AMS308 : devoir à la maison n°3

Exercice 1. Magnétostatique. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$, composé d'un milieu parfait isotrope et entouré par un conducteur parfait. La perméabilité magnétique μ est mesurable, et telle que :

$$\exists \mu_-, \mu_+ > 0,\ \ \mu_- \le \mu \le \mu_+ \text{ p. p. dans } \Omega.$$

On note $(\Gamma_k)_{k=0,K}$ les composantes connexes maximales de $\partial\Omega$, et $\Sigma = (\Sigma_i)_{i=1,I}$ les coupures de Ω. On veut résoudre le modèle magnétostatique, à savoir

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathbf{rot}\, \mu^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \langle \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}, 1\rangle_{H^{1/2}(\Sigma_i)} = 0,\ \ \forall i = 1, I \end{array}\right. . \tag{1}$$

La donnée est $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{H}(\operatorname{div}\,;\Omega)$, avec $\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0$ dans Ω et $\langle \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}_{|\Gamma_k}, 1\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_k)} = 0$, pour tout $k = 1, K$.

1. Introduire un potentiel vecteur de $\boldsymbol{B}$, noté $\boldsymbol{A}$. Ecrire le problème dont l'inconnue est $\boldsymbol{A}$. Attention au choix de $\boldsymbol{A}$, il faut utiliser toutes les hypothèses sur $\boldsymbol{B}$!
2. Construire une *formulation variationnelle équivalente* au problème d'inconnue $\boldsymbol{A}$.
3. Justifier que cette formulation variationnelle est *bien posée* :
   - introduire une pression artificielle pour *symétriser* la formulation variationnelle. Pour démontrer que cette pression s'annule, il faut utiliser toutes les hypothèses sur $\boldsymbol{J}$!
   - établir une condition inf-sup.

Exercice 2. Résolution numérique de la magnétostatique. Le but est de proposer une méthode de discrétisation pour la résolution numérique du modèle magnétostatique (1).

1. Définir précisément les *espaces discrets* pour le potentiel $\boldsymbol{A}$ (justifier le choix de l'élément fini), et pour le champ $\boldsymbol{B}$.
2. Construire la *formulation variationnelle discrète.*
3. Démontrer qu'elle est *bien posée.*
4. Quels résultats de convergence peut-on attendre ?