Cours MAP ANN2 (Séance 5)

Approximation par éléments finis de l'équation des ondes

Eliane Bécache

(POEMS - UMR CNRS/ENSTA/INRIA)

Problème modèle

- **Équation des ondes avec CL de Dirichlet** : Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et $T > 0$:

$$(\mathcal{M}) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \text{div}\,(\mu \nabla u)(x,t) = f(x,t) & \text{sur } Q_T = \Omega \times]0,T[\quad (i) \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T = \partial\Omega \times]0,T[\quad (ii) \\ u(x,0) = u_0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{sur } \Omega \quad (iii) \end{cases}$$

- **Formulation variationnelle (FV)** :

$(\mathcal{H}_1) \quad u_0 \in V := H_0^1(\Omega),\ u_1 \in H := L^2(\Omega),\ f \in L^1(0,T;H)$

Trouver $u \in W := C^1(0,T;H) \cap C^0(0,T;V)$ tel que

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_\Omega u(x,t)\, v(x)\, dx\right) + \int_\Omega \mu \nabla u(x,t) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x,t)\, v(x)\, dx,\ \forall v \in V,\ \forall t \in]0,T[$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{du}{dt}(x,0) = u_1(x) \quad \text{dans } \Omega$$

Notations : $a(u,v) = \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega,\ (u,v) = (u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv\, d\Omega,\ \|v\|^2 = (v,v)$

$$(u,v)_\alpha = \int_\Omega \alpha uv\, d\Omega,\ \|v\|_\alpha^2 = (v,v)_\alpha,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Quelques propriétés (voir TD, cas $\mu = 1$)

- **Estimation d'énergie**. ▶ caractère conservatif de l'éq. des ondes.
- **Estimations a priori (continuité)**.
- **Propagation à vitesse finie (cf Poly)**.
- **Ondes planes (cf TD)**. Solutions particulières de l'équation de la forme

$$u(x,t) = e^{i(\omega t - k.x)}$$

▶ Relation de dispersion

$$\omega^2 = |k|^2$$

Semi-discrétisation en espace (Galerkin)

- **Sous-espace de dimension finie** : $V_h \subset V = H_0^1(\Omega),\ \dim V_h < \infty$
- **Propriété d'approximation**

$$\forall v \in V, \quad \lim_{h\to 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0 \qquad (\mathcal{H}\text{-approx})$$

- **Formulation Variationnelle approchée** $(FV)_h$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathcal{C}^1(0,T;V_h) \text{ tel que} \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\int_\Omega u_h(t)\, v_h\, d\Omega + \int_\Omega \nabla u_h(t) \cdot \nabla v_h\, d\Omega = \int_\Omega f(t)\, v_h\, d\Omega \quad \forall v_h \in V_h,\ \forall t \in]0,T[\\ u_h(0) = u_{h,0} \\ \dfrac{du_h}{dt}(0) = u_{h,1} \end{cases}$$

où $u_{h,0} \in V_h$ (resp. $u_{h,1} \in V_h$) approche u_0 (resp. u_1) dans $V = H_0^1(\Omega)$ (resp. dans $H = L^2(\Omega)$) :

$$\lim_{h\to 0} \|u_0 - u_{h,0}\|_V = 0, \qquad \lim_{h\to 0} \|u_1 - u_{h,1}\|_H = 0.$$

Semi-discrétisation en espace (Galerkin)

- **Formulation Variationnelle approchée**

$$(FV)_h \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathcal{C}^1(0,T;V_h) \text{ tel que} \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(u_h(t),v_h) + a(u_h(t),v_h) = (f(t),v_h) \quad \forall v_h \in V_h,\ \forall t \in]0,T[\\ u_h(0) = u_{h,0} \\ \dfrac{du_h}{dt}(0) = u_{h,1} \end{cases}$$

- **Écriture matricielle** : $(w_I)_{I=1,N}$ = Base de V_h $(N = \dim V_h)$
Notons $U(t) = (U_I(t))_{I=1,N} = (u_h(M_I,t))_{I=1,N}$, $t \in [0,T[$. Par construction, on a :

$$u_h(t) = \sum_{I=1,N} u_h(M_I,t)w_I = \sum_{I=1,N} U_I(t)\, w_I.$$

En substituant cette expression dans $(FV)_h$ et en prenant $v_h = w_J$ on obtient :

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_{I=1,N}\left(\int_\Omega w_I\, w_J\, d\Omega\right) U_I(t) + \sum_{I=1,N}\left(\int_\Omega \mu \nabla w_I \cdot \nabla w_J\, d\Omega\right) U_I(t) = \int_\Omega f(t) w_J\, d\Omega$$

Semi-discrétisation en espace (Galerkin)

- **Problème matriciel semi-discrétisé en espace** :

$$(\mathcal{P}_h) \begin{cases} \mathbb{M}\dfrac{d^2U}{dt^2}(t) + \mathbb{K}^\mu U(t) = F(t) \\ U(0) = U_0, \quad \dfrac{dU}{dt}(0) = U_1 \end{cases}$$

Rappel : on a la correspondance (on note $\mathbb{K} = \mathbb{K}^\mu$ pour $\mu = 1$)

$$(\mathbb{M}V|V) = \|v_h\|^2_{L^2(\Omega)} \;;\; (\mathbb{K}V|V) = \|\nabla v_h\|^2_{L^2(\Omega)}$$

où on note $(U|V)$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^N$.
Les matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}^\mu$ sont symétriques, définies positives.

Existence et unicité du problème matriciel semi-discrétisé en espace : facile à établir (par exemple en décomposant u_h sur la base des vecteurs propres du problème approché du Laplacien avec CL du Dirichlet).

Discrétisation totale : différences finies en temps

Notations : $(t_k)_{k=0,K}$ désigne une suite d'instants avec $t_k = k\Delta t$. On note $U^k \in \mathbb{R}^N$ l'approximation de $U(t_k)$

$$U_I^k \simeq U_I(t_k) \simeq u(M_I,t_k), \quad I = 1,N$$

Et nous noterons u_h^k la fonction de V_h correspondante

$$u_h^k = \sum_{I=1}^N U_I^k w_I \quad (u_h^k(M_I) = U_I^k)$$

Schéma saute mouton, explicite centré d'ordre deux : $(\mu = 1)$

$$\begin{cases} \mathbb{M}\dfrac{(U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1})}{\Delta t^2} + \mathbb{K}U^k = F^k \\ U^0, U^1 \text{ donnés} \end{cases}$$

avec $F_J^k = F_J(t_k) = \int_\Omega f(t_k) w_J d\Omega$

Discrétisation totale : différences finies en temps

Schéma saute mouton, explicite centré d'ordre deux : $(\mu = 1)$

$$\begin{cases} \mathbb{M}\dfrac{(U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1})}{\Delta t^2} + \mathbb{K}U^k = F^k \\ U^0, U^1 \text{ donnés} \end{cases}$$

avec $F_J^k = F_J(t_k) = \int_\Omega f(t_k) w_J d\Omega$

Rappel : Si la source f est approchée par son interpolation

$$f(t) \approx \sum_J f(t,M_J) w_J,$$

le second membre peut être approché par:

$$F^k \approx \mathbb{M}\widetilde{F}^k \quad \text{avec } \widetilde{F}^k = (f(t,M_J))_{J=1,N}$$

Discrétisation totale : différences finies en temps

Schéma saute mouton, explicite centré d'ordre deux :

$$\begin{cases} \mathbb{M}\dfrac{(U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1})}{\Delta t^2} + \mathbb{K}U^k = F^k \\ U^0, U^1 \ \ \text{donnés} \end{cases}$$

Sous forme variationnelle : trouver $u_h^k \in V_h$ tel que

$$\begin{cases} (\dfrac{u_h^{k+1} - 2u_h^k + u_h^{k-1}}{\Delta t^2}, v_h)_{L^2(\Omega)} + a(u_h^k, v_h) = (f(t_k), v_h), \quad \forall v_h \in V_h \\ \\ u_h^0, \text{ et } u_h^1 \text{ donnés dans } V_h \end{cases}$$

Démarrage du schéma

Choix de u_h^0 et u_h^1 ?

- ***Cas continu :*** $u(0) = u_0$, $\partial_t u(0) = u_1$
- ***Schéma semi-discrétisé :*** $u_h(0) = u_{h,0} \approx u_0$ et $\partial_t u_h(0) = u_{h,1} \approx u_1$
- ***Schéma totalement discrétisé :*** $u_h^k \approx u(t_k)$ donc $u_h^0 \approx u(0)$ et $u_h^1 \approx u(\Delta t)$
  - Pour $t = 0$: $u_h^0 = u_{h,0} \approx u_0$
  - Pour $t = \Delta t$: $u_h^1 \neq u_{h,1}$ car ce n'est pas une approx de $\partial_t u(0)$ mais de $u(\Delta t)$

- Un premier choix : basé sur la formule de Taylor

$$u(\Delta t) = u(0) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(0) + O(\Delta t^2)$$

qui conduit à l'approximation: $u_h^1 = u_{h,0} + \Delta t \ u_{h,1}$

➤ approximation d'ordre 1 en temps de $\partial u / \partial t(0)$

Démarrage du schéma

Choix de u_h^0 et u_h^1 ?

- ***Schéma totalement discrétisé :*** $u_h^k \approx u(t_k)$ donc $u_h^0 \approx u(0)$ et $u_h^1 \approx u(\Delta t)$
  - Pour $t = 0$: $u_h^0 = u_{h,0} \approx u_0$
  - Pour $t = \Delta t$: $u_h^1 \neq u_{h,1}$ car ce n'est pas une approx de $\partial_t u(0)$ mais de $u(\Delta t)$

- Le bon choix pour avoir de l'ordre 2 :

$$u(\Delta t) = u_0 + \Delta t u_1 + \frac{\Delta t^2}{2}(\Delta u_0 + f(0)) + O(\Delta t^3)$$

ce qui s'écrit variationnellement ((u, v) = produit scalaire $L^2(\Omega)$)

$$\begin{aligned} (u(\Delta t), v) \quad &= \quad (u_0, v)_{L^2(\Omega)} + \Delta t(u_1, v) - \frac{\Delta t^2}{2} a(u_0, v) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2}(f(0), v) + O(\Delta t^3), \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

➤ ***Approximation*** :

$$(u_h^1, v_h) = (u_{h,0}, v_h) - \frac{\Delta t^2}{2} a(u_{h,0}, v_h) + \Delta t(u_{h,1}, v_h) + \frac{\Delta t^2}{2}(f(0), v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

Recap schéma totalement discrétisé

Schéma saute mouton, explicite centré d'ordre deux :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \mathbb{M}\dfrac{(U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1})}{\Delta t^2} + \mathbb{K}U^k = F^k \\ U^0 = U_0 \\ \mathbb{M}U^1 = (\mathbb{M} - \dfrac{\Delta t^2}{2}\mathbb{K})U_0 + \Delta t \ \mathbb{M}U_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2}F^0 \end{cases}$$

où le terme source peut être approché par

$$F^k \approx \mathbb{M}\widetilde{F}^k \quad \text{avec } \widetilde{F}^k = (f(t, M_J))_{J=1,N}$$

Condensation de masse

Schéma $(\mathcal{S})$ ***semi-explicite*** i.e., pas "complètement" explicite (pour calculer U^{k+1}, on doit inverser la matrice de masse $\mathbb{M}$) :

$$U^{k+1} = \mathbb{M}^{-1}(\Delta t^2(F^k - \mathbb{K}U^k) + 2U^k - U^{k-1})$$

Condensation de masse (ou lumping) : consiste à approcher $\mathbb{M}$ par une matrice ***diagonale***, en utilisant une ***formule de quadrature*** (intégration numérique) ▶ schéma ***explicite***

Avec une formule de quadrature appropriée : pas de perte de précision, moins coûteux et plus rapide.

Condensation de masse

Principe pour des éléments finis de Lagrange : formule de quadrature dont les noeuds de quadrature coïncident avec les positions des degrés de liberté M_P :

$$\int f(M)dM \approx \sum_P \omega_P f(M_P)$$

▶ Approximation de la matrice de masse :

$$\mathbb{M}_{IJ} = \int w_I w_J dx \approx \sum_P \omega_P \underbrace{w_I(M_P)}_{\delta_{IP}} \underbrace{w_J(M_P)}_{\delta_{JP}} := \mathbb{M}^{ap}_{IJ}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{M}^{ap}_{IJ} = \omega_I \delta_{IJ}$$

$$\boxed{\mathbb{M}^{ap} = \text{matrice diagonale}}$$

Condensation de masse

Exemple pour les éléments finis de Lagrange P^1

Formule de quadrature sur un triangle T, de sommets S_α, $\alpha = 1, 3$

$$\int_T f(M)dM \approx \frac{|T|}{3} \sum_{\alpha=1,3} f(S_\alpha)$$

où $|T|$= aire du triangle.

▶ Approximation de la matrice de masse élémentaire (τ_α= fcts de base locales)

$$\Longrightarrow \mathbb{M}^{elem,ap}_{\alpha\beta} = \frac{|T|}{3}\delta_{\alpha\beta}$$

Cas particulier: sur maillage uniforme : $\mathbb{M}^{ap} = h^2 Id$

Identité d'énergie discrète (cas $f = 0$)

Rappel cas continu :

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \overset{(L^2)}{\times} \partial_t u \Longrightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \text{ avec } E(t) = \frac{1}{2}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2$$

Schéma totalement discrétisé :

$$\mathbb{M}\frac{(U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1})}{\Delta t^2} + \mathbb{K}U^k = 0 \quad \overset{(\mathbb{R}^N)}{\times} \quad ?$$

Notation: $(U|V)_P = (PU|V) = \sum_{J=1,N} (PU)_J V_J$ où $(U|V)$= prod scalaire de $\mathbb{R}^N$.

On multilie par l'approximation centrée de $\partial_t u$

$$\mathbb{M}\frac{(U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1})}{\Delta t^2} + \mathbb{K}U^k = 0 \quad \overset{(\mathbb{R}^N)}{\times} \quad \frac{U^{k+1} - U^{k-1}}{2\Delta t}$$

Identité d'énergie discrète (cas $f = 0$)

On multiplie par l'approximation centrée de $\partial_t u$

$$\mathbb{M}\frac{(U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1})}{\Delta t^2} + \mathbb{K}U^k = 0 \quad \overset{(\mathbb{R}^N)}{\times} \; \frac{U^{k+1} - U^{k-1}}{2\Delta t}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{(U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1})}{\Delta t^2} | \frac{U^{k+1} - U^{k-1}}{2\Delta t}\right)_{\mathbb{M}} + \left(U^k | \frac{U^{k+1} - U^{k-1}}{2\Delta t}\right)_{\mathbb{K}} = 0$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{((U^{k+1} - U^k) - (U^k - U^{k-1}))}{\Delta t^2} | \frac{(U^{k+1} - U^k) + (U^k - U^{k-1})}{2\Delta t}\right)_{\mathbb{M}} +$$

$$+ \left(U^k | \frac{U^{k+1} - U^{k-1}}{2\Delta t}\right)_{\mathbb{K}} = 0$$

Identité d'énergie discrète (cas $f = 0$)

$$\Longrightarrow \left(\frac{((U^{k+1} - U^k) - (U^k - U^{k-1}))}{\Delta t^2} | \frac{(U^{k+1} - U^k) + (U^k - U^{k-1})}{2\Delta t}\right)_{\mathbb{M}} +$$

$$+ \left(U^k | \frac{U^{k+1} - U^{k-1}}{2\Delta t}\right)_{\mathbb{K}} = 0$$

On introduit une *énergie discrète* du schéma:

$$\mathcal{E}^{k+1/2} = \frac{1}{2}\left\|\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}\right\|_{\mathbb{M}}^2 + \frac{1}{2}(\mathbb{K}U^k, U^{k+1})$$

Conservation de l'énergie discrète (en l'absence de source)

$$\boxed{\mathcal{E}^{k+1/2} = \mathcal{E}^{k-1/2} = \mathcal{E}^{1/2}, \quad \forall k}$$

Stabilité du schéma (cas $f = 0$)

La conservation de l'énergie discrète $\mathcal{E}^{k+1/2} = \mathcal{E}^{1/2}, \quad \forall k$

$$\mathcal{E}^{k+1/2} = \frac{1}{2}\left\|\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}\right\|_{\mathbb{M}}^2 + \frac{1}{2}(\mathbb{K}U^k, U^{k+1})$$

Le schéma est **stable** sous la **condition de stabilité CFL** (Courant-Friedrichs-Levy)

$$(CFL) \quad \gamma_{cfl} \equiv \frac{\Delta t^2}{4} \sup_{V \neq 0} \frac{(\mathbb{K}V, V)}{(\mathbb{M}V, V)} \leq 1$$

On peut montrer que

$$\boxed{(CFL) \Longleftrightarrow \alpha_{cfl} := \frac{c\Delta t}{h} \leq \alpha_{max}}$$