma\right) U_j \\ &\qquad\qquad = \int_\Omega f w_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_F} g w_i \, d\Gamma,\ 1 \le i \le N' \\ \iff\ & (\mathbb{K} + \lambda\, \mathbb{M}_F)\vec{U} = \vec{F} + \vec{G}, \end{aligned}$$

avec $\vec{U}$, $\vec{F}$, $\vec{G}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^{N'}$, et $\mathbb{K}$, $\mathbb{M}_F$ deux matrices de $\mathbb{R}^{N'\times N'}$.

6. $\mathbb{K}$ est une matrice symétrique définie-positive et creuse.
   $\mathbb{M}_F$ est une matrice symétrique et creuse.
   Conclusion :
   $\mathbb{K} + \lambda\, \mathbb{M}_F$ est symétrique définie-positive, donc inversible, et creuse.

7. On est avec l'élément fini P^1 : d'après le théorème 2.4 (page 66) – si $u \in H^2(\Omega)$ – on a le résultat

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \le C\, h\, |u|_{H^2(\Omega)},$$

soit une erreur en $O(h)$.

Corrigé 2 Un peu de calcul.

1. u_s est mesurable, et par ailleurs

$$\int_\Omega u_s^2 \, d\Omega = \int_{r=0}^{r=1} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3}{2}\pi} r^{-4/3} \sin^2(\frac{2}{3}\theta)\, r dr d\theta = \int_0^1 r^{-1/3}\, dr \times \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2(\frac{2}{3}\theta)\, d\theta.$$

On trouve alors

$$\int_0^1 r^{-1/3}\, dr = \frac{3}{2}, \text{et } \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2(\frac{2}{3}\theta)\, d\theta = \frac{3}{4}\pi,$$

soit finalement $\displaystyle\int_\Omega u_s^2\, d\Omega = \frac{9}{8}\pi$: $u_s \in L^2(\Omega)$ et $\|u_s\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\frac{9}{8}\pi}$.

2. On a $\dfrac{\partial u_s}{\partial r} = -\dfrac{2}{3} r^{-5/3} \sin(\dfrac{2}{3}\theta)$, d'où :

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} = \frac{10}{9} r^{-8/3} \sin(\frac{2}{3}\theta), \text{ et } \frac{1}{r}\frac{\partial u_s}{\partial r} = -\frac{2}{3} r^{-8/3} \sin(\frac{2}{3}\theta).$$

   Par ailleurs,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_s}{\partial \theta^2} = -\frac{4}{9} r^{-8/3} \sin(\frac{2}{3}\theta).$$

   On en conclut que

$$\Delta u_s = \left(\frac{10}{9} - \frac{2}{3} - \frac{4}{9}\right) r^{-8/3} \sin(\frac{2}{3}\theta) = 0.$$

3. Sur Γ_D^1, $\theta = 0$: $u_{s|\Gamma_D^1} = 0$.
   Sur Γ_D^2, $\theta = \frac{3}{2}\pi$: $u_{s|\Gamma_D^2} = 0$.

4. $\dfrac{\partial u_s}{\partial n} = \dfrac{\partial u_s}{\partial r}_{|r=1} = -\dfrac{2}{3} \sin(\dfrac{2}{3}\theta)$.

5. On a donc $u_s \in L^2(\Omega)$, $\Delta u_s = 0$ dans Ω, et $u_{s|\Gamma_D^1} = u_{s|\Gamma_D^2} = 0$. Par ailleurs, sur Γ_N, on observe que $u_s = \sin(\dfrac{2}{3}\theta)$, d'où la relation

$$\left(\frac{2}{3}u_s + \frac{\partial u_s}{\partial n}\right)_{|\Gamma_N} = 0.$$

   Au final, u_s vérifie les équations de l'exercice 1., avec $f = 0$, $\lambda = \frac{2}{3}$, et $g = 0$. Deux interprétations sont possibles :

   - $u_s \notin H^1(\Omega)$. En effet, si on avait $u_s \in H^1(\Omega)$, on déduirait de l'exercice 1. que $u_s = 0$, ce qui n'est manifestement pas le cas !
   - Si on choisit de résoudre le problème de l'exercice 1. avec simplement $\displaystyle\int_\Omega u^2\, d\Omega < \infty$, on n'a plus unicité de la solution !

Corrigé 3 Extension des éléments finis.

1. $\vec{E} = \nabla\phi + \mathbf{rot}\,\psi$, avec $\phi \in H^1_0(\Omega)$ et $\psi \in H^1(\Omega)$. Dans Ω :
$$g = \operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{div}(\nabla\phi) + \operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\psi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \Delta\phi.$$
Ainsi, on a bien $\Delta\phi = g$ dans Ω.

2. Classiquement, on passe de
$$\text{Trouver } \phi \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que } \Delta\phi = g \text{ dans } \Omega$$
à la formulation variationnelle équivalente
$$\text{Trouver } \phi \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla\phi'\,d\Omega = -\int_\Omega g\phi'\,d\Omega,\ \forall\phi' \in H^1_0(\Omega).$$

3. Pour ψ, on utilise d'abord, dans Ω :
$$f = \operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{rot}(\nabla\phi) + \operatorname{rot}(\mathbf{rot}\,\psi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\Delta\psi.$$
Ainsi, on a cette fois $-\Delta\psi = f$ dans Ω.
Il reste à prendre en compte la dernière équation, valable sur $\partial\Omega$:
$$0 = \vec{E}\cdot\vec{t} = \nabla\phi\cdot\vec{t} + \mathbf{rot}\,\psi\cdot\vec{t}.$$
Or, $\nabla\phi\cdot\vec{t}$ représente le gradient tangentiel de ϕ sur $\partial\Omega$. Comme ϕ est constante (égale à 0) sur $\partial\Omega$, on a $\nabla\phi\cdot\vec{t}_{|\partial\Omega} = 0$. Quant au second terme, on remarque pour commencer que $\vec{t} = n_y\vec{e}_x - n_x\vec{e}_y$, puis
$$\mathbf{rot}\,\psi\cdot\vec{t} = \frac{\partial\psi}{\partial y}n_y + \frac{\partial\psi}{\partial x}n_x = \nabla\psi\cdot\vec{n} = \frac{\partial\psi}{\partial n}.$$
Conclusion, $\psi \in H^1(\Omega)$ est tel que $-\Delta\psi = f$ dans Ω, et $\frac{\partial\psi}{\partial n}_{|\partial\Omega} = 0$.
NB. De la relation $\int_\Omega \Delta\psi\,d\Omega = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\Gamma$, on déduit que l'on a nécessairement $\int_\Omega f\,d\Omega = 0$ comme annoncé.
On admet que ceci est équivalent à la formulation variationnelle
$$\text{Trouver } \psi \in \underline{V} \text{ tel que } \int_\Omega \nabla\psi\cdot\nabla\psi'\,d\Omega = \int_\Omega f\psi'\,d\Omega,\ \forall\psi' \in \underline{V},$$
avec $\underline{V} = \{\underline{v} \in H^1(\Omega)\ :\ \int_\Omega \underline{v}\,d\Omega = 0\}$.

4. Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage triangulaire de Ω. on introduit

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \ : \ v_{h|T} \in P^1(T), \ \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Pour résoudre numériquement les problèmes sur les potentiels, on considère les sous-espaces de V_h

$$\begin{cases} V_h^0 = \{v_h \in V_h \ : \ v_{h|\partial\Omega} = 0\} \text{ pour discrétiser } \phi. \\ \underline{V}_h = \{v_h \in V_h \ : \ \displaystyle\int_\Omega v_h \, d\Omega = 0\} \text{ pour discrétiser } \psi. \end{cases}$$

Les formulations discrètes sont alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } \phi_h \in V_h^0 \text{ tel que } \displaystyle\int_\Omega \nabla\phi_h \cdot \nabla\phi'_h \, d\Omega = -\int_\Omega g\phi'_h \, d\Omega, \ \forall \phi'_h \in V_h^0. \\ \text{Trouver } \psi_h \in \underline{V}_h \text{ tel que } \displaystyle\int_\Omega \nabla\psi_h \cdot \nabla\psi'_h \, d\Omega = \int_\Omega f\psi'_h \, d\Omega, \ \forall \psi'_h \in \underline{V}_h. \end{cases}$$

5. On choisit naturellement $\vec{E}_h = \nabla\phi_h + \mathbf{rot}\,\psi_h$.
Dans ce cas, pour tout triangle $T \in \mathcal{T}_h$, la restriction $\vec{E}_{h|T}$ est constante. En effet, le gradient et le rotationnel d'une fonction affine sont des vecteurs constants. Bref,

$$\vec{E}_h \in \mathcal{X}_h = \{\vec{F}_h \in L^2(\Omega)^2 \ : \ \vec{F}_{h|T} \in \mathbb{R}^2, \ \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

6. Pour ϕ et ψ – en les supposant tous les deux dans $H^2(\Omega)$ – on a les estimations du théorème 2.4 (page 66)

$$\begin{cases} \|\phi - \phi_h\|_{H^1(\Omega)} \le C\,h\,|\phi|_{H^2(\Omega)}. \\ \|\psi - \psi_h\|_{H^1(\Omega)} \le C\,h\,|\psi|_{H^2(\Omega)}. \end{cases}$$

En particulier,

$$\begin{cases} \|\nabla\phi - \nabla\phi_h\|_{L^2(\Omega)^2} \le C\,h\,|\phi|_{H^2(\Omega)}. \\ \|\mathbf{rot}\,\psi - \mathbf{rot}\,\psi_h\|_{L^2(\Omega)^2} \le C\,h\,|\psi|_{H^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\vec{E} - \vec{E}_h\|_{L^2(\Omega)^2} &= \|\nabla\phi + \mathbf{rot}\,\psi - \nabla\phi_h - \mathbf{rot}\,\psi_h\|_{L^2(\Omega)^2} \\ &\le \|\nabla\phi - \nabla\phi_h\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\mathbf{rot}\,\psi - \mathbf{rot}\,\psi_h\|_{L^2(\Omega)^2} \\ &\le C\,h\left(|\phi|_{H^2(\Omega)} + |\psi|_{H^2(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

une convergence en $O(h)$ pour l'erreur d'approximation de $\vec{E}$ dans $\mathcal{X}_h$.