AMS308 : devoir à la maison n°1

Exercice 1. Relation de saut. A partir des équations de Maxwell sous la forme intégrale, établir les relations de sauts pour le champ électrique $\boldsymbol{E}$ et le champ magnétique $\boldsymbol{H}$.

Exercice 2. Application trace. Soient Ω, Ω_1, Ω_2 trois ouverts bornés, non-vides et connexes de $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ à frontière lipschitzienne, tels que

$$\Omega_i \subset \Omega,\ i = 1,2\,; \qquad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset\,; \qquad \overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2.$$

On note l'interface entre les deux sous-domaines $\Sigma = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$. Pour $i = 1,2$, on définit, pour $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega_i})$, sa trace sur Σ par

$$\gamma_{\Sigma,i}\phi \in L^2(\Sigma) \text{ telle que } \gamma_{\Sigma,i}\phi(\boldsymbol{x}) = \lim_{\Omega_i \ni \widetilde{\boldsymbol{x}} \to \boldsymbol{x}} \phi(\widetilde{\boldsymbol{x}}), \quad \boldsymbol{x} \in \Sigma.$$

On prolonge $\gamma_{\Sigma,i}$ par continuité de $H^1(\Omega_i)$ dans $L^2(\Sigma)$, pour $i = 1,2$.

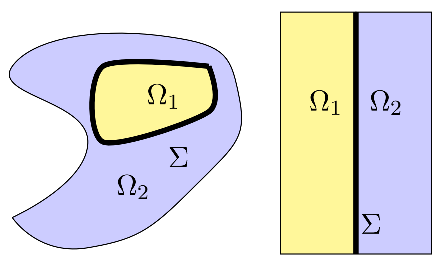

FIGURE 1 – Exemples de sous-domaines Ω_1 et Ω_2, et d'interface Σ.

(1) Soient
$$u_i : \Omega_i \to \mathbb{R}, \quad i = 1,2, \quad u_i \in C^\infty(\overline{\Omega_i}).$$
On définit $u : \Omega_1 \cup \Omega_2 \to \mathbb{R}$ par : $u_{|\Omega_i} = u_i$ pour $i = 1,2$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u puisse être prolongée en une fonction de $H^1(\Omega)$. Pour cela, on admettra le résultat suivant : l'espace fonctionnel
$$\{\lambda \in L^2(\Sigma) \text{ tel que } \exists \boldsymbol{v} \in (\mathcal{D}(\Omega))^{\mathsf{d}},\ \lambda = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_{|\Sigma}\}$$
est dense dans $L^2(\Sigma)$.

(2) Soit $u \in H^1(\Omega)$.

— En préambule, expliquer pourquoi on a, pour $i = 1, 2$,

$$\gamma_{\Sigma,i} u \in H_i^{1/2}(\Sigma) := \{\psi \in L^2(\Sigma) \text{ tel que } \exists \tilde{\psi} \in H^{1/2}(\partial\Omega_i),\ \psi = \tilde{\psi}_{|\Sigma}\}.$$

— Le but est maintenant de démontrer que

$$H_1^{1/2}(\Sigma) = H_2^{1/2}(\Sigma).$$

(a) soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné, non-vide et connexe de $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ à frontière lipschitzienne. Montrer que $\gamma_0[C^\infty(\overline{\mathcal{O}})]$ est dense dans $H^{1/2}(\partial\mathcal{O})$.

(b) étant donnée une fonction $u_1 \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$, construire $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u_{|\Omega_1} = u_1$.

(c) conclure.