

Cours AMS303 :
Méthodes variationnelles pour l'analyse et
la résolution de problèmes non coercifs - 4

Patrick Ciarlet
ENSTA Paris
828, boulevard des Maréchaux
91762 Palaiseau Cedex

©Patrick Ciarlet, 2021

Table des matières

8 Synthèse et compléments	67
8.1 Problèmes bien posés et T-coercivité	67
8.2 Approximation des formulations variationnelles	70
8.3 Problème avec coefficient changeant de signe	74

Notes de cours 8

Synthèse et compléments

On revoit et complète les séances précédentes en revisitant la notion de problèmes bien posés, leur étude et leur discrétisation, que l'on considère ici dans le cadre d'espaces fonctionnels définis sur \mathbb{C} . Ci dessous, $|\cdot|$ désigne donc le module. On y inclut la T-coercivité. On applique ces résultats aux problèmes avec coefficient changeant de signe.

8.1 Problèmes bien posés et T-coercivité

Nous rappelons les outils d'analyse fonctionnelle traitant de la notion de problèmes bien posés (voir §2.3), que nous reformulons en utilisant la théorie de la T-coercivité [15, 11].

8.1.1 Définitions

Soient :

- V et W deux espaces de Hilbert définis sur \mathbb{C} , de produits scalaires hermitiens respectifs $(\cdot, \cdot)_V$ et $(\cdot, \cdot)_W$. On note $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$ les normes associées ;
- $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire (anti-linéaire par rapport au second argument) et continue sur $V \times W$. On utilise la norme $\|\cdot\|$ pour mesurer a , voir (1.2).

On rappelle que W' est l'espace des formes anti-linéaires et continues sur W , et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ les crochets de dualité pour l'action d'un élément de W' sur un élément de W .

Pour $\ell \in W'$ donné, on étudie le problème écrit sous forme variationnelle,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall w \in W, \quad a(u, w) = \langle \ell, w \rangle_W. \end{cases} \quad (8.1)$$

Le caractère bien posé (au sens de Hadamard) est énoncé à la définition 2.7. Si on introduit l'application linéaire et continue $A \in \mathcal{L}(V, W')$ associée à $a(\cdot, \cdot)$, et définie par :

$$\forall (v, w) \in V \times W, \quad \langle Av, w \rangle_W = a(v, w),$$

on peut reformuler la formulation variationnelle (8.1) sous la forme équivalente

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ Au = \ell \text{ dans } W'. \end{cases} \quad (8.2)$$

Proposition 8.1 *Soient V, W deux espaces de Hilbert, et $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire et continue sur $V \times W$. Alors la formulation variationnelle (8.1) est bien posée si, et seulement si, l'inverse de A défini par (8.2) existe et est continu : $A^{-1} \in \mathcal{L}(W', V)$.*

Démonstration : On note que $A = I_{W \rightarrow W'} \circ \mathbf{A}$, où d'une part $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ est l'application linéaire canoniquement associée à la forme a (cf. (2.11)) : pour tout $(v, w) \in V \times W$, $(\mathbf{A}v, w)_W = a(v, w)$; et d'autre part $I_{W \rightarrow W'} \in \mathcal{L}(W, W')$ est définie par :

$$\forall (w_1, w_2) \in W \times W, \quad \langle I_{W \rightarrow W'} w_1, w_2 \rangle_{W'} = (w_1, w_2)_W. \quad (8.3)$$

D'après le théorème de Riesz, $I_{W \rightarrow W'}$ est un isomorphisme entre W et W' . Le résultat est donc une conséquence immédiate de la proposition 2.8. ■

En d'autres termes, la formulation variationnelle (8.1) est bien posée si, et seulement si, A est un isomorphisme de V dans W' .

8.1.2 La T-coercivité pour établir le caractère bien posé

On va ajouter la notion de T-coercivité aux outils déjà développés à la séance 2. On y a vu la *condition inf-sup*, également appelée *condition de stabilité*, ainsi que la *condition de solvabilité*. Nous les rappelons ci-dessous.

Définition 8.2 *Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire sur $V \times W$. Alors $a(\cdot, \cdot)$ vérifie une condition inf-sup si, et seulement si,*

$$\exists \alpha' > 0, \forall v \in V, \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|a(v, w)|}{\|w\|_W} \geq \alpha' \|v\|_V. \quad (8.4)$$

Définition 8.3 *Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire sur $V \times W$. Alors $a(\cdot, \cdot)$ vérifie une condition de solvabilité si, et seulement si,*

$$\{w \in W \text{ tel que } a(v, w) = 0, \forall v \in V\} = \{0\}. \quad (8.5)$$

On introduit maintenant une autre notion (cf. [15]).

Définition 8.4 *Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire sur $V \times W$. $a(\cdot, \cdot)$ est T-coercive si, et seulement si,*

$$\exists \mathbf{T} \in \mathcal{L}(V, W), \text{ bijective, } \exists \underline{\alpha} > 0, \forall v \in V, |a(v, \mathbf{T}v)| \geq \underline{\alpha} \|v\|_V^2. \quad (8.6)$$

Dans la définition ci-dessus, il suffit de trouver une application linéaire, continue et bijective T de V dans W pour assurer la T -coercivité. Cette application T n'est pas unique !

A priori, cette propriété (8.6) semble plus forte que les conditions inf-sup et de solvabilité. En effet, l'existence d'une application linéaire et continue T vérifiant (8.6) permet facilement de retrouver (8.4) et (8.5).

Démonstration : Soit $v \in V \setminus \{0\}$, on choisit $w_v = Tv \in W \setminus \{0\}$. Par construction, on a $\|w_v\|_W \leq \|T\| \|v\|_V$, et donc

$$\frac{1}{\|T\| \|v\|_V} \leq \frac{1}{\|w_v\|_W}.$$

On en déduit que

$$\sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|a(v, w)|}{\|w\|_W} \geq \frac{|a(v, w_v)|}{\|w_v\|_W} = \frac{|a(v, Tv)|}{\|w_v\|_W} \geq \frac{\underline{\alpha}}{\|T\|} \|v\|_V,$$

c'est-à-dire que (8.4) est vraie avec $\alpha' = \underline{\alpha} \|T\|^{-1}$.

Ensuite, soit $w \in W$ tel que $a(v, w) = 0$ pour tout $v \in V$. Puisque T^{-1} existe d'après le théorème de l'isomorphisme de Banach, on note $v_w = T^{-1}w$. Par définition de w , on a en particulier

$$0 = a(v_w, w) = a(v_w, Tv_w).$$

D'après (8.6), on en conclut que $v_w = 0$, et donc que $w = 0$, c'est-à-dire que (8.5) est vraie. ■

En fait, ces propriétés sont équivalentes entre elles !

Théorème 8.5 (Caractère bien posé) *Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire et continue sur $V \times W$. Les trois assertions ci-dessous sont équivalentes :*

- (i) *la formulation variationnelle (8.1) est bien posée ;*
- (ii) *la forme $a(\cdot, \cdot)$ vérifie une condition inf-sup et une condition de solvabilité ;*
- (iii) *la forme $a(\cdot, \cdot)$ est T -coercive.*

Démonstration : Pour l'équivalence entre (i) et (ii), on renvoie au théorème 2.12, ou théorème de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB). En particulier, (ii) \implies (i).

D'après ce qu'on a vu ci-dessus, (iii) \implies (ii).

On montre pour finir que (i) \implies (iii). D'après (i), $T = A$ est une bijection de $\mathcal{L}(V, W)$, et on a $T^{-1} = A^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$. Alors, pour tout $v \in V$, on a la majoration $\|v\|_V \leq \|T^{-1}\| \|Tv\|_W$, et on trouve ensuite que

$$a(v, Tv) = (Av, Tv)_W = \|Tv\|_W^2 \geq \|v\|_V^2 / \|T^{-1}\|^2,$$

et la forme $a(\cdot, \cdot)$ est T -coercive. ■

Plaçons-nous dans le cas $W = V$. On a vu au corollaire 2.14, ou corollaire LBB, que si la forme $a(\cdot, \cdot)$ est hermitienne, alors la condition inf-sup (8.4) est une condition nécessaire et suffisante pour assurer le caractère bien posé. De même, si la forme $a(\cdot, \cdot)$ est hermitienne, la définition 8.6 peut être modifiée en

Définition 8.6 *Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire, continue et hermitienne sur $V \times V$. $a(\cdot, \cdot)$ est T -coercive si, et seulement si,*

$$\exists T \in \mathcal{L}(V), \exists \underline{\alpha} > 0, \forall v \in V, |a(v, Tv)| \geq \underline{\alpha} \|v\|_V^2. \quad (8.7)$$

En d'autres termes, la bijectivité de \mathbf{T} n'est plus nécessaire. En effet, (8.7) implique que \mathbf{T} est injective. Donc, pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, on a $\mathbf{T}v \neq 0$ et il suit que

$$\frac{|a(v, \mathbf{T}v)|}{\|\mathbf{T}v\|_W} \geq \frac{\alpha \|v\|_V^2}{\|\mathbf{T}v\|_W} \geq \frac{\alpha}{\|\mathbf{T}\|} \|v\|_V,$$

ce qui permet de retrouver la condition inf-sup (8.4).

8.2 Approximation des formulations variationnelles

L'idée derrière l'introduction de la \mathbf{T} -coercivité pour résoudre le problème (8.1) est que l'on peut construire une application \mathbf{T} *explicite* pour établir (8.6) dans le cas général ($V \neq W$), ou (8.7) dans le cas $V = W$ avec une forme hermitienne. On a déjà réalisé la construction d'applications \mathbf{T} pour les problèmes abstraits à résoudre (diffusion neutronique à une ou deux inconnues, modèle de Stokes, problème avec coefficient changeant de signe). En outre, ceci nous a permis d'obtenir la convergence de méthodes d'approximation "bien construites". Pour cela, on a fait en sorte que les propriétés nécessaires à l'obtention de la condition inf-sup abstraite soient *transposables après discrétisation*, afin d'obtenir la condition inf-sup discrète uniforme qui assure la convergence via le lemme de Céa (séance 3). On y revient ici, en y ajoutant la \mathbf{T} -coercivité discrète.

8.2.1 Approximation du problème exact

On veut approcher la solution au problème (8.1), que nous supposons bien posé : on introduit $(V_\delta)_\delta$ et $(W_\delta)_\delta$ deux suites d'espaces vectoriels de dimensions finies, avec $V_\delta \subset V$ et $W_\delta \subset W$ pour tout δ (approximation conforme). Par convention, le paramètre δ prend des valeurs strictement positives, et on a $\lim_{\delta \rightarrow 0} (\dim(V_\delta)) = +\infty$, avec la propriété d'approximabilité rappelée ci-dessous. De même pour $(W_\delta)_\delta$.

Définition 8.7 *La famille $(V_\delta)_\delta$ vérifie la propriété d'approximabilité de V si, et seulement si*

$$\begin{aligned} & \exists V^* \text{ dense de } V, \quad \forall \delta, \exists r_\delta \in \mathcal{L}(V^*, V_\delta) \text{ tels que} \\ & \forall v \in V^*, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|v - r_\delta v\|_V = 0. \end{aligned} \tag{8.8}$$

En particulier, on peut avoir $V = W$, et choisir des espaces $(V_\delta)_\delta$ d'approximation des solutions *différents* des espaces $(W_\delta)_\delta$ d'approximation des fonctions-test. Plus généralement, lorsqu'on choisit $(V_\delta)_\delta \neq (W_\delta)_\delta$, on parle d'approximation de Petrov-Galerkin.

L'approximation du problème (8.1) s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in V_\delta \text{ tel que} \\ \forall w_\delta \in W_\delta, \quad a_\delta(u_\delta, w_\delta) = \langle \ell_\delta, w_\delta \rangle_{W_\delta}, \end{cases} \tag{8.9}$$

avec des formes sesquilinéaires $(a_\delta)_\delta$ et antilinéaires $(\ell_\delta)_\delta$ qui peuvent être différentes des formes exactes a and ℓ (on "généralise" quelque peu le formalisme de la séance 3...). Pour des discrétisations par éléments finis, ceci est le cas si on utilise des formules approchées pour calculer les diverses quantités (formules de quadrature), ou bien si le maillage ne recouvre pas exactement le domaine dans lequel le problème exact est posé. Pour prendre en compte les écarts entre formes approchées et exactes, on introduit, pour tout $\delta > 0$ et tout $v_\delta \in V_\delta$, les *termes de consistance*

$$Cons_{\ell,\delta} = \sup_{w_\delta \in W_\delta \setminus \{0\}} \frac{|\langle \ell - \ell_\delta, w_\delta \rangle_{W_\delta}|}{\|w_\delta\|_W}, \quad (8.10)$$

$$Cons_{a,\delta}(v_\delta) = \sup_{w_\delta \in W_\delta \setminus \{0\}} \frac{|(a - a_\delta)(v_\delta, w_\delta)|}{\|w_\delta\|_W}. \quad (8.11)$$

En termes de normes, on a respectivement

$$Cons_{\ell,\delta} = \|\ell|_{W_\delta} - \ell_\delta\|_{W'_\delta}, \text{ et } \|a|_{V_\delta \times W_\delta} - a_\delta\| = \sup_{v_\delta \in V_\delta \setminus \{0\}} \frac{Cons_{a,\delta}(v_\delta)}{\|v_\delta\|_V}.$$

En règle générale, on écrira ℓ au lieu de $\ell|_{W_\delta}$ et de même a au lieu de $a|_{V_\delta \times W_\delta}$.

On peut aussi écrire le problème approché (8.9) sous la forme équivalente

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in V_\delta \text{ tel que} \\ A_\delta u_\delta = \ell_\delta \text{ dans } (W_\delta)', \end{cases} \quad (8.12)$$

où chaque application linéaire $A_\delta \in \mathcal{L}(V_\delta, W'_\delta)$ est définie par :

$$\forall (v_\delta, w_\delta) \in V_\delta \times W_\delta, \quad \langle A_\delta v_\delta, w_\delta \rangle_{W_\delta} = a_\delta(v_\delta, w_\delta).$$

8.2.2 Caractère bien posé et stabilité des problèmes approchés

A partir de là on peut étudier le caractère bien posé des problèmes approchés (8.9), ainsi que l'erreur $u - u_\delta$, en prenant notamment en compte les termes de consistance.

Pour commencer, pour avoir une solution unique de (8.9), il est nécessaire que :

$$\boxed{\dim(V_\delta) = \dim(W_\delta)},$$

et on fait cette hypothèse (pour tout δ) à partir de maintenant. Voir également le §3.3 pour une discussion approfondie.

Ci-dessous, on énonce la *condition inf-sup discrète*, ou de *stabilité discrète, uniforme*.

Définition 8.8 *La famille des formes $(a_\delta)_\delta$ vérifie une condition inf-sup discrète uniforme si, et seulement si*

$$\exists \alpha_\dagger > 0, \forall \delta > 0, \forall v_\delta \in V_\delta, \sup_{w_\delta \in W_\delta \setminus \{0\}} \frac{|a_\delta(v_\delta, w_\delta)|}{\|w_\delta\|_W} \geq \alpha_\dagger \|v_\delta\|_V. \quad (8.13)$$

D'après le théorème 8.5, si (8.13) est vraie, alors les problèmes approchés sont bien posés dans $V_\delta \times W_\delta$ pour tout δ .

On énonce une condition de \mathbf{T} -coercivité discrète.

Définition 8.9 *La famille des formes $(a_\delta)_\delta$ est uniformément \mathbf{T}_δ -coercive si, et seulement si*

$$\begin{aligned} \exists \alpha^*, \beta^* > 0, \forall \delta > 0, \exists \mathbf{T}_\delta \in \mathcal{L}(V_\delta, W_\delta), \\ \|\mathbf{T}_\delta\| \leq \beta^* \text{ et } \forall v_\delta \in V_\delta, |a_\delta(v_\delta, \mathbf{T}_\delta v_\delta)| \geq \alpha^* \|v_\delta\|_V^2. \end{aligned} \quad (8.14)$$

On établit maintenant l'équivalence entre la condition inf-sup discrète uniforme, et l'uniforme \mathbf{T}_δ -coercivité des formes $(a_\delta)_\delta$.

Théorème 8.10 (Caractère bien posé) *Soit une famille $(a_\delta)_\delta$ de formes sesquilinéaires, continues et uniformément bornées. Les trois assertions ci-dessous sont équivalentes :*

- (i) *les problèmes discrets (8.9) sont bien posés pour tout δ , et les applications linéaires $(A_\delta^{-1})_\delta$ sont uniformément bornées ;*
- (ii) *la famille des formes $(a_\delta)_\delta$ vérifie une condition inf-sup discrète uniforme ;*
- (iii) *la famille des formes $(a_\delta)_\delta$ est uniformément \mathbf{T}_δ -coercive.*

Démonstration : (i) \implies (iii). On définit $\mathbf{T}_\delta = I_{W'_\delta \rightarrow W_\delta} \circ A_\delta$, avec $I_{W'_\delta \rightarrow W_\delta}$ l'isométrie bijective obtenue via le théorème de Riesz :

$$\forall (\ell_\delta, w_\delta) \in W'_\delta \times W_\delta, \quad (I_{W'_\delta \rightarrow W_\delta} \ell_\delta, w_\delta)_{W_\delta} = \langle \ell_\delta, w_\delta \rangle_{W'_\delta}.$$

D'après (i), \mathbf{T}_δ est bijective.

Puisque les formes $(a_\delta)_\delta$ uniformément bornées, on a $\|\mathbf{T}_\delta\| \leq \max_\delta \|A_\delta\| < \infty$ (transposer (2.12)).

Par hypothèse, $\mathbf{T}_\delta^{-1} = A_\delta^{-1} \circ I_{W_\delta \rightarrow W'_\delta}$ est telle que $\|\mathbf{T}_\delta^{-1}\| \leq C^*$, avec $C^* = \max_\delta \|A_\delta^{-1}\| < \infty$. Soit $v_\delta \in V_\delta$, on a tout d'abord $\|v_\delta\|_V \leq \|\mathbf{T}_\delta^{-1}\| \|\mathbf{T}_\delta v_\delta\|_W \leq C^* \|\mathbf{T}_\delta v_\delta\|_W$, et on trouve

$$a_\delta(v_\delta, \mathbf{T}_\delta v_\delta) = \langle A_\delta v_\delta, \mathbf{T}_\delta v_\delta \rangle_{W_\delta} = (I_{W'_\delta \rightarrow W_\delta} \circ A_\delta v_\delta, \mathbf{T}_\delta v_\delta)_{W_\delta} = \|\mathbf{T}_\delta v_\delta\|_W^2 \geq \|v_\delta\|_V^2 / (C^*)^2.$$

Ainsi, $(a_\delta)_\delta$ est uniformément \mathbf{T}_δ -coercive.

(iii) \implies (ii). Soit $v_\delta \in V_\delta \setminus \{0\}$, on a $0 < \|\mathbf{T}_\delta v_\delta\|_W \leq \beta^* \|v_\delta\|_V$, et

$$\sup_{w_\delta \in W_\delta \setminus \{0\}} \frac{|a_\delta(v_\delta, w_\delta)|}{\|w_\delta\|_W} \geq \frac{|a_\delta(v_\delta, \mathbf{T}_\delta v_\delta)|}{\|\mathbf{T}_\delta v_\delta\|_W} \geq \alpha^* \frac{\|v_\delta\|_V^2}{\|\mathbf{T}_\delta v_\delta\|_W} \geq \frac{\alpha^*}{\beta^*} \|v_\delta\|_V.$$

Il suit que $(a_\delta)_\delta$ vérifie une condition inf-sup discrète uniforme.

(ii) \implies (i). D'après le théorème 8.5, si $a_\delta(\cdot, \cdot)$ vérifie une condition inf-sup, le problème discret (8.9) est bien posé. Ainsi A_δ^{-1} est bien défini. En outre, pour tout $\ell_\delta \in W'_\delta$, on sait qu'il existe $u_\delta \in V_\delta$ telle que $A_\delta u_\delta = \ell_\delta$. On déduit finalement de (8.13) que

$$\begin{aligned} \|A_\delta^{-1} \ell_\delta\|_{V_\delta} &= \|A_\delta^{-1}(A_\delta u_\delta)\|_{V_\delta} = \|u_\delta\|_{V_\delta} \\ &\leq \frac{1}{\alpha_\dagger} \sup_{w_\delta \in W_\delta \setminus \{0\}} \frac{|a_\delta(u_\delta, w_\delta)|}{\|w_\delta\|_W} = \frac{1}{\alpha_\dagger} \sup_{w_\delta \in W_\delta \setminus \{0\}} \frac{|\langle \ell_\delta, w_\delta \rangle_{W'_\delta}|}{\|w_\delta\|_W} = \frac{1}{\alpha_\dagger} \|\ell_\delta\|_{W'_\delta}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les $(A_\delta^{-1})_\delta$ sont uniformément bornées. ■

8.2.3 Etude d'erreur

A partir de ce qui précède, on obtient en outre une estimation de l'erreur si (8.13) ou (8.14) est vraie, incorporant les termes de consistance. On généralise ici les lemmes de Céa déjà obtenus au §3.

Théorème 8.11 (Lemme de Céa) *Sous les hypothèses du théorème 8.10, on a l'estimation d'erreur*

$$\exists C > 0, \forall \delta, \quad \|u - u_\delta\|_V \leq C \inf_{v_\delta \in V_\delta} (\|u - v_\delta\|_V + \text{Cons}_{\ell, \delta} + \text{Cons}_{a, \delta}(v_\delta)). \quad (8.15)$$

Démonstration : Par hypothèse, (8.13) est vraie. Pour tout $v_\delta \in V_\delta$, il existe donc $w_\delta \in W_\delta$ tel que

$$\alpha_\dagger \|u_\delta - v_\delta\|_V \|w_\delta\|_V \leq |a_\delta(u_\delta - v_\delta, w_\delta)|.$$

Par ailleurs, on a les égalités successives :

$$\begin{aligned} a_\delta(u_\delta - v_\delta, w_\delta) &= \langle \ell_\delta, w_\delta \rangle_{W_\delta} - a_\delta(v_\delta, w_\delta) \\ &= \langle \ell_\delta - \ell, w_\delta \rangle_{W_\delta} + \langle \ell, w_\delta \rangle_W - a_\delta(v_\delta, w_\delta) \\ &= \langle \ell_\delta - \ell, w_\delta \rangle_{W_\delta} + a(u, w_\delta) - a_\delta(v_\delta, w_\delta) \\ &= \langle \ell_\delta - \ell, w_\delta \rangle_{W_\delta} + a(u - v_\delta, w_\delta) + (a - a_\delta)(v_\delta, w_\delta). \end{aligned}$$

Et, par définition des termes de consistance, on trouve

$$\|u_\delta - v_\delta\|_V \leq \frac{1}{\alpha_\dagger} (\text{Cons}_{\ell, \delta} + \|a\| \|u - v_\delta\|_V + \text{Cons}_{a, \delta}(v_\delta)).$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a $\|u - u_\delta\|_V \leq \|u - v_\delta\|_V + \|u_\delta - v_\delta\|_V$, et on en déduit finalement (8.15) avec $C = \max\left(\frac{1}{\alpha_\dagger}, \frac{\|a\|}{\alpha_\dagger} + 1\right) > 0$. ■

Quelques commentaires :

- Si les termes de consistance sont nuls, on retrouve les lemmes de Céa vus à la séance 3.
- Si $a_\delta = a$ pour tout $\delta > 0$, l'approche historique est d'utiliser le résultat (voir [7])

Théorème 8.12 (Lemme de Fortin) *On suppose la condition inf-sup (8.4) vérifiée. Alors la forme a vérifie une condition inf-sup discrète uniforme si, et seulement si*

$$\begin{aligned} \exists \beta' > 0, \quad \forall \delta, \quad \exists \pi_\delta \in \mathcal{L}(W, W_\delta) \text{ tels que} \\ \forall \delta, \quad \|\pi_\delta\| \leq \beta' \quad \text{et} \quad \forall \delta, \quad \forall w \in W, \quad \forall v_\delta \in V_\delta, \quad a(v_\delta, \pi_\delta w - w) = 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

- On a convergence de l'approximation pour toute donnée $\ell \in W'$, c'est-à-dire que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u - u_\delta\|_V = 0$, si d'une part les termes de consistance tendent vers 0 :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Cons}_{\ell, \delta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|a - a_\delta\| = 0;$$

et si, d'autre part, la famille $(V_\delta)_\delta$ vérifie la propriété d'approximabilité (8.8).

On revient maintenant à l'approche utilisant la T-coercivité. Par hypothèse, le problème (8.1) est bien posé. Selon le théorème 8.5, il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tel que la forme $a(\cdot, \cdot)$ est T-coercive. On utilise la connaissance d'un tel opérateur T dans les deux résultats ci-dessous.

Corollaire 8.13 *Soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$ réalisant la T-coercivité. On suppose que $TV_\delta \subset W_\delta$ pour tout δ , et que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|a - a_\delta\| = 0$. Alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que la famille $(a_\delta)_{\delta \leq \delta_0}$ vérifie la T-coercivité discrète, et on a l'estimation d'erreur*

$$\exists C > 0, \delta_0 > 0, \forall \delta \leq \delta_0, \quad \|u - u_\delta\|_V \leq C \inf_{v_\delta \in V_\delta} (\|u - v_\delta\|_V + \text{Cons}_{\ell, \delta} + \text{Cons}_{a, \delta}(v_\delta)). \quad (8.17)$$

Démonstration : Si on choisit $T_\delta = T|_{V_\delta}$ pour tout δ , on a pour tout $v_\delta \in V_\delta$:

$$\begin{aligned} |a_\delta(v_\delta, T_\delta v_\delta)| &= |a(v_\delta, Tv_\delta) - (a_\delta - a)(v_\delta, Tv_\delta)| \\ &\geq (\underline{\alpha} - \|a_\delta - a\| \|T\|) \|v_\delta\|_V^2. \end{aligned}$$

Par hypothèse, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\underline{\alpha} - \|a_\delta - a\| \|T\| \geq \frac{1}{2}\underline{\alpha}$ pour tout $\delta \in]0; \delta_0]$. On en déduit la T-coercivité discrète de $(a_\delta)_{\delta \leq \delta_0}$ et, en reprenant la démonstration du lemme de Céa, on aboutit ensuite à (8.17). ■

On note que, puisque $\ker(T) = \{0\}$ et $\dim(V_\delta) = \dim(W_\delta)$, la condition $TV_\delta \subset W_\delta$ est équivalente à la condition $TV_\delta = W_\delta$ d'après le théorème du rang.

Enfin, si on ne peut pas utiliser directement l'application T pour obtenir la T-coercivité discrète, on peut utiliser le résultat plus général ci-dessous.

Corollaire 8.14 *Soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$ réalisant la T-coercivité. On suppose qu'il existe une famille d'applications linéaires et continues $(T_\delta)_\delta$ avec $T_\delta \in \mathcal{L}(V_\delta, W_\delta)$, telle que $\|T - T_\delta\| \rightarrow 0$, et que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|a - a_\delta\| = 0$. Alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que la famille $(a_\delta)_{\delta \leq \delta_0}$ vérifie la T-coercivité discrète, et on a l'estimation d'erreur (8.17).*

Démonstration : Pour tout δ et pour tout $v_\delta \in V_\delta$, on a :

$$\begin{aligned} |a_\delta(v_\delta, T_\delta v_\delta)| &= |a(v_\delta, T_\delta v_\delta) + (a_\delta - a)(v_\delta, T_\delta v_\delta)| \\ &= |a(v_\delta, Tv_\delta) - a(v_\delta, (T - T_\delta)v_\delta) + (a_\delta - a)(v_\delta, T_\delta v_\delta)| \\ &\geq |a(v_\delta, Tv_\delta)| - |a(v_\delta, (T - T_\delta)v_\delta)| - |(a_\delta - a)(v_\delta, T_\delta v_\delta)| \\ &\geq (\underline{\alpha} - \|a\| \|T - T_\delta\| - \|a - a_\delta\| \|T_\delta\|) \|v_\delta\|_V^2. \end{aligned}$$

Par hypothèse, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $\|T_\delta\| \leq 2\|T\|$ pour tout $\delta \in]0; \delta_1]$. Puis il existe $\delta_0 \in]0; \delta_1]$ tel que $\underline{\alpha} - \|a\| \|T - T_\delta\| - 2\|a - a_\delta\| \|T\| \geq \frac{1}{2}\underline{\alpha}$ pour tout $\delta \in]0; \delta_0]$. Le résultat suit. ■

8.3 Problème avec coefficient changeant de signe

On applique la T-coercivité aux problèmes avec coefficient changeant de signe, vus à la séance précédente. Dans un domaine Ω de \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, 3$, on résout

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\text{div}(\sigma \nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où σ est un coefficient constant par morceaux, qui change de signe. Précisément, on introduit une partition de Ω , à savoir : $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$, avec Ω_1 et Ω_2 deux domaines disjoints de \mathbb{R}^d , et le coefficient σ est tel que

$$\sigma_1 = \sigma|_{\Omega_1} > 0, \quad \sigma_2 = \sigma|_{\Omega_2} < 0.$$

On utilise les notations $\Sigma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$ pour l'interface, et $\Gamma_k = \partial\Omega \cap \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$, qu'on suppose non-vides.

La formulation variationnelle équivalente (voir la séance 2) est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \overline{\nabla w} \, d\Omega = \int_{\Omega} f \overline{w} \, d\Omega. \end{cases} \quad (8.18)$$

On munit $H_0^1(\Omega)$ de la semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$, qui définit une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ d'après l'inégalité de Poincaré. Comme déjà vu à la séance précédente, la forme sesquilinéaire, hermitienne (ici on considère des espaces sur \mathbb{C}) et continue $(v, w) \mapsto \int_{\Omega} \sigma \nabla v \cdot \overline{\nabla w} \, d\Omega$ n'est pas coercive dans $H_0^1(\Omega)$ et, pour déterminer si le problème (8.18) est bien posé, on a utilisé la T-coercivité.

On introduit les espaces fonctionnels $V_k = \{v_k \in H^1(\Omega_k) \text{ tel que } v_k|_{\Gamma_k} = 0\}$, muni de $\|v_k\|_{V_k} = |v_k|_{1,\Omega_k}$, pour $k = 1, 2$. Pour $v \in L^2(\Omega)$, on pose $v_k = v|_{\Omega_k}$ pour $k = 1, 2$. Soit d'abord $\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2} \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ telle que, pour tout $v_1 \in V_1$, on a le raccord $(\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2} v_1)|_{\Sigma} = v_1|_{\Sigma}$. On définit

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \mathbf{T}_1 v = \begin{cases} v_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -v_2 + 2\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2} v_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}.$$

Soit ensuite $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} \in \mathcal{L}(V_2, V_1)$ telle que, pour tout $v_2 \in V_2$, on a le raccord $(\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} v_2)|_{\Sigma} = v_2|_{\Sigma}$. On définit

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \mathbf{T}_2 v = \begin{cases} v_1 - 2\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} v_2 & \text{dans } \Omega_1 \\ -v_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}.$$

On a vu à la séance précédente que, pour obtenir la T-coercivité avec \mathbf{T}_1 ou \mathbf{T}_2 , il suffit que

$$\frac{\sigma_1}{|\sigma_2|} > \left(\inf_{\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2}} \|\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2}\| \right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{|\sigma_2|}{\sigma_1} > \left(\inf_{\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}} \|\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}\| \right)^2. \quad (8.19)$$

Afin de déterminer $\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2}$ ou $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}$ vérifiant (8.19), plusieurs approches ont été proposées, selon deux catégories principales :

- à base de trace (sur Σ) et de relèvement de $\partial\Omega_k$ dans Ω_k , cf. [15, 18] ;
- à base de transformations géométriques, cf. [18, 14, 9].

8.3.1 Géométries simples

L'exemple le plus simple est celui d'une géométrie (forme du domaine Ω) symétrique par rapport à l'interface Σ . Ceci impose que l'interface est contenue dans un hyperplan H^Σ de \mathbb{R}^d : soit \mathcal{S}^Σ la symétrie par rapport à cet hyperplan. Comme on a vu à la séance précédente, le problème avec coefficient changeant de signe est bien posé si $\sigma_2/\sigma_1 \neq -1$. De plus, il est mal posé si $\sigma_2/\sigma_1 = -1$ (on parle de cas critique). En conclusion, le problème est bien posé si, et seulement si, $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.

Lorsqu'on discrétise par éléments finis (espaces discrets $(V_h)_h$), on rappelle que si on a $TV_h \subset V_h$ pour une application T réalisant la T -coercivité, alors d'après le corollaire 8.13 on a automatiquement convergence... Or on a vu que pour le cas de la géométrie symétrique, on utilisait une transformation basée sur la symétrie \mathcal{S}^Σ . Ceci nous indique que si on utilise des maillages symétriques par rapport à H^Σ (on parle de *maillages T-conformes*), alors on doit avoir convergence! Ré-examinons la convergence sur l'exemple tiré de [11]. Le domaine symétrique

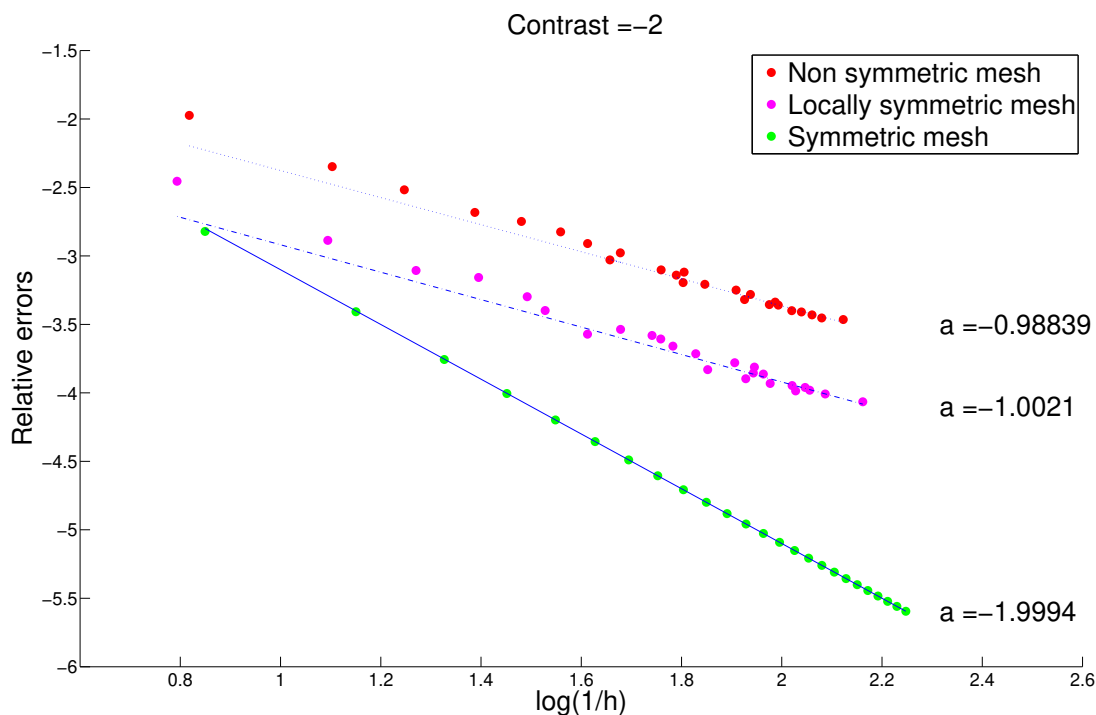


FIGURE 8.1 – Contraste $\sigma_2/\sigma_1 = -2$.

est la réunion de $\Omega_1 =]-1, 0[\times]0, 1[$ et $\Omega_2 =]0, 1[\times]0, 1[$. Pour réaliser les tests et calculer précisément l'erreur, on se donne la solution exacte u , qu'on choisit régulière par morceaux, et on calcule la donnée f correspondante. On discrétise la formulation variationnelle (8.18) à l'aide d'éléments finis de Lagrange P_1 : les espaces discrets $(V_h)_h$ sont construits à partir d'une famille de maillages régulière (voir la séance 2). Comme la solution est régulière par morceaux,

l'ordre théorique de convergence de l'erreur est de 1 en norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ et de 2 en norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Les tests ont été réalisés à l'aide du logiciel **Freefem++**. On choisit deux valeurs du contraste $\sigma_2/\sigma_1 \in \{-2, -1.001\}$, et on étudie ci-dessous l'influence des maillages sur l'erreur, mesurée en norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Les échelles sont en log-log, voir les figures 8.1-8.2. Quelques commentaires

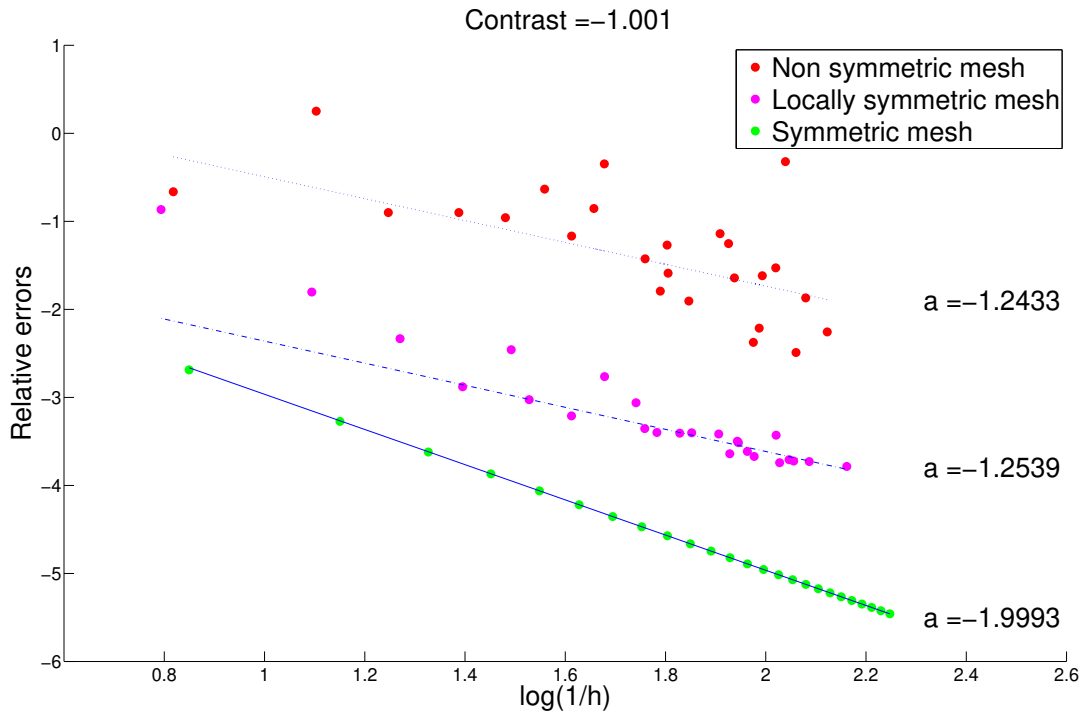


FIGURE 8.2 – Contraste $\sigma_2/\sigma_1 = -1.001$.

reprenant et complétant ceux de la séance précédente :

- Que les maillages soient (complètement) symétriques, localement symétriques dans un voisinage de Σ , ou quelconques, on observe que l'erreur converge vers 0. Par contre, les ordres des erreurs sont différents d'une classe de maillage à l'autre. Ceci est valable pour les deux valeurs de σ_2/σ_1 , et les différences sont plus marquées lorsqu'on se rapproche de la valeur critique -1.
- De plus, les vitesses de convergence sont différentes. On ne retrouve l'ordre théorique (2) que pour les maillages symétriques (le résultat du corollaire 8.13 est validé). Pour les deux autres classes de maillage, on semble être dans le régime "pré-asymptotique" de convergence (on converge, mais pas à l'ordre prévu par la théorie).
- Enfin, la convergence n'est pas monotone, sauf si les maillages sont complètement symétriques.

Ca fonctionne aussi pour d'autres géométries "simples" étudiées à la séance précédente, comme par exemple un carré dans un carré dans \mathbb{R}^2 ($\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}^* \setminus [-3, -1/3]$). Mais aussi pour un cube dans un cube dans \mathbb{R}^3 ($\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}^* \setminus [-7, -1/7]$). Pour ces géométries en effet, on

peut déterminer des applications $R_{1 \rightarrow 2}$ ou $R_{2 \rightarrow 1}$ basées sur des transformations géométriques élémentaires (symétries et/ou rotations) qui permettent de réaliser la T-coercivité pour les valeurs du contraste écrites ci-dessus. Encore une fois, l'avantage est que les applications $T \in \{T_1, T_2\}$ permettent d'assurer $TV_h \subset V_h$ si on choisit des maillages T-conformes, c'est-à-dire compatibles avec les transformations géométriques élémentaires utilisées.

8.3.2 Géométries quelconques

Dans le cas d'une interface "quelconque", typiquement régulière (pour $d = 2, 3$), ou polygonale ($d = 2$), on peut prouver l'optimalité de l'approche développée précédemment (via les applications T_1 ou T_2) pour établir la T-coercivité, cf. [14, 9]. Précisément, grâce à cette approche on peut démontrer qu'il existe un *intervalle critique* $I_\Sigma \subset \mathbb{R}_*$ tel que

- si $\sigma_2/\sigma_1 \in I_\Sigma$: le problème avec coefficient changeant de signe est mal posé dans $H_0^1(\Omega)$;
- si $\sigma_2/\sigma_1 \notin I_\Sigma$: on peut établir une inégalité de Gårding

$$\exists \underline{\alpha}_\sigma, \underline{\beta}_\sigma > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega), \left| \int_\Omega \sigma \nabla v \cdot \overline{\nabla(Tv)} d\Omega \right| \geq \underline{\alpha}_\sigma |v|_{1,\Omega}^2 - \underline{\beta}_\sigma \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En d'autres termes, le problème avec coefficient changeant de signe est bien posé, au sens de l'alternative de Fredholm (l'existence d'une solution équivaut à son unicité ; et, dans ce cas, celle-ci dépend de façon continue de la donnée).

Les bornes de l'intervalle critique I_Σ dépendent de la valeurs des angles aux sommets de l'interface (si elle en possède...). Dans tous les cas, -1 appartient à I_Σ . Et, si l'interface est de classe \mathcal{C}^2 et sans extrémités, on a l'égalité $I_\Sigma = \{-1\}$ (ce résultat avait déjà été établi dans [17]).

Si on en revient au problème abstrait (8.1) avec $V = W$, on énonce

Définition 8.15 Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire et continue sur $V \times V$. $a(\cdot, \cdot)$ est T-coercive+compacte si, et seulement si,

$$\begin{aligned} & \exists \mathbf{C} \in \mathcal{L}(V) \text{ compacte} \\ & \exists \mathbf{T} \in \mathcal{L}(V) \text{ bijective} \end{aligned}, \quad \exists \underline{\alpha} > 0, \underline{\beta} \in \mathbb{R}, \forall v \in V, |a(v, \mathbf{T}v)| \geq \underline{\alpha} \|v\|_V^2 - \underline{\beta} \|\mathbf{C}v\|_V^2. \quad (8.20)$$

On peut établir le résultat (voir par exemple [16, Chapter 2])

Lemme 8.16 Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire, continue et hermitienne sur $V \times V$. Les deux assertions ci-dessous sont équivalentes :

- (i) la formulation variationnelle (8.1) est bien posée au sens de Fredholm ;
- (ii) la forme $a(\cdot, \cdot)$ est T-coercive+compacte.

Dnas ce contexte, si le problème exact (8.1) est bien posé (au sens d'Hadamard), on peut généraliser les corollaires 8.13 ou 8.14 pour assurer la convergence des solutions discrètes vers la solution exacte [11, 9].

Bibliographie

- [1] **R.A. Adams, J.J.F. Fournier**, *Sobolev spaces. Second edition*, Academic Press, New York (2003).
- [2] **D. Boffi, F. Brezzi, M. Fortin**, *Mixed and hybrid finite element methods and applications*, Springer-Verlag (2013).
- [3] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris (1983). *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer (2011).
- [4] **J. Bussac, P. Reuss**, *Traité de neutronique*, Hermann, Paris (1985).
- [5] **P. Ciarlet Jr., E. Jamelot, F. Kpadonou**, Domain decomposition methods for the diffusion equation with low-regularity solution, *Computers Math. Applic.*, **74**, 2369–2384 (2017).
- [6] **P. Ciarlet Jr., E. Lunéville**, *La méthode des éléments finis : aspects fondamentaux, de la théorie à la pratique*, Editions ISTE (à paraître).
- [7] **V. Girault, P.-A. Raviart**, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer Series in Computational Mathematics, **5**, Springer Verlag, Berlin (1986).
- [8] **P. Grisvard**, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, 24, Pitman, London (1985).
- [9] **A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Carvalho, P. Ciarlet Jr.**, Mesh requirements for the finite element approximation of problems with sign-changing coefficients, *Numer. Math.*, **138**, 801–838 (2018).
- [10] **G. Bouchitté, C. Bourel, D. Felbacq**, Homogenization near resonances and artificial magnetism in 3D dielectric metamaterials, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **225**, 1233–1277, (2017).
- [11] **L. Chesnel, P. Ciarlet Jr.**, T-coercivity and continuous Galerkin methods : application to transmission problems with sign changing coefficients, *Numer. Math.*, **124**, 1–29 (2013).
- [12] **J.B. Pendry**, Negative refraction makes a perfect lens, *Phys. Rev. Letters*, **85**, 3966–3969 (2000).
- [13] **V.G. Veselago**, The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ , *Soviet Physics-Uspekh*, **10**, 509–514 (1968).

- [14] **A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr.**, T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials, *Math. Mod. Num. Anal.*, **46**, 1363–1387 (2012).
- [15] **A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr., C. M. Zwölf**, Time harmonic wave diffraction problems in materials with sign-shifting coefficients, *J. Comput. Appl. Math.*, **234**, 1912–1919 (2010). (Corrigendum *J. Comput. Appl. Math.*, **234**, 2616 (2010))
- [16] **C. Carvalho**, *Etude mathématique et numérique de structures plasmoniques avec des coins*, Thèse de l’Ecole Polytechnique (2015).
- [17] **M. Costabel, E. Stephan**, A direct boundary integral method for transmission problems, *J. of Math. Anal. and Appl.*, **106**, 367–413 (1985).
- [18] **S. Nicaise, J. Venel**, A posteriori error estimates for a finite element approximation of transmission problems with sign changing coefficients, *J. Comput. Appl. Math.*, **235**, 4272–4282 (2011).

Index

- application linéaire
 - compacte, 3
 - continue, 3
- approximation
 - conforme, 28
 - convergence, 32, 34
 - vitesse de convergence, 32
- carte locale, 8
- condition
 - de solvabilité, 22
 - de stabilité, 22
 - de stabilité discrète, 32
 - de stabilité discrète uniforme, 34, 71
 - inf-sup, 22
 - inf-sup discrète, 32
 - inf-sup discrète uniforme, 34, 71
- consistance, 71
- corollaire
 - Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi, 24
 - Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi discret, 33
- crochets de dualité, 3, 5
- distribution, 5
 - convergence, 5
 - dérivée, 6, 7
- domaine, 8
- éléments finis
 - Lagrange, 35
 - Lagrange - calculs élémentaires, 35
 - Lagrange - degrés de liberté, 36
 - Lagrange vectoriel, 51
 - MINI, 59
 - Raviart-Thomas, 38
 - Raviart-Thomas - calculs élémentaires, 41
 - Raviart-Thomas - degrés de liberté, 39
 - Taylor-Hood, 60
- erreur, 30
- espace
 - Banach, 3
 - Hilbert, 3
 - $H^1(\cdot)$, 6
 - $H^m(\cdot)$, $m \in \mathbb{N}$, 7
 - $H_0^m(\cdot)$, $m \in \mathbb{N}$, 11
 - $L^p(\cdot)$, 4
 - séparable, 2
- flux, 9
- fonction
 - lipschitzienne, 2
 - support, 2
- forme
 - coercive, 18, 19
 - continue, 3
 - hermitienne, 18
 - symétrique, 19
 - T-coercive, 68, 72
- formulation variationnelle
 - bien posée, 21
 - diffusion, 17, 25
 - mixte, 61
 - mixte discrète, 65
 - Stokes, 46
- formule de Green, 9
- frontière
 - bornée, 10

- lipschitzienne, 8
- inégalité
 - Young, 55
- intégration par parties, 9, 13
- lemme
 - Céa, 30, 33, 73
 - Fortin, 66, 73
- maillage
 - famille régulière, 35
 - pas, 35
 - T-conforme, 76
- modèle, 1
 - bien posé, 1
- opérateur d'interpolation, 36
- opérateur de dérivation
 - divergence, 1, 8
 - gradient, 1, 8
 - Laplacien, 2
 - rotationnel, 2
- ouvert
 - borné, 4
- pénalisation, 50
- prolongement par continuité, 3
- propriété
 - d'approximabilité, 31
 - de décalage, 37
- régularité par morceaux, 37, 52
- saut, 38
- théorème
 - de Rham, 47
 - Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi, 22
 - Lax-Milgram, 19
 - trace, 10
 - trace normale, 13
- trace, 10
- trace normale, 13
- transformation de Piola, 41