Cours AMS303 :
Méthodes variationnelles pour l'analyse et la résolution de problèmes non coercifs - 1

Patrick Ciarlet
ENSTA Paris
828, boulevard des Maréchaux
91762 Palaiseau Cedex

Table des matières

Notes de cours 1

Motivation et outils mathématiques

1.1 Introduction

En règle générale, on part d'un *modèle*, qui consiste en :
- l'identification de la/des quantités à calculer, regroupée(s) sous le terme générique de *solution* ; de la/des *données* ;
- le choix de la *mesure* des solutions et des données ;
- la *modélisation* du phénomène physique (ou autre) les gouvernant, via par exemple des équations, des inéquations, des conditions au bord...

Le but du cours est de fournir les outils mathématiques permettant de prouver que ce modèle est *bien posé*, c'est-à-dire d'établir :
- l'*existence*, l'*unicité* de la solution par un jeu de données fixé ;
- la *dépendance continue* de la solution par rapport aux données.

D'où l'importance cruciale de la mesure de la solution et des données.
On raisonnera essentiellement via l'analyse des formulations variationnelles. En outre, on construira des méthodes d'approximation de type éléments finis, permettant de résoudre numériquement le modèle.

La dimension spatiale est notée $\mathtt{d} \geq 1$, et on appelle $(\mathtt{e}_i)_{i=1,\mathtt{d}}$ la base orthonormale de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$. Concernant l'étude des modèles proposés, on choisira habituellement $\mathtt{d} \leq 3$. Dans la suite, les équations/inéquations/conditions au bord font intervenir les *opérateurs de dérivation* "classiques" :
- le *gradient*, opérateur à valeurs vectorielles qui agit sur une fonction à valeurs scalaires :
$$\nabla v = \sum_{i=1,\mathtt{d}} \frac{\partial v}{\partial x_i} \mathtt{e}_i \,;$$
- la *divergence*, opérateur à valeurs scalaires qui agit sur une fonction à valeurs vectorielles :
$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \sum_{i=1,\mathtt{d}} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \,;$$

— le *Laplacien*, opérateur à valeurs scalaires qui agit sur une fonction à valeurs scalaires :

$$\Delta v = \sum_{i=1,\mathtt{d}} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\,;$$

— le *rotationnel* (cas $\mathtt{d} = 3$), opérateur à valeurs vectorielles qui agit sur une fonction à valeurs vectorielles :

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\mathtt{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\mathtt{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\mathtt{e}_3.$$

On a la relation suivante : $\Delta v = \mathrm{div}\,(\nabla v)$. On écrit parfois que $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{v}$, et $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{v}$.

Le lecteur est supposé être familier avec les espaces de Lebesgue L^p, $p \in [1,\infty]$, ainsi qu'avec les bases de la théorie des distributions. Les espaces de Sobolev H^m, $m \in \mathbb{N}$ sont également supposé connus. On fait quelques rappels dans la suite (voir §1.2 et §1.3).
On se place dans des espaces fonctionnels dont les éléments sont à valeurs dans $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. Le symbole $|\cdot|$ représente donc la valeur absolue ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou le module ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Et, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les produits scalaires sont hermitiens.
Enfin, lorsqu'on considère un espace vectoriel normé X, sa norme "naturelle" est notée $\|\cdot\|_X$. Parfois, on écrira $(X, \|\cdot\|_X)$ pour préciser les idées.

1.2 Outils mathématiques classiques

1.2.1 Autour des fonctions

Une fonction $f\ :\ X_0 \to Y$ (avec $X_0 \subset X$ et X, Y deux espaces vectoriels normés) est *lipschitzienne* si :

$$\exists \eta > 0,\ \forall x, x' \in X_0, \quad \|f(x) - f(x')\|_Y \le \eta\,\|x - x'\|_X.$$

Soit f une fonction de $(x_1,\cdots,x_\mathtt{d})$. Sa *dérivée partielle d'ordre* α (si elle existe) est notée

$$\partial_\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_\mathtt{d}^{\alpha_\mathtt{d}}},$$

où $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_\mathtt{d})$ de $\mathbb{N}^\mathtt{d}$ est un *multi-indice*, de longueur $|\alpha| = \sum_{j=1}^{\mathtt{d}} \alpha_j$.
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^\mathtt{d}$. Pour une fonction $v \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, le *support* de v, noté $\mathrm{supp}(v)$, est le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert Ω' tel que $v_{|\Omega'} = 0$.

1.2.2 Espaces de Banach, espaces de Hilbert

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. On rappelle que :

— L'espace $(X, \|\cdot\|_X)$ est *séparable* s'il contient un sous-ensemble dénombrable et dense. Dans ce cas, il existe une famille dénombrable qui en constitue une base.

— L'espace $(X, \|\cdot\|_X)$ est un *espace de Banach* s'il est complet, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy converge.
— L'espace $(X, \|\cdot\|_X)$ est un *espace de Hilbert* si c'est un espace de Banach, et si la norme $\|\cdot\|_X$ dérive d'un produit scalaire (hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), noté $(\cdot,\cdot)_X$.
— On note X' l'espace vectoriel des formes *linéaires et continues* sur X ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), respectivement des formes *antilinéaires et continues* sur X ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On l'appelle le *dual* de X. Par définition, $\ell \in X'$ est continue si $\sup_{v\in X\setminus\{0\}} |\ell(v)|/\|v\|_X < \infty$. On munit X' de la norme :

$$\|\ell\|_{X'} = \sup_{v\in X\setminus\{0\}} |\ell(v)|/\|v\|_X. \tag{1.1}$$

Pour $\ell(v)$, on utilise généralement la notation avec *crochets de dualité*, c'est-à-dire $\langle \ell, v\rangle_{X',X}$ ou $\langle \ell, v\rangle_X$. Si $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace de Banach, alors $(X', \|\cdot\|_{X'})$ est également un espace de Banach.
— Soient X et Y deux espaces de Banach : une forme $a(\cdot,\cdot)$, *bilinéaire* sur $X \times Y$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), resp. *sesquilinéaire* sur $X \times Y$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), est *continue* si $\sup_{v\in X\setminus\{0\},\, w\in Y\setminus\{0\}} \frac{|a(v,w)|}{\|v\|_X\|w\|_Y} < \infty$. Le module de continuité de a est égal à

$$|||a||| = \sup_{v\in X\setminus\{0\},\, w\in Y\setminus\{0\}} \frac{|a(v,w)|}{\|v\|_X\|w\|_Y}. \tag{1.2}$$

— Soient X et Y deux espaces de Banach : une application *linéaire* A de X dans Y est *continue* si $\sup_{v\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_Y}{\|v\|_X} < \infty$. Sa norme est

$$|||A||| = \sup_{v\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_Y}{\|v\|_X}. \tag{1.3}$$

On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de X dans Y, respectivement $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de X dans lui-même. Une application linéaire A de $\mathcal{L}(X,Y)$ est *compacte* si, de toute suite bornée de X, on peut extraire une sous-suite dont l'image par A converge dans Y. On vérifie que la composition d'une application linéaire continue par une application linéaire compacte (ou vice versa) est compacte.
— Soient X et Y deux espaces de Banach, et X^+ un sous-espace vectoriel de X, dense dans X. On suppose que A est une application linéaire de X^+ dans Y pour laquelle il existe une constante $C_A > 0$ telle que, pour tout $v^+ \in X^+$, on a $\|Av^+\|_Y \leq C_A \|v^+\|_X$. Alors on peut prolonger par continuité A en une application linéaire et continue de X dans Y, appelée *prolongement* de A, et ce prolongement est unique.
En pratique, si on conserve la notation A pour le prolongement, on obtient Av pour tout $v \in X$ par passage à la limite dans Y : $Av = \lim_{k\to+\infty} Av_k^+$, où $(v_k^+)_k$ est une suite (quelconque) d'éléments de X^+ convergeant vers v dans X. De plus, on a l'inégalité $|||A||| \leq C_A$.

1.2.3 Espaces de Lebesgue

On se place dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$. On renvoie à [3, 1] pour les résultats.

Définition 1.1 *L'espace $L^p(\Omega)$ est composé des fonctions de Ω dans $\mathbb{K}$, mesurables au sens de Lebesgue, et telles que :*

$$\begin{cases} \text{pour } 1 \leq p < \infty & \|v\|_{L^p(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega |v|^p \, d\boldsymbol{x} \right\}^{1/p} < \infty \\ \text{pour } p = \infty & \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{supess}_{\boldsymbol{x}\in\Omega} |v(\boldsymbol{x})| < \infty \end{cases}.$$

Muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach. Lorsque $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est de plus séparable.

Pour $p \in [1, \infty]$, on peut également définir les fonctions qui sont *localement* dans L^p de la façon suivante. Si[1] $v 1_K$ appartient à $L^p(\Omega)$ pour tout sous-ensemble compact K de Ω, alors v est localement dans $L^p(\Omega)$, et on écrit $v \in L^p_{loc}(\Omega)$. Observons qu'on a les inclusions $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ pour tout $p \in [1, \infty]$.
L'égalité $v_1 = v_2$ dans $L^p_{loc}(\Omega)$ signifie que $v_1, v_2 \in L^p_{loc}(\Omega)$ et que $v_1 = v_2$ presque partout dans Ω. Si l'une des deux fonctions appartient à $L^p(\Omega)$, l'autre appartient aussi à $L^p(\Omega)$.

On a ensuite un résultat important de stabilité par la multiplication des éléments de $L^\infty(\Omega)$.

Proposition 1.2 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. La multiplication est une application bilinéaire et continue de $L^\infty(\Omega) \times L^p(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$.*

Plus généralement, soit $1 \leq p \leq \infty$: on définit son *exposant conjugué* $p' \in [1, \infty]$ par la relation $1/p + 1/p' = 1$. L'inégalité de Hölder[2] permet d'établir les résultats suivants.

Proposition 1.3 *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et soit p' son exposant conjugué. La multiplication est une application bilinéaire/sesquilinéaire et continue de $L^p(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$. En outre,*

$$\forall (v, w) \in L^p(\Omega) \times L^{p'}(\Omega), \quad \|vw\|_{L^1(\Omega)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)} \|w\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Lorsque Ω est borné, *c'est-à-dire que $vol(\Omega) = \int_\Omega 1 \, d\Omega < \infty$, pour tout $1 \leq p \leq q \leq \infty$, on a l'inclusion $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, ainsi que l'estimation*[3]

$$\forall v \in L^q(\Omega), \quad \|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \big(vol(\Omega)\big)^{1/p-1/q} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

On en déduit les inclusions

$$\forall p \in [1, \infty], \quad L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega). \tag{1.4}$$

A l'aide du résultat de la proposition 1.3, on peut caractériser l'espace dual de l'espace $L^p(\Omega)$.

1. Pour $S \subset \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, 1_S est la *fonction indicatrice* de S.
2. Inégalité de Hölder : $\forall a, b \geq 0$, $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$. Le résultat est évident si $a = 0$ ou $b = 0$. Lorsque $a, b > 0$, c'est une conséquence élémentaire de la concavité de la fonction log sur $]0, +\infty[$.
3. L'injection de $L^q(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est donc une application linéaire et continue lorsque $\mathrm{vol}(\Omega) < \infty$.

Proposition 1.4 *Soit $1 \leq p < \infty$ et soit p' son exposant conjugué. L'espace dual de $L^p(\Omega)$ peut être identifié à $L^{p'}(\Omega)$: $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$. Par contre, $L^1(\Omega) \subset (L^\infty(\Omega))'$ avec inclusion stricte.*

Dans la suite, on utilise plus particulièrement l'espace $L^2(\Omega)$ pour nos modèles, qui est un espace de Hilbert.

Proposition 1.5 *L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire (hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)*

$$(v, w)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v\, w \, d\Omega \ (\mathbb{K} = \mathbb{R}); \quad (v, w)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v\, \overline{w} \, d\Omega \ (\mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

1.3 Distributions

On se place dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$. On suppose que les fonctions sont à valeurs complexes (pour les fonctions à valeurs réelles, il suffira d'enlever la conjugaison).

1.3.1 Définitions

Définition 1.6 *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est composé des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et dont le support est compact dans Ω.*

En pratique, on peut utiliser la convergence des suites pour définir la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$. Soient $(v_k)_k$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ et $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. On dit que $(v_k)_k$ *converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers v* si :

(i) il existe $K \subset \Omega$ *compact* et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\mathrm{supp}(v_k - v) \subset K$ pour tout $k \geq k_0$;
(ii) pour tous les multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathrm{d}}$, la suite $(\partial_\alpha(v_k - v))_{k \geq k_0}$ converge vers 0 dans $\mathcal{C}^0(K)$.

Définition 1.7 *Une forme T définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$, linéaire et continue, est appelée une distribution. L'espace des distributions est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $v \in \mathcal{D}(\Omega)$: on utilise les* crochets de dualité *$\langle T, v\rangle$ pour dénoter l'action de T sur v.*

D'après la topologie choisie sur $\mathcal{D}(\Omega)$, une forme linéaire T est continue si

$$\forall (v_k)_k, v \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ telles que } v_k \to v \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, v_k\rangle \to \langle T, v\rangle.$$

Par définition, une distribution T est nulle si, est seulement si,

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, v\rangle = 0.$$

En tant qu'espace dual, $\mathcal{D}'(\Omega)$ est muni de la topologie "naturelle" suivante.

Définition 1.8 *Soit $(T_k)_k$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$: elle* converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers T *si, et seulement si, pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on $\langle T_k, v\rangle \to \langle T, v\rangle$.*

On peut facilement prouver l'inclusion

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \tag{1.5}$$

en *identifiant* tout $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ à une distribution *toujours notée* v, via la correspondance

$$\forall w \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle v, w \rangle = \int_\Omega v\, w\, d\Omega. \tag{1.6}$$

D'après (1.4), pour tout $p \in [1, \infty]$, tout élément de $L^p(\Omega)$ peut être considéré comme une distribution. En particulier, pour tout $v \in L^2(\Omega)$ et tout $w \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\langle v, w \rangle = (v, \overline{w})_{L^2(\Omega)}$. D'après ce qui précède, on a pour finir le résultat élémentaire ci-dessous, important en "pratique"...

Proposition 1.9 *Soient $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si on a $\langle v, w \rangle = \langle T, w \rangle$ pour tout $w \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $T \in L^1_{loc}(\Omega)$ avec $v = T$ presque partout dans Ω.*

1.3.2 Dérivation au sens des distributions

Définition 1.10 . *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$: sa $j$ème dérivée partielle ($j = 1, \cdots, \mathtt{d}$) est définie par*

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, v \rangle = -\langle T, \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle.$$

On en déduit

Proposition 1.11 *L'application $T \mapsto \partial_j T$ est linéaire et continue de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

On a vu que $L^2(\Omega)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{D}'(\Omega)$: on peut donc dériver ses éléments *au sens des distributions.*

Définition 1.12 . *On appelle espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ l'espace*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \partial_j v \in L^2(\Omega),\ j = 1, \cdots, \mathtt{d}\},$$

où la dérivation est comprise au sens des distributions.

Muni de la norme

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega (|v|^2 + |\nabla v|^2)\, d\Omega \right\}^{1/2},$$

c'est un espace de Banach séparable. Muni du produit scalaire hermitien

$$(v, w)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (v\, \overline{w} + \nabla v \cdot \nabla \overline{w})\, d\Omega,$$

c'est un espace de Hilbert (séparable). On peut donner une définition équivalente de $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.13 *Soit $v \in L^2(\Omega)$. Alors $v \in H^1(\Omega)$ si, et seulement si, pour tout $j = 1, \cdots, \mathtt{d}$,*

$$\exists C_j \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left| (v, \frac{\partial w}{\partial x_j})_{L^2(\Omega)} \right| \leq C_j \|w\|_{L^2(\Omega)}.$$

Définition 1.14 *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathtt{d}}$ un multi-indice. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$: sa dérivée partielle d'ordre α est définie par*
$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \partial_\alpha T, v \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial_\alpha v \rangle.$$

Si $\alpha = 0$, on a évidemment $\partial_\alpha T = T$! A partir de là, on peut définir les espace de Sobolev d'ordre entier.

Définition 1.15 *Soit $m \in \mathbb{N}$: on appelle espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ l'espace*
$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \partial_\alpha v \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathtt{d}},\ |\alpha| \le m\}.$$

Muni de la norme
$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathtt{d}},\ |\alpha| \le m} |\partial_\alpha v|^2 \, d\Omega \right\}^{1/2}, \tag{1.7}$$
c'est un espace de Banach séparable. Muni du produit scalaire hermitien
$$(v, w)_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathtt{d}},\ |\alpha| \le m} \partial_\alpha v \overline{\partial_\alpha w} \, d\Omega,$$
c'est un espace de Hilbert (séparable). Enfin, pour $m \ge 1$, on introduit la semi-norme
$$|v|_{m,\Omega} = \left\{ \int_\Omega \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathtt{d}},\ |\alpha| = m} |\partial_\alpha v|^2 \, d\Omega \right\}^{1/2}, \tag{1.8}$$
pour laquelle on ne conserve que les dérivées d'ordre m.

Remarque 1.16 *On a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Par construction, on a la suite d'injections linéaires et continues*
$$\cdots \subset H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset \cdots \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Définition 1.17 *Soit $m \in \mathbb{N}$. On appelle $\mathcal{C}_c^m(\overline{\Omega})$ l'ensemble composé des restrictions à $\overline{\Omega}$ de fonctions de $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^{\mathtt{d}})$ à support compact.*

Les deux propriétés ci-dessous illustrent la différence entre les espaces $\mathcal{C}_c^m(\overline{\Omega})$ “classiques" et les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$:
- Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_c^m(\overline{\Omega}) \subset H^m(\Omega)$, avec injection continue si $\mathrm{vol}(\Omega) < \infty$;
- Si $\mathtt{d} \ge 2$, $H^1(\Omega) \not\subset \mathcal{C}_c^0(\overline{\Omega})$.

Notons qu'on peut généraliser les *opérateurs de dérivation* au sens des distributions. On rappelle ci-dessous comment on procède pour le gradient et la divergence.

— Comme l'opérateur gradient est à valeurs vectorielles, ie. $\nabla\cdot = \sum_{i=1,\mathtt{d}} \frac{\partial\cdot}{\partial x_i}\mathsf{e}_i$, l'action du gradient d'une distribution est à considérer sur les fonctions $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1,\mathtt{d}} v_i\mathsf{e}_i$ de $\big(\mathcal{D}(\Omega)\big)^{\mathtt{d}}$ où, terme à terme, on utilise la définition 1.10. Ainsi, pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, son *gradient* est défini par :

$$\forall \boldsymbol{v} \in \big(\mathcal{D}(\Omega)\big)^{\mathtt{d}}, \quad \langle \nabla T, \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{i=1,\mathtt{d}} \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, v_i\rangle = -\sum_{i=1,\mathtt{d}} \langle T, \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\rangle = -\langle T, \sum_{i=1,\mathtt{d}} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\rangle = -\langle T, \operatorname{div} \boldsymbol{v}\rangle.$$

Ci-dessus, l'opérateur divergence agissant sur $\boldsymbol{v}$ est l'opérateur “classique”.

— Comme l'opérateur divergence agit sur des champs à valeurs vectorielles, on l'applique à des éléments $\boldsymbol{T} = \sum_{i=1,\mathtt{d}} T_i\mathsf{e}_i$ de $\big(\mathcal{D}'(\Omega)\big)^{\mathtt{d}}$. Ainsi, pour $\boldsymbol{T} \in \big(\mathcal{D}'(\Omega)\big)^{\mathtt{d}}$, sa *divergence* est définie par

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \operatorname{div} \boldsymbol{T}, v\rangle = \langle \sum_{i=1,\mathtt{d}} \frac{\partial T_i}{\partial x_i}, v\rangle = \sum_{i=1,\mathtt{d}} \langle \frac{\partial T_i}{\partial x_i}, v\rangle = -\sum_{i=1,\mathtt{d}} \langle T_i, \frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle = -\langle \boldsymbol{T}, \nabla v\rangle.$$

L'opérateur gradient agissant sur v est l'opérateur “classique”.

1.4 Intégration par parties

On suppose que les fonctions sont à valeurs complexes (pour les fonctions à valeurs réelles, il suffira d'enlever la conjugaison).

1.4.1 Notion de domaine

On rappelle la notion de *frontière lipschitzienne.*

Définition 1.18 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$. Sa frontière $\partial\Omega$ est lipschitzienne si, et seulement si,*

— *en tout point $\boldsymbol{x}$ de $\partial\Omega$, il existe une application lipschitzienne (définie sur un hypercube de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}-1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$), dont le graphe représente localement $\partial\Omega$ dans un voisinage (ouvert) de $\boldsymbol{x}$;*

— *en tout point $\boldsymbol{x}$ de $\partial\Omega$, Ω est localement d'un seul côté de $\partial\Omega$.*

En un point $\boldsymbol{x}$ de $\partial\Omega$, l'application lipschitzienne est appelée *carte locale.*

Sur une frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne, on peut définir les espaces de Lebesgue $L^p(\partial\Omega)$ pour tout $p \in [1,\infty]$, avec des propriétés similaires à celles de §1.2 ; voir §1.4.3 pour un exemple. On a la

Proposition 1.19 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ à frontière lipschitzienne, alors le vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Omega$, noté $\boldsymbol{n}$, appartient à $(L^\infty(\partial\Omega))^{\mathtt{d}}$.*

Dans la suite du cours, on raisonnera généralement dans un *domaine*, dont on donne la définition ci-dessous.

Définition 1.20 *Un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ à frontière lipschitzienne appelé un domaine.*

1.4.2 Formules de Green classiques

On se place dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ à frontière lipschitzienne. On rappelle les formules d'intégration par parties ci-dessous.

Proposition 1.21 *Soit $v \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ à support borné, on a pour tout $i = 1, \mathtt{d}$:*

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} v n_i \, d\Gamma. \tag{1.9}$$

Soient $v, w \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ à support borné, on a pour tout $i = 1, \mathtt{d}$:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\, \overline{w} + v\, \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} v \overline{w} n_i \, d\Gamma. \tag{1.10}$$

Soient $\boldsymbol{v} \in \left(\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\right)^{\mathtt{d}}$ et $w \in \mathcal{C}^1_b(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ à support borné, on a :

$$\int_\Omega \big((\operatorname{div} \boldsymbol{v}) \overline{w} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \overline{w} \big) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \overline{w} \, d\Gamma. \tag{1.11}$$

A partir d'une des trois formules, il est très simple de retrouver les deux autres.
Dans (1.11), la quantité $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_{|\partial\Omega}$ définie sur $\partial\Omega$ est appelée *flux* de $\boldsymbol{v}$ à travers $\partial\Omega$. Typiquement, les formules (1.10)-(1.11) permettent de passer du modèle à résoudre à la formulation variationnelle équivalente, en intégrant les équations/inéquations, et en utilisant les conditions de bord. Dans (1.10), v joue le rôle de la solution (ou d'une de ses composantes), et w est une fonction-test. Dans (1.11), $\boldsymbol{v}$ joue le rôle du gradient de la solution ou d'une quantité proportionnelle au gradient, et w est à nouveau une fonction-test. Ceci étant dit, la régularité pré-supposée de la solution et des fonctions-test dans (1.10)-(1.11) est trop restrictive, c'est pourquoi on va généraliser ces formules...

1.4.3 Théorème de trace, formule de Green généralisée

Le but est maintenant de généraliser ces formules d'intégration par parties à des objets plus généraux, à savoir des éléments des espaces de Sobolev. On rappelle un résultat de densité qui permettra de remplacer ces objets "peu réguliers" par des fonctions régulières, beaucoup plus simples à manipuler. En particulier, ce résultat permet d'étendre des résultats connus pour des fonctions régulières, tels que la valeur, ou trace, sur la frontière. On suit [8].

Définition 1.22 *On appelle $\mathcal{C}^\infty_c(\overline{\Omega})$ l'ensemble composé des restrictions à $\overline{\Omega}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathtt{d}})$.*

On note que, par construction, $\mathcal{C}^\infty_c(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}^m_c(\overline{\Omega})$ pour tout $m \geq 0$. A partir de là, on a un résultat de densité des fonctions régulières dans les espaces de Sobolev.

Proposition 1.23 *Soit $m \in \mathbb{N}$. Dans tout ouvert Ω à frontière lipschitzienne, $\mathcal{C}^\infty_c(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$:*

$$\forall v \in H^m(\Omega),\ \exists (v_k)_k \in \left(\mathcal{C}^\infty_c(\overline{\Omega})\right)^{\mathbb{N}},\ \lim_{k\to\infty} \|v - v_k\|_{H^m(\Omega)} = 0.$$

Soit un ouvert Ω de frontière lipschitzienne. Pour tout $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$, on peut définir sa valeur sur la frontière $\partial\Omega$, ou *trace*, notée $v_{|\partial\Omega}$. En outre,

$$v_{|\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega) = \left\{\lambda \text{ mesurable sur } \partial\Omega \text{ tel que } \int_{\partial\Omega} |\lambda|^2 d\Gamma < +\infty\right\},$$

où $d\Gamma$ désigne l'élément de "surface" porté par $\partial\Omega$; $d\Gamma_{\boldsymbol{x}}$ est défini autour d'un point $\boldsymbol{x}$ à l'aide d'une carte locale, en partant d'un hypercube de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}-1}$ (voir la définition 1.18). Muni du produit scalaire hermitien

$$(\lambda_0, \lambda_1)_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} \lambda_0 \overline{\lambda_1}\, d\Gamma,$$

$L^2(\partial\Omega)$ est un espace de Hilbert, qu'on identifie à son dual. On dit que $\partial\Omega$ est *bornée* si $\mathrm{vol}(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1\, d\Gamma < \infty$. En particulier, si Ω est un domaine, sa frontière $\partial\Omega$ est bornée.

Théorème 1.24 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ à frontière lipschitzienne et bornée. Alors, l'application trace*

$$\gamma_0 : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_c^\infty\left(\overline{\Omega}\right) & \to & L^2(\partial\Omega) \\ v & \mapsto & \gamma_0 v = v_{|\partial\Omega} \end{array} \right.$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue, toujours notée γ_0, de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

On introduit

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{\lambda \in L^2(\partial\Omega) \text{ tel que } \exists v \in H^1(\Omega),\ \lambda = \gamma_0 v\right\}, \tag{1.12}$$

qu'on munit de la norme

$$\|\lambda\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{v \in H^1(\Omega)\ tq\ \gamma_0 v = \lambda} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.13}$$

Proposition 1.25 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ à frontière lipschitzienne et bornée. Muni de la norme (1.13), l'ensemble des traces $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est un espace de Banach. En outre, $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est un sous-ensemble strict, dense dans $L^2(\partial\Omega)$.*

Par définition, l'application trace γ_0 est continue de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$, de norme égale à 1.

A l'aide de l'application trace γ_0 et de la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, on peut généraliser la formule d'intégration par parties (1.10). Donnons d'abord une idée intuitive de l'énoncé du résultat. On rappelle qu'on a défini des espaces de Sobolev $(H^m(\Omega))_{m\in\mathbb{N}}$ inclus les uns dans les autres, voir la définition 1.15. Si on choisit *a priori* v dans l'espace le plus grand, c'est-à-dire dans $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, on sait que l'on doit choisir $(\partial_i w)_{i=1,\mathtt{d}}$ dans l'espace dual de $L^2(\Omega)$ (proposition 1.3), c'est-à-dire lui-même, pour que toutes les intégrales

$$\forall i = 1, \mathtt{d}, \quad \int_\Omega v\, \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_i}\, d\Omega,$$

aient un sens. Et symétriquement (en inversant le rôle de v et w), on choisit $w \in L^2(\Omega)$ et $(\partial_i v)_{i=1,\mathtt{d}} \in \left(L^2(\Omega)\right)^{\mathtt{d}}$ pour les autres intégrales volumiques

$$\forall i = 1, \mathtt{d}, \quad \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\, \overline{w}\, d\Omega$$

aient un sens. Ainsi, on doit choisir v, w dans $H^1(\Omega)$. Et, si les hypothèses du théorème 1.24 sont vérifiées, on peut utiliser les traces $\gamma_0 v$ et $\gamma_0 w$ pour donner un sens à l'intégrale de bord

$$\int_{\partial\Omega} v\overline{w} n_i \, d\Gamma.$$

Le résultat et sa démonstration sont proposés ci-dessous.

Proposition 1.26 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ à frontière lipschitzienne et bornée. Soient $v, w \in H^1(\Omega)$, on a pour tout $i = 1, \mathtt{d}$:*

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\, \overline{w} + v\, \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \gamma_0 v\, \overline{\gamma_0 w}\, n_i \, d\Gamma. \tag{1.14}$$

Démonstration : D'après la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, il existe deux suites de $\left(\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})\right)^{\mathbb{N}}$, notées respectivement $(v_k)_k$ et $(w_k)_k$, telles que

$$\lim_{k\to\infty} \|v - v_k\|_{H^1(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|w - w_k\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, par définition de l'application trace γ_0, on a d'après (1.10) la formule d'intégration par parties :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\, \overline{w_k} + v_k\, \frac{\partial \overline{w_k}}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \gamma_0 v_k\, \overline{\gamma_0 w_k}\, n_i \, d\Gamma.$$

Puisque $(\partial_i v_k)_k$ converge vers $\partial_i v$ dans $L^2(\Omega)$, et que $(\overline{w_k})_k$ converge vers $\overline{w}$ dans $L^2(\Omega)$, on déduit de la proposition 1.3 que $(\partial_i v_k \overline{w_k})_k$ converge vers $\partial_i v \overline{w}$ dans $L^1(\Omega)$. De même, $(v_k \partial_i \overline{w_k})_k$ converge vers $v \partial_i \overline{w}$ dans $L^1(\Omega)$. Il suit que

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\, \overline{w_k} + v_k\, \frac{\partial \overline{w_k}}{\partial x_i} \right) d\Omega \right) = \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\, \overline{w} + v\, \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_i} \right) d\Omega.$$

Puis, par continuité de l'application trace γ_0, on note que $(\gamma_0 v_k)_k$ converge vers $\gamma_0 v$ dans $L^2(\partial\Omega)$, et de même que $(\gamma_0 w_k)_k$ converge vers $\gamma_0 w$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Il suit que $(\gamma_0 v_k\, \overline{\gamma_0 w_k})_k$ converge vers $\gamma_0 v\, \overline{\gamma_0 w}$ dans $L^1(\partial\Omega)$. Et comme $n_i \in L^\infty(\partial\Omega)$ (voir la proposition 1.19), on a finalement que $(\gamma_0 v_k\, \overline{\gamma_0 w_k}\, n_i)_k$ converge vers $\gamma_0 v\, \overline{\gamma_0 w}\, n_i$ dans $L^1(\partial\Omega)$. En d'autres termes,

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_{\partial\Omega} \gamma_0 v_k\, \overline{\gamma_0 w_k}\, n_i \, d\Gamma \right) = \int_{\partial\Omega} \gamma_0 v\, \overline{\gamma_0 w}\, n_i \, d\Gamma,$$

ce qui démontre (1.14). ■

Pour conclure ces rappels, on introduit les espaces de fonctions que l'on peut atteindre (par passage à la limite) avec des éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$. Soit $m \geq 1$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$. L'espace de Hilbert $H_0^m(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$:

$$\forall v \in H_0^m(\Omega),\ \exists (v_k)_k \in \left(\mathcal{D}(\Omega)\right)^{\mathbb{N}},\ \lim_{k\to\infty} \|v - v_k\|_{H^m(\Omega)} = 0.$$

Théorème 1.27 *Soit Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ à frontière lipschitzienne et bornée. Alors on a l'identification :*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \gamma_0 v = 0 \right\}.$$

1.5 Opérateur de trace normale, formule de Green généralisée

Il reste maintenant à généraliser la formule d'intégration par parties (1.11). Après quelques considérations intuitives, on suivra [7].

1.5.1 Un peu d'intuition...

Si on cherche à nouveau l'énoncé intuitif du résultat, on constate cette fois une dissymétrie entre l'espace des $\boldsymbol{v}$, et l'espace des w. Partant de $w \in L^2(\Omega)$, on constate qu'on doit choisir $\operatorname{div} \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)$ pour que

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{v}) \overline{w} \, d\Omega$$

ait un sens. Si maintenant on part de $\boldsymbol{v} \in \left(L^2(\Omega)\right)^{\mathtt{d}}$, on doit choisir $(\partial_i w)_{i=1,\mathtt{d}} \in \left(L^2(\Omega)\right)^{\mathtt{d}}$ pour que

$$\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla \overline{w} \, d\Omega$$

ait un sens. Ainsi, w appartient à $H^1(\Omega)$, alors que $\boldsymbol{v}$ appartient à l'espace de Sobolev

$$\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(L^2(\Omega)\right)^{\mathtt{d}} \text{ tel que } \operatorname{div} \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où la divergence est comprise au sens des distributions.
Muni de la norme

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega)} = \left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^{\mathtt{d}}} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2},$$

$\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega)$ est un espace de Banach.
Muni du produit scalaire associé

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega)} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{(L^2(\Omega))^{\mathtt{d}}} + (\operatorname{div} \boldsymbol{v}, \operatorname{div} \boldsymbol{w})_{L^2(\Omega)},$$

$\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega)$ est un espace de Hilbert.
Ensuite, il reste à considérer l'intégrale de bord

$$\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \overline{w} \, d\Gamma.$$

Si les hypothèses du théorème 1.24 sont vérifiées, on a vu que $\gamma_0 w$ appartient à $L^2(\partial\Omega)$, l'idée naturelle consiste donc à établir que le flux $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_{|\partial\Omega}$ appartient également à $L^2(\partial\Omega)$. Malheureusement, ce résultat est faux si on considère un élément quelconque de $\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega)$. [4] Néanmoins,

4. Le résultat est bien sûr vrai si $\boldsymbol{v}$ est "régulière jusqu'au bord", par exemple $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

on sait que $\gamma_0 w$ appartient à $H^{1/2}(\partial\Omega)$, qui est un sous-espace strict de $L^2(\partial\Omega)$. On va donc procéder *par dualité*, c'est-à-dire démontrer que le flux $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_{|\partial\Omega}$ appartient à $\left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)'$, l'espace dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$. On notera l'action d'un élément de $(H^{1/2}(\partial\Omega))'$ sur un élément de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ à l'aide de crochets de dualité : $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))',H^{1/2}(\partial\Omega)}$.
Puisque $L^2(\partial\Omega)$ est identifié à son dual, on a les inclusions strictes

$$H^{1/2}(\partial\Omega)\subset L^2(\partial\Omega)\subset\left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)'. \tag{1.15}$$

Pour un couple $(\lambda_0,\lambda_1)\in L^2(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)$, on peut écrire

$$\langle\lambda_0,\lambda_1\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))',H^{1/2}(\partial\Omega)}=(\lambda_0,\lambda_1)_{L^2(\partial\Omega)}=\int_{\partial\Omega}\lambda_0\,\overline{\lambda_1}\,d\Gamma.$$

1.5.2 Résultat de densité

On a un nouveau résultat de densité des fonctions régulières.

Proposition 1.28 *Dans tout ouvert Ω à frontière lipschitzienne, $(\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega}))^{\mathrm{d}}$ est dense dans $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$:*

$$\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega),\ \exists(\boldsymbol{v}_k)_k\in\left((\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega}))^{\mathrm{d}}\right)^{\mathbb{N}},\ \lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_k\|_{\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)}=0.$$

A partir de là, on va étudier la trace normale, qui apparaît dans la formule d'intégration par parties (1.11), pour des éléments de $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$.

1.5.3 Opérateur de trace normale γ_n

Soit Ω un ouvert, à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne et bornée. Pour tout $\boldsymbol{v}\in(\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega}))^{\mathrm{d}}$ on peut définir sa trace normale sur $\partial\Omega$: $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})_{|\partial\Omega}$. Lorsqu'on prolonge par continuité aux éléments de $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$, comme espéré on aboutit cette fois à une application trace normale à valeurs dans le dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Enfin, on peut généraliser la formule d'intégration par parties (1.11).

Théorème 1.29 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, à frontière lipschitzienne et bornée. Alors, on peut définir l'application trace normale*

$$\gamma_n:\left|\begin{array}{ccc}\left(\mathcal{C}_c^\infty\left(\overline{\Omega}\right)\right)^{\mathrm{d}} & \to & (H^{1/2}(\partial\Omega))'\\ \boldsymbol{v} & \mapsto & \gamma_n\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})_{|\partial\Omega}\end{array}\right..$$

De plus, elle se prolonge par continuité en une application linéaire continue et surjective, encore notée γ_n, de $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$ dans $(H^{1/2}(\partial\Omega))'$.
Soient $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$ et $w\in H^1(\Omega)$, on a la formule d'intégration par parties :

$$\int_\Omega((\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\overline{w}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\overline{w})\,d\Omega=\langle\gamma_n\boldsymbol{v},\gamma_0 w\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))',H^{1/2}(\partial\Omega)}. \tag{1.16}$$

Démonstration : On raisonne par étapes.

— **Trace normale pour $\boldsymbol{v} \in \big(\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})\big)^{\mathtt{d}}$**. Comme l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est égal à l'espace des traces de $H^1(\Omega)$, on choisit tout d'abord $w \in H^1(\Omega)$. Si on raisonne comme pour démontrer la proposition 1.26 à l'aide d'une suite de fonctions de $\big(\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})\big)^{\mathbb{N}}$ tendant vers w dans $H^1(\Omega)$, on montre que

$$\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})_{|\partial\Omega}\,\overline{\gamma_0 w}\,d\Gamma = \int_\Omega (\boldsymbol{v}\cdot\nabla\overline{w} + (\operatorname{div}\boldsymbol{v})\overline{w})\,d\Omega.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux reprises, on en déduit que

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})_{|\partial\Omega}\,\overline{\gamma_0 w}\,d\Gamma\Big| &\le \|\boldsymbol{v}\|_{(L^2(\Omega))^{\mathtt{d}}}\|\nabla w\|_{(L^2(\Omega))^{\mathtt{d}}} + \|\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

L'application trace γ_0 est linéaire, continue et surjective de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$: pour tout $\lambda \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, on applique la majoration ci-dessus aux $w \in H^1(\Omega)$ tels que $\gamma_0 w = \lambda$. Il suit

$$\Big|\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})_{|\partial\Omega}\,\overline{\lambda}\,d\Gamma\Big| \le \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega)} \inf_{w\in H^1(\Omega)\ tq\ \gamma_0 w=\lambda} \|w\|_{H^1(\Omega)}.$$

En utilisant la définition (1.13) de la norme dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$, on trouve

$$\forall\lambda \in H^{1/2}(\partial\Omega),\quad \Big|\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})_{|\partial\Omega}\,\overline{\lambda}\,d\Gamma\Big| \le \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega)}\|\lambda\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Ainsi, on a bien $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})_{|\partial\Omega} \in (H^{1/2}(\partial\Omega))'$, avec l'identification

$$\langle(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})_{|\partial\Omega},\lambda\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))',H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})_{|\partial\Omega}\,\overline{\lambda}\,d\Gamma.$$

— **Application trace normale dans $\mathcal{L}\big(\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega),(H^{1/2}(\partial\Omega))'\big)$**. D'après ce qui précède, on a pour tout $\boldsymbol{v} \in (\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega}))^{\mathtt{d}}$:

$$\|\gamma_n\boldsymbol{v}\|_{(H^{1/2}(\partial\Omega))'} = \sup_{\lambda\in H^{1/2}(\partial\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\Big|\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})_{|\partial\Omega}\,\overline{\lambda}\,d\Gamma\Big|}{\|\lambda\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}} \le \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega)}.$$

L'application γ_n est donc continue de $(\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega}))^{\mathtt{d}}$ dans $(H^{1/2}(\partial\Omega))'$ *par rapport à la norme de* $\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega)$. D'après la proposition 1.28, on peut prolonger par continuité γ_n en une application linéaire et continue de $\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega)$ dans $(H^{1/2}(\partial\Omega))'$, toujours notée γ_n. On note que $|||\gamma_n||| \le 1$ dans $\mathcal{L}\big(\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega),(H^{1/2}(\partial\Omega))'\big)$.

— **Intégration par parties (1.16)**. Il suffit maintenant de raisonner par densité sur $\boldsymbol{v}$ et sur w, puisque le terme de bord aura un sens par dualité, sous la forme $\langle\gamma_n\boldsymbol{v},\gamma_0 w\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))',H^{1/2}(\partial\Omega)}$.

— **Surjectivité de** $\gamma_n \in \mathcal{L}\big(\boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega),(H^{1/2}(\partial\Omega))'\big)$. Soit $g \in (H^{1/2}(\partial\Omega))'$, on considère la formulation variationnelle

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que}\\ (u,w)_{H^1(\Omega)} = \langle g,\gamma_0 w\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))',H^{1/2}(\partial\Omega)},\quad \forall w \in H^1(\Omega)\end{array}\right..$$

D'après le théorème de représentation de Riesz, cette formulation variationnelle admet une solution, et une seule. En outre, si on choisit une fonction-test $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ quelconque, on en déduit facilement que $-u + \Delta u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si on pose $\boldsymbol{v} = \nabla u$, on a $\boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^{\mathtt{d}}$ puisque

$u \in H^1(\Omega)$ et, en outre, $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \Delta u = u$ appartient à $L^2(\Omega)$: ainsi $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}(\operatorname{div}; \Omega)$. A partir de là, si on remplace u par $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ et ∇u par $\boldsymbol{v}$ dans la formulation variationnelle, on trouve que pour tout $w \in H^1(\Omega)$,

$$\langle g, \gamma_0 w\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))', H^{1/2}(\partial\Omega)} = (u, w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla w)_{(L^2(\Omega))^{\mathrm{d}}} = (\operatorname{div} \boldsymbol{v}, w)_{L^2(\Omega)} + (\boldsymbol{v}, \nabla w)_{(L^2(\Omega))^{\mathrm{d}}}.$$

Et si on utilise la formule d'intégration par parties (1.16), on a donc établi que

$$\forall w \in H^1(\Omega), \quad \langle g, \gamma_0 w\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))', H^{1/2}(\partial\Omega)} = \langle \gamma_n \boldsymbol{v}, \gamma_0 w\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))', H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Et comme l'application trace γ_0 est surjective de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$, on a démontré que $\gamma_n \boldsymbol{v} = g$ dans $(H^{1/2}(\partial\Omega))'$, d'où la propriété de surjectivité.

Ceci achève la démonstration. ■

Remarque 1.30 *On note que si $w \in H_0^1(\Omega)$, le terme de bord disparaît dans (1.16). Ce résultat s'obtient directement si on raisonne par densité, en approchant w dans $H^1(\Omega)$ avec des éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Enfin, l'espace de Hilbert $\boldsymbol{H}_0(\operatorname{div}; \Omega)$ est défini comme l'adhérence de $(\mathcal{D}(\Omega))^{\mathrm{d}}$ dans $\boldsymbol{H}(\operatorname{div}; \Omega)$:

$$\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0(\operatorname{div}; \Omega),\ \exists (\boldsymbol{v}_k)_k \in \left((\mathcal{D}(\Omega))^{\mathrm{d}}\right)^{\mathbb{N}},\ \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_k\|_{\boldsymbol{H}(\operatorname{div}; \Omega)} = 0.$$

On a le

Théorème 1.31 *Soit Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ à frontière lipschitzienne et bornée. Alors on a l'identification :*

$$\boldsymbol{H}_0(\operatorname{div}; \Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}(\operatorname{div}; \Omega) \textit{ tel que } \gamma_n \boldsymbol{v} = 0\}.$$

Remarque 1.32 *On note que si $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0(\operatorname{div}; \Omega)$, le terme de bord disparaît dans (1.16). Ce résultat s'obtient directement si on raisonne par densité, en approchant $\boldsymbol{v}$ dans $\boldsymbol{H}(\operatorname{div}; \Omega)$ avec des éléments de $(\mathcal{D}(\Omega))^{\mathrm{d}}$.*

Notes de cours 2

Etude théorique du modèle de la diffusion

L'équation de la diffusion permet de modéliser différents phénomènes physiques tels que la loi de Darcy, la loi de Fick ou la diffusion des neutrons. Pour la diffusion neutronique par exemple (voir par exemple [4]), elle permet de déterminer le *flux neutronique* (grandeur à valeurs scalaires réelles). On peut choisir soit de l'exprimer comme une équation aux dérivées partielles (EDP) du second ordre, soit comme deux équations aux dérivées partielles du premier ordre couplées entre elles. Dans ce second cas, on détermine, outre le flux neutronique, le *courant neutronique* (grandeur à valeurs vectorielles réelles proportionnelle au gradient du flux neutronique). Ainsi, d'un point de vue point de vue variationnel, deux approches coexistent. On utilise soit la formulation variationnelle à une inconnue pour se concentrer sur le flux neutronique ; soit la formulation variationnelle à deux inconnues pour se concentrer à la fois sur le flux et le courant neutroniques.

On se place dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$, pour $1 \leq \mathtt{d} \leq 3$. Le modèle étudié est basé sur des données et des solutions à valeurs réelles. On choisit donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lorsqu'on l'étudie, en particulier pour les formulations variationnelles. Concernant la théorie "abstraite", on se placera dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (pour l'appliquer au modèle, il suffira d'enlever la conjugaison). On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire (hermitien) de $L^2(\Omega)$ ou de $(L^2(\Omega))^{\mathtt{d}}$, et $\|\cdot\|$ la norme associée. Enfin, on note $\boldsymbol{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^{\mathtt{d}}$.

2.1 Modèle de la diffusion neutronique

2.1.1 Mesure, équation et condition aux limites

On reprend le formalisme énoncé au §1.1. Résoudre le modèle de la diffusion revient à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\mathrm{div}\, \mathbb{D}\nabla u + \sigma u = S_f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

La solution u cherchée est le *flux neutronique*, $\mathbb{D}$ est le *tenseur de diffusion*, σ la *section efficace*, et la donnée S_f la *source*. Toutes les grandeurs sont à valeurs réelles [1]. De plus, la modélisation conduit à faire les hypothèses suivantes :

— Le coefficient $\mathbb{D}$ est un champ de tenseurs mesurable sur Ω tel que

$$\begin{cases} \exists D_{min} > 0,\ \forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}},\ \text{presque pour tout } \boldsymbol{x} \in \Omega,\ D_{min}|\boldsymbol{z}|^2 \leq \mathbb{D}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z}\,; \\ \exists D_{max} > 0,\ \forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}},\ \text{presque pour tout } \boldsymbol{x} \in \Omega,\ |\mathbb{D}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}| \leq D_{max}|\boldsymbol{z}|. \end{cases} \tag{2.2}$$

— Le coefficient σ est un champ de scalaires mesurable sur Ω tel que

$$\left\{ \exists \sigma_{min}, \sigma_{max} > 0,\ \text{presque pour tout } \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \sigma_{min} \leq \sigma(\boldsymbol{x}) \leq \sigma_{max}. \right. \tag{2.3}$$

— La source S_f appartient à $L^2(\Omega)$.

Sous les hypothèses sur u et sur $\mathbb{D}$, on note que le *courant neutronique* $\boldsymbol{p} = -\mathbb{D}\nabla u$ est tel que $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ (voir la proposition 1.2). De plus, sous les hypothèses sur u, σ et S_f, on a $\operatorname{div}\boldsymbol{p} = S_f - \sigma u \in L^2(\Omega)$. Ainsi, le courant neutronique est tel que

$$\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{H}(\operatorname{div}; \Omega).$$

2.1.2 Formulation variationnelle équivalente

La condition aux limites sur u est une condition aux limites de Dirichlet. Classiquement [6], c'est une condition aux limites *essentielle*, et on choisit des fonctions-test $w \in H^1_0(\Omega)$.
Chaque terme de l'EDP apparaissant dans le modèle (2.1) appartient à $L^2(\Omega)$. On réalise donc le "produit scalaire dans $L^2(\Omega)$" de l'EDP avec $w \in H^1_0(\Omega)$, pour trouver [2] :

$$\int_\Omega S_f w\, d\Omega = \int_\Omega (-\operatorname{div}\mathbb{D}\nabla u + \sigma u) w\, d\Omega \overset{(1.16)}{=} \int_\Omega \Big(\mathbb{D}\nabla u \cdot \nabla w + \sigma u w\Big) d\Omega.$$

On en conclut que si u est solution du modèle (2.1), alors u est solution de la formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall w \in H^1_0(\Omega), \quad \displaystyle\int_\Omega \Big(\mathbb{D}\nabla u \cdot \nabla w + \sigma u w\Big) d\Omega = \int_\Omega S_f w\, d\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Réciproquement, en raisonnant au sens des distributions, on montre facilement que si u est solution de la formulation variationnelle (2.4), alors u est solution du modèle (2.1). On a donc bien construit *une formulation variationnelle équivalente à notre modèle*. Nous prouvons son caractère bien posé ci-dessous à l'aide du théorème de Lax-Milgram.

1. On peut également modéliser la diffusion neutronique avec une autre condition aux limites que celle de flux nul, telle que $\mathbb{D}\nabla u \cdot \boldsymbol{n}_{|\partial\Omega} = 0$ (réflexion), ou $(\mathbb{D}\nabla u \cdot \boldsymbol{n} + \alpha u)_{|\partial\Omega} = 0$ (albédo, avec $\alpha > 0$) ; ou bien des conditions aux limites distinctes sur différentes parties de la frontière...

2. Au lieu de la formule d'intégration par parties (1.16), on peut utiliser la remarque 1.30.

2.2 Existence et unicité, théorème de Lax-Milgram

On rappelle les fondements de la théorie "abstraite" (voir par exemple [3, 6]). Soient :

— V un espace de Hilbert défini sur $\mathbb{C}$, de produit scalaire hermitien $(\cdot,\cdot)_V$. On note $\|\cdot\|_V$ la norme associée ;

— $a(\cdot,\cdot)$ une forme sesquilinéaire et continue sur $V \times V$.

Pour $\ell \in V'$ donné, on étudie le problème écrit sous forme variationnelle,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall w \in V, \quad a(u,w) = \langle \ell, w\rangle_V. \end{cases} \tag{2.5}$$

Pour le modèle de la diffusion, on a respectivement :

— $V = H_0^1(\Omega)$;

— $a(v,w) = (\mathbb{D}\nabla v|\nabla w) + (\sigma v|w)$;

— $\langle \ell, w\rangle_V = (S_f|w)$.

2.2.1 Théorème de Lax-Milgram

Définition 2.1 (coercivité) *On dit qu'une forme sesquilinéaire a' est coercive sur $V \times V$ si, et seulement si :*

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall v \in V, \quad |a(v,v)| \geq \alpha \|v\|_V^2. \tag{2.6}$$

On peut établir une caractérisation *équivalente*, voir [3].

Lemme 2.2 *Soit a' une forme sesquilinéaire et continue sur $V \times V$. Alors a' est coercive sur $V \times V$ si, et seulement si :*

$$\exists \alpha > 0, \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V, \quad \Re\big(\exp(\imath\theta) a(v,v)\big) \geq \alpha \|v\|_V^2. \tag{2.7}$$

Si la forme est de plus *hermitienne*, c'est-à-dire si

$$\forall v, w \in V, \quad a'(v,w) = \overline{a'(w,v)},$$

on a le

Lemme 2.3 *Lorsque a' est une forme sesquilinéaire, continue et hermitienne sur $V \times V$. Alors a' est coercive sur $V \times V$ si, et seulement si, on a une des deux alternatives :*

$$\begin{aligned} &\exists \alpha > 0,\ \forall v \in V,\ +a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2\ ; \\ &\exists \alpha > 0,\ \forall v \in V,\ -a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Démonstration : Si on a l'alternative (2.8), il est clair que a' est coercive.

Réciproquement, supposons a' coercive. On note tout d'abord que, puisque a' est hermitienne, pour tout $v \in V$, on a $a'(v,v) = \overline{a'(v,v)}$. Ainsi, pour tout $v \in V$, on a $a'(v,v) \in \mathbb{R}$. Supposons maintenant qu'il existe $v_1, v_2 \in V$ tels que $a'(v_1,v_1) > 0$ et $a'(v_2,v_2) < 0$. Notons que v_1 et v_2 sont non-nuls puisque

a' est coercive ; de plus, v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires : sinon, $\exists\beta \in \mathbb{C}$ tel que $v_1 = \beta v_2$ et dans ce cas par linéarité par rapport un 1er argument, resp. antilinéarité par rapport un 2ème argument,

$$a'(v_1, v_1) = a'(\beta v_2, \beta v_2) = |\beta|^2 a'(v_2, v_2) \leq 0,$$

ce qui contredit le fait que $a'(v_1, v_1) > 0$.
On introduit la fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$

$$f \;:\; t \mapsto a'(tv_1 + (1-t)v_2, tv_1 + (1-t)v_2).$$

Par définition, $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$. Puisque f est continue, $\exists t^\star \in]0, 1[$ tel que $f(t^\star) = 0$. Si on pose $v^\star = t^\star v_1 + (1-t^\star)v_2$, on conclut de ce qui précède que $v^\star \neq 0$ (v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires), et que $a'(v^\star, v^\star) = 0$, ce qui contredit le fait que a' est coercive. Ainsi, l'alternative (2.8) est vérifiée. ■

Remarque 2.4 *Lorsque V est un espace de Hilbert défini sur $\mathbb{R}$, l'énoncé de la caractérisation* équivalente *de la coercivité devient : soit a' une forme bilinéaire et continue sur $V \times V$. Alors a' est coercive sur $V \times V$ si, et seulement si, on a une des deux alternatives :*

$$\begin{array}{l} \exists\alpha > 0,\ \forall v \in V,\ +a(v, v) \geq \alpha\|v\|_V^2\ ; \\ \exists\alpha > 0,\ \forall v \in V,\ -a(v, v) \geq \alpha\|v\|_V^2. \end{array} \tag{2.9}$$

Théorème 2.5 (Lax-Milgram) *Soit V un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire, continue et coercive sur $V \times V$.*
Pour tout $\ell \in V'$, il existe une unique solution $u \in V$ de la formulation variationnelle (2.5). En outre, la solution u dépend continûment de la forme linéaire ℓ : il existe $C > 0$ indépendante de u et ℓ telle que

$$\|u\|_V \leq C\,\|\ell\|_{V'}.$$

Remarque 2.6 *Lorsque V un espace de Hilbert défini sur $\mathbb{R}$, si a est de plus* symétrique*, c'est-à-dire que :*

$$\forall v, w \in V, \quad a(v, w) = a(w, v),$$

alors on peut montrer que la solution u de (2.5) est l'unique point de minimum de la fonctionnelle :

$$v \;\mapsto\; \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \ell, v\rangle_V,$$

définie de V dans $\mathbb{R}$.

2.2.2 Diffusion à une inconnue

Pour le modèle de la diffusion, on doit donc vérifier que la forme bilinéaire (rappel : pour notre modèle, les espaces sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels)

$$a(v, w) = \int_\Omega \Big(\mathbb{D}\nabla v \cdot \nabla w + \sigma v w\Big) d\Omega$$

est continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$ (sous les hypothèses (2.2)-(2.3) sur les coefficients).

— Continuité : soient $v, w \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$
\begin{array}{rcl}
|a(v,w)| & \leq & |(\mathbb{D}\nabla v|\nabla w)| + |(\sigma v|w)| \\
\text{(Cauchy-Schwarz dans } L^2(\Omega)) & \leq & \|\mathbb{D}\nabla v\| \, \|\nabla w\| + \|\sigma v\| \, \|w\| \\
(2.2)\text{-}(2.3) & \leq & D_{max} \, \|\nabla v\| \, \|\nabla w\| + \sigma_{max} \, \|v\| \, \|w\| \\
& \leq & \max(D_{max}, \sigma_{max}) \, (\|\nabla v\| \, \|\nabla w\| + \|v\| \, \|w\|) \\
\text{(Cauchy-Schwarz dans } \mathbb{R}^2) & \leq & \max(D_{max}, \sigma_{max}) \, \left(\|\nabla v\|^2 + \|v\|^2\right)^{1/2} \left(\|\nabla w\|^2 + \|w\|^2\right)^{1/2} \\
& = & \max(D_{max}, \sigma_{max}) \, \|v\|_{H^1(\Omega)} \, \|w\|_{H^1(\Omega)} \, ;
\end{array}
$$

d'où la continuité de a avec $|||a||| \leq \max(D_{max}, \sigma_{max})$.

— Coercivité : soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$
\begin{array}{rcl}
a(v,v) & = & (\mathbb{D}\nabla v|\nabla v) + (\sigma v|v) \\
(2.2)\text{-}(2.3) & \geq & D_{min} \, \|\nabla v\|^2 + \sigma_{min} \, \|v\|^2 \\
& \geq & \min(D_{min}, \sigma_{min}) \, \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \, ;
\end{array}
$$

d'où la coercivité de a, avec une constante de coercivité $\alpha = \min(D_{min}, \sigma_{min}) > 0$.

Par ailleurs, d'après la proposition 1.4, $L^2(\Omega)$ est son propre dual. Comme $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection continue, on a l'injection continue "duale" [3] $L^2(\Omega) \subset (H_0^1(\Omega))'$, et en particulier $w \mapsto (S_f|w)$ appartient à $(H_0^1(\Omega))'$ puisque $S_f \in L^2(\Omega)$. D'après le théorème de Lax-Milgram, on en déduit que la formulation variationnelle (2.4) admet une solution et une seule. De plus, il existe une constante $C > 0$ indépendante de S_f telle que : $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \, \|S_f\|$.

2.3 Existence et unicité, cadre général

Nous proposons ci-dessous une approche plus générale que celle du théorème de Lax-Milgram pour résoudre les formulations variationnelles. Les formulations variationnelles peuvent mettre en jeu un espace des solutions différent de l'espace des fonctions-test. Précisément, soient :

— V et W deux espaces de Hilbert définis sur $\mathbb{C}$;

— $a(\cdot,\cdot)$ une forme sesquilinéaire et continue sur $V \times W$.

Pour $\ell \in W'$ donné, on étudie la formulation variationnelle,

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\
\forall w \in W, \quad a(u,w) = \langle \ell, w \rangle_W.
\end{array}
\right.
\tag{2.10}
$$

3. Soient X et Y deux espaces de Banach tels que $X \subset Y$ avec injection continue ($\exists C_{X\to Y} > 0$ telle que pour tout $v \in X$, $\|v\|_Y \leq C_{X\to Y}\|v\|_X$), alors $Y' \subset X'$ avec injection continue. En effet, pour tout $\ell_Y \in Y'$, on a :

$$
\sup_{v \in X\setminus\{0\}} |\ell_Y(v)|/\|v\|_X \leq C_{X\to Y} \sup_{v \in X\setminus\{0\}} |\ell_Y(v)|/\|v\|_Y = C_{X\to Y}\|\ell_Y\|_{Y'},
$$

et il suit que $\ell_Y \in X'$ avec la borne $\|\ell_Y\|_{X'} \leq C_{X\to Y}\|\ell_Y\|_{Y'}$, indépendante de ℓ_Y.

2.3.1 Caractère bien posé

Nous commençons par une définition générale.

Définition 2.7 (Hadamard) *La formulation variationnelle (2.10) est* bien posée *si, et seulement si, pour tout $\ell \in W'$, (2.10) admet une solution et une seule u, avec dépendance continue :*

$$\exists C > 0,\ \forall \ell \in W',\ \|u\|_V \leq C\|\ell\|_{W'}.$$

On introduit l'application linéaire et continue $\mathtt{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ associée à $a(\cdot,\cdot)$, et définie par :

$$\forall (v,w) \in V \times W, \quad (\mathtt{A}v, w)_W = a(v,w). \tag{2.11}$$

On rappelle l'égalité en norme :

$$\begin{aligned} |||\mathtt{A}||| &= \sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{\|\mathtt{A}v\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{\|v\|_V} \sup_{w \in W\setminus\{0\}} \frac{|(\mathtt{A}v, w)_W|}{\|w\|_W} \right) \\ &= \sup_{v \in V\setminus\{0\}, w \in W\setminus\{0\}} \frac{|a(v,w)|}{\|v\|_V\, \|w\|_W} = |||a|||. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Proposition 2.8 *Soient V, W deux espaces de Hilbert, et $a(\cdot,\cdot)$ une forme sesquilinéaire et continue sur $V \times W$. Alors la formulation variationnelle (2.10) est bien posée si, et seulement si, l'inverse de* A *défini par (2.11) existe et est continu : $\mathtt{A}^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.*

Remarque 2.9 *Ainsi, (2.10) est bien posée si, et seulement si,* A *est un isomorphisme de V dans W.*

Démonstration : Supposons que (2.10) est bien posée. Soit $L \in W$, alors il existe une solution et une seule à la formulation variationnelle (2.10) avec pour donnée la forme $w \mapsto (L, w)_W$, antilinéaire et continue sur W, qu'on note u_L. En outre, $\|u_L\|_V \leq C\,\|L\|_W$ avec $C > 0$ indépendante de L. On introduit $\mathtt{B} : L \mapsto u_L$, dont on vérifie facilement que c'est une application linéaire (par linéarité de a par rapport au premier argument) et continue de W dans V : $\mathtt{B} \in \mathcal{L}(W, V)$.
Par ailleurs, pour $L \in W$:

$$\forall w \in W, \quad (\mathtt{AB}L, w)_W = a(\mathtt{B}L, w) = (L, w)_W,$$

et ainsi $\mathtt{AB}L = L$. on a donc $\mathtt{AB} = I_W$.
De même, pour $u \in V$:

$$\forall w \in W, \quad a(\mathtt{BA}u - u, w) = a(\mathtt{B}(\mathtt{A}u), w) - a(u,w) = (\mathtt{A}u, w)_W - a(u,w) = 0\,;$$

il suit que $\mathtt{BA}u = u$, par unicité de la solution de la formulation variationnelle (2.10). On en conclut que $\mathtt{BA} = I_V$. Ainsi, B est l'inverse (continu) de A.

Réciproquement, si l'inverse de A existe et est continu, soit $\ell \in W'$: d'après le théorème de Riesz, il existe $L \in W$ unique tel que $(L, w)_W = \ell(w)$ pour tout $w \in W$, avec $\|L\|_W = \|\ell\|_{W'}$. Notons $u_L = \mathtt{A}^{-1}L$, par construction $\mathtt{A}u_L = \mathtt{A}(\mathtt{A}^{-1}L) = L$ dans W, soit

$$\forall w \in W, \quad a(u_L, w) = (L, w)_W = \ell(w).$$

En d'autres termes, u_L résout la formulation variationnelle (2.10) avec la donnée ℓ, et

$$\|u_L\|_V = \|\mathtt{A}^{-1}L\|_V \leq |||\mathtt{A}^{-1}|||\, \|L\|_V = |||\mathtt{A}^{-1}|||\, \|\ell\|_{W'}.$$

On a donc dépendance continue de la solution u_L par rapport à la donnée ℓ. Vérifions enfin l'unicité de la solution. Pour ℓ donnée, si u_1, u_2 sont deux solutions, alors $\mathtt{A}(u_1 - u_2) = 0$ et donc $u_1 - u_2 = \mathtt{A}^{-1}\mathtt{A}(u_1 - u_2) = 0$, ce qui conclut la démonstration. ■

2.3.2 Théorème de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi

Nous allons énoncer des conditions nécessaires et suffisantes pour que la formulation variationnelle (2.10) soit bien posée. Précisément, il s'agit de la *condition de stabilité*, également appelée la *condition inf-sup*, et de la *condition de solvabilité*.

Définition 2.10 *Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme sesquilinéaire sur $V \times W$. Alors $a(\cdot,\cdot)$ vérifie une* condition inf-sup *si, et seulement si,*

$$\exists \alpha' > 0,\ \forall v \in V,\ \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|a(v,w)|}{\|w\|_W} \geq \alpha' \|v\|_V. \tag{2.13}$$

Définition 2.11 *Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme sesquilinéaire sur $V \times W$. Alors $a(\cdot,\cdot)$ vérifie une* condition de solvabilité *si, et seulement si,*

$$\{w \in W \text{ tel que } a(v,w) = 0,\ \forall v \in V\} = \{0\}. \tag{2.14}$$

Intuitivement, la condition de solvabilité exprime le fait qu'on n'a pas "trop" de fonctions-test. Nous allons maintenant énoncer et démontrer le résultat général, le théorème de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi, et son corollaire (on utilisera parfois la notation LBB dans la suite).

Théorème 2.12 (Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi) *Soient V et W deux espaces de Hilbert, a une forme sesquilinéaire et continue $V \times W$. La formulation variationnelle (2.10) est bien posée si, et seulement si, les conditions (2.13) et (2.14) sont satisfaites.*

Démonstration : Supposons la formulation variationnelle (2.10) bien posée. D'après la proposition 2.8, l'application linéaire $\mathtt{A}$ associée à a par (2.11) admet un inverse continu de W dans V.
Soit $v \in V \setminus \{0\}$, on a :
- d'une part, $a(v, \mathtt{A}v) = (\mathtt{A}v, \mathtt{A}v)_W = \|\mathtt{A}v\|_W^2$;
- d'autre part, $\|v\|_V = \|\mathtt{A}^{-1}(\mathtt{A}v)\|_V \leq |||\mathtt{A}^{-1}|||\, \|\mathtt{A}v\|_W$ (en particulier, $\mathtt{A}v \neq 0$).

Ainsi,

$$\sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|a(v,w)|}{\|w\|_W} \geq \frac{|a(v,\mathtt{A}v)|}{\|\mathtt{A}v\|_W} = \|\mathtt{A}v\|_W \geq \frac{1}{|||\mathtt{A}^{-1}|||} \|v\|_V$$

La condition de stabilité (2.13) est vérifiée avec $\alpha' = 1/|||\mathtt{A}^{-1}|||$.
Soit $w \in W$ tel que $a(v,w) = 0$ pour tout $v \in V$. En particulier,

$$0 = a(\mathtt{A}^{-1}w, w) = (\mathtt{A}(\mathtt{A}^{-1}w), w)_W = \|w\|_W^2, \text{ soit } w = 0.$$

La condition de solvabilité (2.14) est vérifiée elle aussi.

Réciproquement, supposons que les conditions (2.13) et (2.14) sont satisfaites. Nous allons prouver que l'application linéaire $\mathtt{A}$ associée à la forme a est bijective, d'inverse continu. La proposition 2.8 permettra alors de conclure.

Soit $u \in V$ tel que $\mathtt{A}u = 0$: alors, $a(u, w) = (\mathtt{A}u, w)_W = 0$ pour tout $w \in W$ et, d'après (2.13), il suit $\|u\|_V = 0$, c'est-à-dire $u = 0$. $\mathtt{A}$ est donc injective.

Ensuite, nous allons prouver que l'image de $\mathtt{A}$, $\mathrm{Im}(\mathtt{A}) = \{w \in W \text{ tel que } \exists v \in V,\ w = \mathtt{A}v\}$, est un sous-espace vectoriel fermé de W, d'orthogonal réduit à $\{0\}$. Pour commencer, $\mathrm{Im}(\mathtt{A})$ est un sous-espace vectoriel de W. Pour le caractère fermé, on va établir que toute suite d'éléments $(w^k)_k$ de $\mathrm{Im}(\mathtt{A})$ qui converge dans W a sa limite dans $\mathrm{Im}(\mathtt{A})$. Par définition, pour tout k il existe $v^k \in V$ tel que $w^k = \mathtt{A}v^k$. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \forall k, m,\ \forall w \in W, \quad |a(v^k - v^m, w)| &= |(\mathtt{A}v^k - \mathtt{A}v^m, w)_W| = |(w^k - w^m, w)_W| \\ &\leq \|w^k - w^m\|_W \|w\|_W. \end{aligned}$$

En utilisant (2.13), on en déduit que

$$\forall k, m, \quad \|v^k - v^m\|_V \leq \frac{1}{\alpha'} \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|a(v^k - v^m, w)|}{\|w\|_W} \leq \frac{1}{\alpha'} \|w^k - w^m\|_W.$$

La suite $(w^k)_k$ étant convergente dans W, elle est a fortiori de Cauchy : $\lim_{k,m\to\infty} \|w^k - w^m\|_W = 0$. Il en est donc de même pour $(v^k)_k$ dans V. Et, comme V est un espace complet, $(v^k)_k$ converge dans V, c'est-à-dire qu'il existe $v \in V$ tel que $\lim_{k\to\infty} \|v^k - v\|_V = 0$. On en déduit :

$$\|w^k - \mathtt{A}v\|_W = \|\mathtt{A}(v^k - v)\|_W \leq |||\mathtt{A}|||\, \|v^k - v\|_V \to 0 \text{ quand } k \to \infty,$$

et ainsi $(w^k)_k$ converge vers $\mathtt{A}v \in \mathrm{Im}(\mathtt{A})$; $\mathrm{Im}(\mathtt{A})$ est donc fermée dans W.
Soit maintenant $w \in (\mathrm{Im}(\mathtt{A}))^\perp$, l'orthogonal de $\mathrm{Im}(\mathtt{A})$ dans W : par définition, ça signifie que, pour tout $v \in V$, $0 = (\mathtt{A}v, w)_W = a(v, w)$. D'après (2.14), on a $w = 0$. On en conclut [4] que $\mathrm{Im}(\mathtt{A}) = W$: $\mathtt{A}$ est surjective.
D'après ce qui précède, pour tout $L \in W$, il existe $u_L \in V$ unique tel que $\mathtt{A}u_L = L$. Et, d'après (2.13) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|u_L\|_V \leq \frac{1}{\alpha'} \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|a(u_L, w)|}{\|w\|_W} \leq \frac{1}{\alpha'} \|\mathtt{A}u_L\|_W = \frac{1}{\alpha'} \|L\|_W,$$

d'où la dépendance continue, avec une constante $1/\alpha'$ indépendante de L. On en conclut comme annoncé que la formulation variationnelle (2.10) est bien posée au sens de Hadamard. ■

Remarque 2.13 *Pour une forme sesquilinéaire définie sur $V \times V$, on a donc le choix entre coercivité d'une part, et stabilité plus solvabilité d'autre part. On vérifie facilement que, si la forme est coercive (avec une constante $\alpha > 0$), alors elle satisfait à la fois une condition de stabilité (avec $\alpha' = \alpha$) et la condition de solvabilité. La réciproque est* fausse*, voir le §2.3.3.*

Si la forme a est de plus hermitienne, on a le

4. Comme W est un espace de Hilbert, pour tout sous-espace vectoriel fermé Y de W, on a $W = Y \overset{\perp}{\oplus} Y^\perp$.

Corollaire 2.14 (Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi) *Soit V un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire, continue et hermitienne sur $V \times V$. La formulation variationnelle (2.10) avec $W = V$ est bien posée si, et seulement si, la condition inf-sup (2.13) est satisfaite.*

Démonstration : D'après le théorème LBB, lorsque a est hermitienne, il suffit de prouver que la condition inf-sup (2.13) implique la condition de solvabilité (2.14). Soit $w \in V$ tel que $a(v, w) = 0$ pour tout $v \in V$: on en déduit que $a(w, v) = 0$ pour tout $v \in V$. D'après (2.13), on a $w = 0$: la condition de solvabilité (2.14) est satisfaite, et le théorème précédent nous permet de conclure. ■

2.3.3 Diffusion à deux inconnues

A quoi sert le théorème de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi pour le modèle de la diffusion ? En préambule, on note que, si on considère des espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$ avec des formes bilinéaires, voire symétriques, et la valeur absolue $|\cdot|$, on a exactement les mêmes définitions et résultats qu'aux §2.3.1-§2.3.2...

On choisit d'utiliser la variable auxiliaire, c'est-à-dire le courant neutronique $\boldsymbol{p}$. Grâce aux les hypothèses sur les coefficients $\mathbb{D}$ et σ et sur la donnée S_f, on note que le modèle (2.1) est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega),\ \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega) \text{ tels que} \\ \operatorname{div}\boldsymbol{p} + \sigma u = S_f \text{ dans } \Omega \\ \mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{p} + \nabla u = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.15}$$

Dans la suite, nous allons mettre ce modèle sous forme variationnelle, avec les *deux inconnues* u et $\boldsymbol{p}$. Pour simplifier l'analyse, nous supposons en outre que le coefficient $\mathbb{D}$ est un champ de *tenseurs symétriques*. D'après l'hypothèse (2.2) sur $\mathbb{D}$, on en déduit facilement que

$$\begin{cases} \exists D^{-1}_{min} > 0,\ \forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}},\ \text{presque pour tout } \boldsymbol{x} \in \Omega,\ D^{-1}_{min}|\boldsymbol{z}|^2 \le \mathbb{D}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z}\,; \\ \exists D^{-1}_{max} > 0,\ \forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}},\ \text{presque pour tout } \boldsymbol{x} \in \Omega,\ |\mathbb{D}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}| \le D^{-1}_{max}|\boldsymbol{z}|. \end{cases} \tag{2.16}$$

Pour construire une formulation variationnelle équivalente au modèle (2.15), on commence par réaliser donc le "produit scalaire dans $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$" de la seconde EDP avec $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{H}(\operatorname{div};\Omega)$, pour trouver [5] :

$$0 = -\int_\Omega (\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{p} + \nabla u)\cdot\boldsymbol{r}\,d\Omega \overset{(1.16)}{=} \int_\Omega \Big(-\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} + u(\operatorname{div}\boldsymbol{r})\Big) d\Omega.$$

On note qu'après intégration par parties, l'inconnue u n'apparaît plus que comme appartenant à $L^2(\Omega)$, et de même dans la première EDP. En outre, la condition aux limites sur u est explicitement utilisée dans l'intégration par parties... Pour poursuivre, on réalise donc le "produit scalaire dans $L^2(\Omega)$" de la première EDP avec $w \in L^2(\Omega)$, pour former

$$\int_\Omega S_f w\,d\Omega = \int_\Omega (\operatorname{div}\boldsymbol{p} + \sigma u) w\,d\Omega = \int_\Omega \Big(w(\operatorname{div}\boldsymbol{p}) + \sigma u w \Big)\,d\Omega.$$

5. Au lieu de la formule d'intégration par parties (1.16), on peut encore une fois utiliser la remarque 1.30.

On en conclut que si $(u, \boldsymbol{p})$ est solution du modèle (2.15), alors $(u, \boldsymbol{p})$ est solution de la formulation variationnelle

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } (u, \boldsymbol{p}) \in L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega) \text{ tel que} \\ \forall (w, \boldsymbol{r}) \in L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega), \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega \Big(-\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} + u(\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}) + w(\mathrm{div}\,\boldsymbol{p}) + \sigma u w\Big) d\Omega = \int_\Omega S_f w\, d\Omega. \end{array}\right. \tag{2.17}$$

Réciproquement, en raisonnant au sens des distributions et en utilisant la surjectivité de l'application trace normale γ_n de $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$ dans $(H^{1/2}(\partial\Omega))'$ (voir le théorème 1.29), on montre que si $(u, \boldsymbol{p})$ est solution de la formulation variationnelle (2.17), alors $(u, \boldsymbol{p})$ est solution du modèle (2.15) (on retrouve au passage que $u \in H^1(\Omega)$, puis que $u_{|\partial\Omega} = 0$). On a donc bien construit *une seconde formulation variationnelle équivalente à notre modèle.*

Par rapport à la formulation variationnelle "abstraite" (2.5), on a respectivement :

— $V = L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$, muni de la norme $\|(v, \boldsymbol{q})\|_V = (\|v\|^2 + \|\boldsymbol{q}\|^2_{\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)})^{1/2}$;

— $a((v, \boldsymbol{q}), (w, \boldsymbol{r})) = -(\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{q}|\boldsymbol{r}) + (v|\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}) + (w|\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}) + (\sigma v|w)$;

— $\langle \ell, w\rangle_V = (S_f|w)$.

On vérifie facilement que la forme bilinéaire a est continue sur $(L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)) \times (L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega))$, et que la forme linéaire ℓ est $L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$. Nous prouvons son caractère bien posé ci-dessous à l'aide du théorème de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi. En effet, le théorème de Lax-Milgram ne s'applique pas, puisque la forme a n'est pas coercive ! En effet, on a

— $a((v, 0), (v, 0)) = (\sigma v|v) > 0$ si $v \in L^2(\Omega) \setminus \{0\}$;

— $a((0, \boldsymbol{q}), (0, \boldsymbol{q})) = -(\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{q}|\boldsymbol{q}) < 0$ si $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega) \setminus \{0\}$.

Puisque $t \mapsto a((tv, (1-t)\boldsymbol{q}), (tv, (1-t)\boldsymbol{q}))$ est continue sur $[0, 1]$, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $a((t_0 v, (1-t_0)\boldsymbol{q}), (t_0 v, (1-t_0)\boldsymbol{q})) = 0$, ainsi a ne peut pas être une forme coercive.

Par contre, la forme a étant symétrique, pour obtenir le caractère bien posé, on peut passer par le corollaire de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi. Il suffit d'établir la condition inf-sup (2.13). Nous allons la construire explicitement : pour cela, pour $(v, \boldsymbol{q}) \in L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$ non-nul, nous allons chercher $(w^\star, \boldsymbol{r}^\star) \in L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$ tel que

$$|a((v, \boldsymbol{q}), (w^\star, \boldsymbol{r}^\star))| \geq \alpha' \|(v, \boldsymbol{q})\|_V\, \|(w^\star, \boldsymbol{r}^\star)\|_V,$$

avec une constante $\alpha' > 0$ indépendante de $(v, \boldsymbol{q})$. L'idée de cette approche est que l'on pourra, lors de la discrétisation, reproduire ce calcul afin d'obtenir une estimation "similaire". Voir la séance 3. On raisonne par étapes.

1. **Cas particulier** $\mathrm{div}\,\boldsymbol{q} = 0$**.** On a

$$a((v, \boldsymbol{q}), (w, \boldsymbol{r})) = (-\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{q}|\boldsymbol{r}) + (v|\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}) + (\sigma v|w) \text{ et } \|(v, \boldsymbol{q})\|_V = (\|v\|^2 + \|\boldsymbol{q}\|^2)^{1/2}.$$

Quel $(w^\star, \boldsymbol{r}^\star)$ choisir ?

— $\boldsymbol{r}^\star = -\boldsymbol{q}$ donne : $a((v, \boldsymbol{q}), (w, \boldsymbol{r}^\star)) = (\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{q}|\boldsymbol{q}) + (\sigma v|w)$, puisque $\mathrm{div}\,\boldsymbol{q} = 0$;

— $w^\star = v$ donne : $a((v, \boldsymbol{q}), (w^\star, \boldsymbol{r}^\star)) = (\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{q}|\boldsymbol{q}) + (\sigma v|v)$.

Avec ce choix, $\|(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)\|_V = (\|v\|^2+\|\boldsymbol{q}\|^2)^{1/2}$, puisque $\operatorname{div}\boldsymbol{q}=0$. On a donc

$$\begin{aligned} a((v,\boldsymbol{q}),(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)) &\geq D_{min}^{-1}\,\|\boldsymbol{q}\|^2+\sigma_{min}\,\|v\|^2 \\ &\geq \min(D_{min}^{-1},\sigma_{min})\,(\|\boldsymbol{q}\|^2+\|v\|^2) \\ &= \min(D_{min}^{-1},\sigma_{min})\,\|(v,\boldsymbol{q})\|_V\,\|(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)\|_V. \end{aligned}$$

2. **Cas général** $\operatorname{div}\boldsymbol{q}\neq 0$**.** Quel $(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)$ choisir ?

— On commence comme pour "la divergence nulle" avec $\boldsymbol{r}^\star=-\boldsymbol{q}$, et on a

$$a((v,\boldsymbol{q}),(w,\boldsymbol{r}^\star)) = (\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{q}|\boldsymbol{q}) + (w-v|\operatorname{div}\boldsymbol{q}) + (\sigma v|w).$$

— Ensuite, on considère $w^\star=\alpha(v+\sigma^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{q})$, pour $\alpha>0$ à déterminer. Le choix αv reprend "la divergence nulle". En plus, on a introduit $\sigma^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{q}$ pour "compenser" le terme croisé en $(v|\operatorname{div}\boldsymbol{r})$; avec le coefficient σ^{-1} devant $\operatorname{div}\boldsymbol{q}$ par *homogénéité*, cf. la première EDP dans le modèle (2.15). On trouve

$$a((v,\boldsymbol{q}),(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)) = (\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{q}|\boldsymbol{q}) + (2\alpha-1)(v|\operatorname{div}\boldsymbol{q}) + \alpha(\sigma^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{q}|\operatorname{div}\boldsymbol{q}) + \alpha(\sigma v|v).$$

Si on fixe $\alpha=\frac{1}{2}$, le terme croisé disparaît ! Il reste

$$a((v,\boldsymbol{q}),(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)) = (\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{q}|\boldsymbol{q}) + \frac{1}{2}(\sigma^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{q}|\operatorname{div}\boldsymbol{q}) + \frac{1}{2}(\sigma v|v),$$

pour $(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)=(\frac{1}{2}(v+\sigma^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{q}),-\boldsymbol{q})$.

Avec ce choix, on a maintenant

$$\begin{aligned} a((v,\boldsymbol{q}),(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)) &\geq D_{min}^{-1}\,\|\boldsymbol{q}\|^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{max})^{-1}\|\operatorname{div}\boldsymbol{q}\|^2 + \frac{1}{2}\sigma_{min}\,\|v\|^2 \\ &\geq \min\big(D_{min}^{-1},\frac{1}{2}(\sigma_{max})^{-1},\frac{1}{2}\sigma_{min}\big)\,(\|\boldsymbol{q}\|^2+\|\operatorname{div}\boldsymbol{q}\|^2+\|v\|^2) \\ &= \min\big(D_{min}^{-1},\frac{1}{2}(\sigma_{max})^{-1},\frac{1}{2}\sigma_{min}\big)\,\|(v,\boldsymbol{q})\|_V^2. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de majorer $\|(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)\|_V$ par $\|(v,\boldsymbol{q})\|_V$. On a

$$\begin{aligned} \|(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)\|_V^2 &= \frac{1}{4}\|(v+\sigma^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{q})\|^2+\|\boldsymbol{q}\|^2+\|\operatorname{div}\boldsymbol{q}\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|v\|^2+\frac{1}{2}\|\sigma^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{q}\|^2+\|\boldsymbol{q}\|^2+\|\operatorname{div}\boldsymbol{q}\|^2 \\ &\leq \max\big(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}(\sigma_{min})^{-2}+1\big)\,(\|\boldsymbol{q}\|^2+\|\operatorname{div}\boldsymbol{q}\|^2+\|v\|^2) \\ &= \big(\frac{1}{2}(\sigma_{min})^{-2}+1\big)\,(\|\boldsymbol{q}\|^2+\|\operatorname{div}\boldsymbol{q}\|^2+\|v\|^2) \\ \Longrightarrow \|(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)\|_V &\leq \big(\frac{1}{2}(\sigma_{min})^{-2}+1\big)^{1/2}\|(v,\boldsymbol{q})\|_V. \end{aligned}$$

Finalement, on a établi que, pour tout $(v,\boldsymbol{q})$ non-nul, si on choisit $(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)=(\frac{1}{2}(v+\sigma^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{q}),-\boldsymbol{q})$, on a

$$a((v,\boldsymbol{q}),(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)) \geq \frac{\min\big(D_{min}^{-1},\frac{1}{2}(\sigma_{max})^{-1},\frac{1}{2}\sigma_{min}\big)}{\big(\frac{1}{2}(\sigma_{min})^{-2}+1\big)^{1/2}}\|(v,\boldsymbol{q})\|_V\,\|(w^\star,\boldsymbol{r}^\star)\|_V.$$

Et ainsi la condition inf-sup (2.13) est valable avec

$$\alpha' = \frac{\min\left(D_{min}^{-1}, \frac{1}{2}(\sigma_{max})^{-1}, \frac{1}{2}\sigma_{min}\right)}{\left(\frac{1}{2}(\sigma_{min})^{-2}+1\right)^{1/2}}.$$

Qui plus est, pour tout $(v, \boldsymbol{q})$ on dispose d'un représentant "explicite" $(w^\star, \boldsymbol{r}^\star))$ réalisant (2.13). Comme annoncé plus haut, on peut appliquer le corollaire de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi et en conclure que le modèle de la diffusion est bien posé, en étant cette fois passé par la formulation variationnelle (2.17) à deux inconnues.

Notes de cours 3

Approximation des formulations variationnelles

On s'intéresse à l'approximation des formulations variationnelles, dont on rappelle la forme générale (espaces de solutions et de fonctions-test non nécessairement égaux). Soient

— V et W deux espaces de Hilbert définis sur $\mathbb{C}$;

— $a(\cdot,\cdot)$ une forme sesquilinéaire et continue sur $V \times W$.

Pour $\ell \in W'$ donné, on étudie la formulation variationnelle,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V \text{ tel que}\\ \forall w \in W, \quad a(u,w) = \langle \ell, w\rangle_W.\end{array}\right. \tag{3.1}$$

On veut approcher la solution de la formulation variationnelle (3.1), que nous supposons bien posée au sens d'Hadamard (voir la définition 2.7). On introduit $(V_\delta)_\delta$ et $(W_\delta)_\delta$ deux suites d'espaces vectoriels de dimensions finies, paramétrées par $\delta > 0$, avec $V_\delta \subset V$ et $W_\delta \subset W$ pour tout δ (*approximation conforme*). Par convention, le paramètre δ prend des valeurs strictement positives, et on a $\lim_{\delta\to 0}(\dim(V_\delta)) = +\infty$. De même pour $(W_\delta)_\delta$.
Comme précédemment, on considérera des espaces de Hilbert V et W définis sur $\mathbb{R}$, avec $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire et continue sur $V \times W$, pour l'approximation du modèle de la diffusion.

3.1 Formulation variationnelle discrète

On va résoudre des problèmes approchés, ou discrets, posés dans les espaces V_δ (espace de solutions discrètes) et W_δ (espace de fonctions-test discrètes), pour un $\delta > 0$. L'approximation de (3.1) s'écrit simplement

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u_\delta \in V_\delta \text{ tel que}\\ \forall w_\delta \in W_\delta,\ a(u_\delta,w_\delta) = \langle \ell, w_\delta\rangle_W.\end{array}\right. \tag{3.2}$$

La formulation variationnelle discrète (3.2) peut être reformulée *de façon équivalente* sous la forme d'un système linéaire. Ici et dans la suite, on omettra la dépendance par rapport à δ dès que c'est possible...

Lemme 3.1 *Soit $(\varphi_j)_{1\leq j\leq N}$ une base de l'espace vectoriel V_δ, respectivement $(\psi_i)_{1\leq i\leq M}$ une base de l'espace vectoriel W_δ. Alors formulation variationnelle discrète (3.2) est* équivalente *au système linéaire posé dans $\mathbb{C}^N$:*

$$\textit{Trouver } \vec{X} \in \mathbb{C}^N \textit{ tel que } \mathbb{A}\vec{X} = \vec{L}, \tag{3.3}$$

où

$$\forall 1 \leq j \leq N,\ \forall 1 \leq i \leq M, \quad \mathbb{A}_{ij} = a(\varphi_j, \psi_i) \textit{ et } L_i = \langle \ell, \psi_i \rangle, \tag{3.4}$$

et on a la relation suivante entre les solutions

$$u_\delta = \sum_{j=1,N} X_j \varphi_j. \tag{3.5}$$

Démonstration : On établit le résultat intermédiaire suivant (à connaître !)

$$\forall w_\delta = \sum_{i=1,M} Y_i \psi_i \in W_\delta, \quad a(u_\delta, w_\delta) = (\mathbb{A}\vec{X}|\vec{Y})_{\mathbb{C}^M}. \tag{3.6}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}\vec{X}|\vec{Y})_{\mathbb{C}^M} &= \sum_{i=1,M} \Big(\sum_{j=1,N} \mathbb{A}_{ij} X_j \Big) \overline{Y_i} = \sum_{i=1,M} \Big(\sum_{j=1,N} a(\varphi_j, \psi_i) X_j \Big) \overline{Y_i} \\
&\overset{a(\cdot,\varphi_i) \text{ linéaire}}{=} \sum_{i=1,M} a\Big(\sum_{j=1,N} X_j \varphi_j, \psi_i \Big) \overline{Y_i} = \sum_{i=1,M} a(u_\delta, \psi_i) \overline{Y_i} \\
&\overset{a(u_\delta,\cdot) \text{ antilinéaire}}{=} a\Big(u_\delta, \sum_{i=1,M} Y_i \psi_i\Big) = a(u_\delta, w_\delta).
\end{aligned}$$

Pour tout $\vec{Y} \in \mathbb{C}^M$, on a donc, en choisissant $w_\delta = \sum_{i=1,M} Y_i \psi_i$:

$$(\mathbb{A}\vec{X}|\vec{Y})_{\mathbb{C}^M} \overset{(3.6)}{=} a(u_\delta, w_\delta) \overset{(3.2)}{=} \langle \ell, w_\delta \rangle_W \overset{\ell \text{ antilinéaire}}{=} \sum_{i=1,M} \langle \ell, \psi_i \rangle_W \overline{Y_i} \overset{\text{def. } \vec{L}}{=} (\vec{L}|\vec{Y})_{\mathbb{C}^M}.$$

Ainsi, u_δ solution de (3.2) implique que $\vec{X}$ solution de (3.3). La réciproque est évidente. ∎

Une condition *nécessaire* pour que la formulation variationnelle discrète admette une solution et une seule est donc que $\dim(V_\delta) = \dim(W_\delta)$.

3.2 Cas d'une forme coercive

Dans ce cas, on doit résoudre une formulation avec $V = W$. On note $\alpha > 0$ la constante de coercivité apparaissant dans (2.6), ie.

$$\forall v \in V, \quad |a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

On choisit $V_\delta = W_\delta$ pour tout δ pour assurer que $\dim(V_\delta) = \dim(W_\delta)$. On note $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N}$ une base de l'espace vectoriel V_δ.

Proposition 3.2 *Si la forme $a(\cdot,\cdot)$ est coercive, alors pour tout δ la matrice $\mathbb{A}$ est inversible.*

Démonstration : On note que la matrice $\mathbb{A}$ est carrée dans le cas présent. Ainsi $\mathbb{A}$ est inversible si, et seulement si, $\ker(\mathbb{A}) = \{0\}$. Soit donc $\vec{Y} \in \mathbb{C}^M$ tel que $\mathbb{A}\vec{Y} = 0$. On a $(\mathbb{A}\vec{Y}|\vec{Y})_{\mathbb{C}^M} = 0$, et on déduit de (3.6) que $a(w_\delta, w_\delta) = 0$, avec $w_\delta = \sum_{i=1,N} Y_i\varphi_i$. Comme la forme a est coercive, on a nécessairement $w_\delta = 0$, et également $\vec{Y} = 0$. ■

Remarque 3.3 *Lorsque V est un espace de Hilbert défini sur $\mathbb{R}$, on peut montrer, à l'instar de la remarque 2.4, que la matrice est soit* définie-positive*, soit* définie-négative*, pour tout δ.*

Ainsi, u_δ existe et est unique pour tout δ. On peut alors étudier l'*erreur* entre la solution exacte et la solution approchée, $u - u_\delta$. Et plus précisément, si on a *convergence*, c'est-à-dire si $\lim_{\delta\to 0} \|u - u_\delta\|_V = 0$.

Théorème 3.4 `(Lemme de Céa)` *Si la forme $a(\cdot,\cdot)$ est coercive avec une constante de coercivité $\alpha > 0$, cf. (2.6), on a l'estimation d'erreur*

$$\forall \ell \in V',\ \forall \delta, \quad \|u - u_\delta\|_V \leq \frac{|||a|||}{\alpha} \inf_{v_\delta \in V_\delta} \|u - v_\delta\|_V. \tag{3.7}$$

Si de plus la forme $a(\cdot,\cdot)$ est hermitienne, on a l'estimation d'erreur

$$\forall \ell \in V',\ \forall \delta, \quad \|u - u_\delta\|_V \leq \left(\frac{|||a|||}{\alpha}\right)^{1/2} \inf_{v_\delta \in V_\delta} \|u - v_\delta\|_V. \tag{3.8}$$

Démonstration : On suppose que $u \neq u_\delta$ (dans le cas contraire (3.7)-(3.8) sont vérifiées !).
D'après la coercivité de a, on a en particulier $\alpha\|u - u_\delta\|_V^2 \leq |a(u - u_\delta, u - u_\delta)|$.
Soit maintenant $w_\delta \in V_\delta$: puisque u résout (3.1) et que u_δ résout (3.2), on a

$$a(u, w_\delta - u_\delta) = \langle \ell, w_\delta - u_\delta\rangle_W = a(u_\delta, w_\delta - u_\delta).$$

Ainsi, $a(u - u_\delta, u_\delta - w_\delta) = 0$. On en déduit que

$$\alpha\|u - u_\delta\|_V^2 \leq |a(u - u_\delta, u - u_\delta) + a(u - u_\delta, u_\delta - w_\delta)| =\leq |a(u - u_\delta, u - w_\delta)|.$$

Et, d'après la continuité de a, on a $|a(u - u_\delta, u - w_\delta)| \leq |||a|||\, \|u - u_\delta\|_V\, \|u - w_\delta\|_V$. Si on rassemble les estimations, on trouve, après division par $\|u - u_\delta\|_V \neq 0$,

$$\alpha\|u - u_\delta\|_V \leq |||a|||\, \|u - w_\delta\|_V.$$

Le résultat étant vrai pour tout $w_\delta \in V_\delta$, on en conclut que (3.8) est vraie.
Si de plus $a(\cdot,\cdot)$ est hermitienne, on raisonne différemment. Tout d'abord, on écrit pour $w_\delta \in V_\delta$:

$$\begin{array}{rcl} a(u - w_\delta, u - w_\delta) & = & a\big((u - u_\delta) + (u_\delta - w_\delta), (u - u_\delta) + (u_\delta - w_\delta)\big) \\ & = & a(u - u_\delta, u - u_\delta) + a(u - u_\delta, u_\delta - w_\delta) \\ & & \qquad + a(u_\delta - w_\delta, u - u_\delta) + a(u_\delta - w_\delta, u_\delta - w_\delta) \\ a \text{ hermitienne} & = & a(u - u_\delta, u - u_\delta) + 2\Re\big(a(u - u_\delta, u_\delta - w_\delta)\big) + a(u_\delta - w_\delta, u_\delta - w_\delta) \\ u \text{ sol. (3.1)}, u_\delta \text{ sol. (3.2)} & = & a(u - u_\delta, u - u_\delta) + a(u_\delta - w_\delta, u_\delta - w_\delta). \end{array}$$

Ensuite, d'après le lemme 2.3, on a l'alternative (2.8) :

$$\exists \epsilon \in \{-1, +1\},\ \exists \alpha > 0,\ \forall v \in V,\ \epsilon a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

En particulier, pour tout $v \in V$, on a $|a(v, v)| = \epsilon a(v, v)$. On en conclut que, pour $w_\delta \in V_\delta$:

$$\begin{aligned} |a(u - w_\delta, u - w_\delta)| &= \epsilon a(u - w_\delta, u - w_\delta) \\ &= \epsilon a(u - u_\delta, u - u_\delta) + \epsilon a(u_\delta - w_\delta, u_\delta - w_\delta) \\ &\geq \epsilon a(u - u_\delta, u - u_\delta) = |a(u - u_\delta, u - u_\delta)|. \end{aligned}$$

A l'aide enfin de la coercivité et de la continuité de a, on a finalement

$$\alpha \|u - u_\delta\|_V^2 \leq |||a||| \|u - w_\delta\|_V^2,$$

et (3.8) suit. ∎

Remarque 3.5 *Lorsque V est un espace de Hilbert défini sur $\mathbb{R}$, on a l'estimation (3.7) lorsque la forme est coercive, et l'estimation (3.8) lorsque la forme est de plus symétrique.*

Les estimations ci-dessus signifient que la constante $C = |||a|||/\alpha$ ou $C = (|||a|||/\alpha)^{1/2}$ est *indépendante de δ et de u*, car la solution u dépend de façon continue de la donnée ℓ.
On en déduit que la norme de l'erreur est *comparable à* l'erreur d'approximation entre V_δ et V. En effet,

$$\inf_{v_\delta \in V_\delta} \|u - v_\delta\|_V \leq \|u - u_\delta\|_V \leq C \inf_{v_\delta \in V_\delta} \|u - v_\delta\|_V.$$

Enfin, puisque V_δ est de dimension finie, c'est un sous-espace vectoriel fermé de V, et on a $\inf_{v_\delta \in V_\delta} \|u - v_\delta\|_V = \min_{v_\delta \in V_\delta} \|u - v_\delta\|_V = \|u - P_\delta u\|_V$, où P_δ est la projection orthogonale sur V_δ.

Une *condition suffisante* pour que $\lim_{\delta \to 0} \|u - v_\delta\|_V = 0$ est la propriété d'approximabilité.

Définition 3.6 *La famille $(V_\delta)_\delta$ vérifie la* propriété d'approximabilité *de V si, et seulement si,*

$$\begin{array}{l} \exists V^\star \textit{ dense de } V, \quad \forall \delta,\ \exists r_\delta \in \mathcal{L}(V^\star, V_\delta) \textit{ tels que} \\ \forall v^\star \in V^\star, \quad \lim_{\delta \to 0} \|v^\star - r_\delta v^\star\|_V = 0. \end{array} \tag{3.9}$$

Proposition 3.7 *Si la propriété d'approximabilité (3.9) est vérifiée, alors*

$$\forall v \in V, \quad \lim_{\delta \to 0} \left(\inf_{v_\delta \in V_\delta} \|v - v_\delta\|_V \right) = 0. \tag{3.10}$$

Démonstration : Soient $v \in V$, et $\eta > 0$ donnés.
D'après (3.9) 1ère ligne, comme $V^\star$ est dense dans V, il existe $v^\star \in V^\star$ tel que $\|v - v^\star\|_V \leq \eta/2$. Et, d'après (3.9) 2ème ligne, il existe $\delta_\eta > 0$ tel que, pour tout $\delta \in]0, \delta_\eta[$, on a $\|v^\star - r_\delta v^\star\|_V \leq \eta/2$. A l'aide de l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\forall \delta \in]0, \delta_\eta[, \quad \|v - r_\delta v^\star\|_V \leq \|v - v^\star\|_V + \|v^\star - r_\delta v^\star\|_V \leq \eta,$$

soit

$$\forall \delta \in]0, \delta_\eta[, \quad \inf_{v_\delta \in V_\delta} \|v - v_\delta\|_V \leq \eta,$$

ce qui permet d'atteindre le résultat cherché. ∎

Théorème 3.8 *Si la forme $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, et si la propriété d'approximabilité (3.9) est vérifiée, alors la suite des solutions approchées $(u_\delta)_{\delta>0}$ converge vers u dans V :*

$$\lim_{\delta \to 0} \|u - u_\delta\|_V = 0. \tag{3.11}$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le lemme de Céa et $(3.10)_{v=u}$. ∎

Une fois la convergence de $(u_\delta)_{\delta>0}$ vers u obtenue, on pourra se poser la question de la qualité de l'approximation, ou de la *vitesse de convergence.*

Définition 3.9 (vitesse de convergence) *On dit que l'approximation $(u_\delta)_{\delta>0}$ est convergente à l'ordre $s > 0$ s'il existe une constante $C > 0$, indépendante de δ telle que :*

$$\|u - u_\delta\|_V \leq C\, \delta^s.$$

3.3 Cas général

On se pose maintenant la question de la convergence d'une approximation conforme dans le cas général, c'est-à-dire dans les cas : $V \neq W$; ou bien $V = W$ avec une forme $a(\cdot, \cdot)$ qui n'est pas coercive. Rappelons que, comme la formulation variationnelle (3.1) est *a priori* bien posée au sens d'Hadamard, alors d'après le théorème LBB (théorème 2.12), ceci est équivalent au fait que la forme a vérifie une condition inf-sup (2.13) et une condition de solvabilité (2.14). Pour que les formulations variationnelles discrètes (3.2) soient bien posées, on peut également appliquer le théorème LBB : il faut donc, pour la forme a, une *condition inf-sup discrète* (ou de *stabilité discrète*) ainsi qu'une *condition de solvabilité discrète*, pour tout $\delta > 0$.

Définition 3.10 *La forme a vérifie une* condition inf-sup discrète *si, et seulement si*

$$\forall \delta > 0,\ \exists \alpha_\delta > 0,\ \forall v_\delta \in V_\delta, \quad \sup_{w_\delta \in W_\delta \setminus \{0\}} \frac{|a_\delta(v_\delta, w_\delta)|}{\|w_\delta\|_W} \geq \alpha_\delta \|v_\delta\|_V. \tag{3.12}$$

Définition 3.11 *La forme a vérifie une* condition de solvabilité discrète *si, et seulement si,*

$$\forall \delta > 0,\ \{w_\delta \in W_\delta \text{ tel que } a(v_\delta, w_\delta) = 0,\ \forall v_\delta \in V_\delta\} = \{0\}. \tag{3.13}$$

Pour $\delta > 0$, on introduit l'application linéaire [1] $\mathtt{A}_\delta \in \mathcal{L}(V_\delta, W_\delta)$ associée à $a(\cdot, \cdot)$ sur $V_\delta \times W_\delta$:

$$\forall (v_\delta, w_\delta) \in V_\delta \times W_\delta, \quad (\mathtt{A}_\delta v_\delta, w_\delta)_W = a(v_\delta, w_\delta). \tag{3.14}$$

1. En dimension finie, toute application linéaire est continue.

Soit $\delta > 0$. On vérifie facilement que la condition (3.12) est équivalente à $\mathtt{A}_\delta$ injective, et que la condition (3.13) est équivalente à $\mathtt{A}_\delta$ surjective. Ces deux conditions sont donc équivalentes à $\mathtt{A}_\delta$ bijective, ce qui est bien sûr équivalent au fait que la formulation variationnelle discrète (3.2) est bien posée. Pour des raisons pratiques, on va remplacer ces deux conditions et définir un *nouveau jeu de conditions équivalentes.*

Corollaire 3.12 (Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi discret) *Soient V_δ et W_δ deux espaces de Hilbert de dimension finie, a une forme sesquilinéaire et continue $V_\delta \times W_\delta$. La formulation variationnelle discrète (3.2) est bien posée si, et seulement si, la condition inf-sup discrète (3.12) est satisfaite, et* $\dim(V_\delta) = \dim(W_\delta)$.

Dans la suite on supposera donc que $\dim(V_\delta) = \dim(W_\delta)$ pour tout $\delta > 0$.
Mais, contrairement à la coercivité qui se transmet automatiquement aux formulations variationnelles discrètes pour une approximation conforme, la condition inf-sup *ne se transmet pas* ! ?
On rappelle la condition inf-sup pour la formulation variationnelle (3.1) ci-dessous :

$$\exists \alpha' > 0,\ \forall v \in V,\ \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|a(v,w)|}{\|w\|_W} \geq \alpha' \|v\|_V.$$

Or, cette condition n'implique pas (3.12), puisque $W_\delta \subset W$ entraîne au contraire que, pour tout $v \in V$,

$$\sup_{w_\delta \in W_\delta \setminus \{0\}} \frac{|a(v,w_\delta)|}{\|w_\delta\|_W} \leq \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|a(v,w)|}{\|w\|_W}.$$

Ainsi, pour obtenir le caractère bien posé des formulations variationnelles discrètes on devra *explicitement* établir la condition inf-sup discrète (3.12).

Théorème 3.13 `(Lemme de Céa)` *Soit $\delta > 0$. Si la forme $a(\cdot,\cdot)$ vérifie la condition discrète (3.12), on a l'estimation d'erreur*

$$\forall \ell \in V', \quad \|u - u_\delta\|_V \leq \left(1 + \frac{|||a|||}{\alpha_\delta}\right) \inf_{v_\delta \in V_\delta} \|u - v_\delta\|_V. \tag{3.15}$$

Démonstration : Soit $v_\delta \in V_\delta$. D'après (3.12), on a

$$\exists w'_\delta \in V_\delta \setminus \{0\}, \quad \|u_\delta - v_\delta\|_V \leq \frac{1}{\alpha_\delta} \frac{|a_\delta(u_\delta - v_\delta, w'_\delta)|}{\|w'_\delta\|_W}.$$

Et, puisque u résout (3.1) et que u_δ résout (3.2), on a $a(u, w'_\delta) = \langle \ell, w'_\delta \rangle_W = a(u_\delta, w'_\delta)$, et ainsi $a(u - u_\delta, w'_\delta) = 0$. On a donc

$$|a_\delta(u_\delta - v_\delta, w'_\delta)| = |a_\delta(u_\delta - v_\delta, w'_\delta) + a(u - u_\delta, w'_\delta)| = a_\delta(u - v_\delta, w'_\delta)|.$$

Par conséquent,

$$\frac{|a_\delta(u_\delta - v_\delta, w'_\delta)|}{\|w'_\delta\|_W} = \frac{|a_\delta(u - v_\delta, w'_\delta)|}{\|w'_\delta\|_W} \leq |||a|||\, \|u - v_\delta\|_V.$$

Si on revient à l'estimation initiale, on a finalement

$$\|u_\delta - v_\delta\|_V \le \frac{|||a|||}{\alpha_\delta} \|u - v_\delta\|_V.$$

Par inégalité triangulaire, on trouve

$$\|u - u_\delta\|_V \le \|u - v_\delta\|_V + \|v_\delta - u_\delta\|_V \le \left(1 + \frac{|||a|||}{\alpha_\delta}\right) \|u - v_\delta\|_V,$$

et, comme c'est valable pour tout $v_\delta \in V_\delta$, on peut prendre l'infimum et en déduire (3.7). ■

Pour que la norme de l'erreur soit *comparable à* l'erreur d'approximation entre V_δ et V, il faut que la constante apparaissant dans (3.7) soit *uniformément majorée* par rapport à δ ou, ce qui est équivalent, que les constantes $(\alpha_\delta)_\delta$ soient *uniformément minorées* par un nombre strictement positif : c'est ce qu'on appelle la *condition inf-sup discrète uniforme* (ou de *stabilité discrète uniforme*).

Définition 3.14 *La forme a vérifie une* condition inf-sup discrète uniforme *si, et seulement si,*

$$\exists \alpha_\dagger > 0,\ \forall \delta > 0,\ \forall v_\delta \in V_\delta,\ \sup_{w_\delta \in W_\delta \setminus \{0\}} \frac{|a(v_\delta, w_\delta)|}{\|w_\delta\|_W} \ge \alpha_\dagger \|v_\delta\|_V. \tag{3.16}$$

Si cette condition est vérifiée (encore une fois, c'est une autre condition que la condition inf-sup (2.13) vérifiée dans $V \times W$), on a convergence.

Théorème 3.15 *Si la forme $a(\cdot,\cdot)$ vérifie une condition inf-sup discrète uniforme, et si la propriété d'approximabilité (3.9) est vérifiée, alors la suite des solutions approchées $(u_\delta)_{\delta>0}$ converge vers u dans V :*

$$\lim_{\delta \to 0} \|u - u_\delta\|_V = 0. \tag{3.17}$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le lemme de Céa (théorème 3.4) et $(3.10)_{v=u}$. ■

Une fois la convergence de $(u_\delta)_{\delta>0}$ vers u obtenue, on pourra se poser la question de la vitesse de convergence, cf. la définition 3.9.

3.4 Application à la diffusion neutronique

3.4.1 Diffusion à une inconnue

On commence par étudier la discrétisation de la formulation variationnelle (2.4), posée dans $H_0^1(\Omega)$, où Ω est un domaine, qu'on réécrit ici :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \displaystyle\int_\Omega \Big(\mathbb{D}\nabla u \cdot \nabla w + \sigma u w\Big) d\Omega = \int_\Omega S_f w \, d\Omega, \end{cases}$$

avec un $\mathbb{D}$ un champ de tenseurs *symétriques* vérifiant (2.2), et σ vérifiant (2.3). Les hypothèses (2.2)-(2.3) sur les coefficients $\mathbb{D}$ et σ garantissent que la forme bilinéaire est coercive, d'où le caractère bien posé. On va définir des sous-espaces discrets à l'aide de la méthode des éléments finis (voir [6]). Pour simplifier l'exposé, on suppose que le domaine Ω est polygonal si $\mathtt{d} = 2$, ou polyédrique si $\mathtt{d} = 3$. Dans ce cadre, le paramètre de discrétisation est égal au pas du maillage (voir plus bas), et est noté h. On note $(V_h^0)_h$ la suite des sous-espaces discrets de $H_0^1(\Omega)$. Pour $h > 0$ donné, la formulation variationnelle discrète s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h^0 \text{ tel que} \\ \forall w_h \in V_h^0, \quad \displaystyle\int_\Omega \Big(\mathbb{D}\nabla u_h \cdot \nabla w_h + \sigma u_h w_h\Big) d\Omega = \int_\Omega S_f w_h \, d\Omega. \end{array}\right. \tag{3.18}$$

Le caractère bien posé découle du fait que la forme bilinéaire est coercive (cf. §3.2).

Pour construire les sous-espaces discrets $(V_h^0)_h$, on s'appuie sur des maillages $(\mathcal{T}_h)_h$ de Ω, formés de simplexes (triangles si $\mathtt{d} = 2$; tétraèdres si $\mathtt{d} = 3$). Soit un maillage $\mathcal{T}_h$ donné : on appelle $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ l'ensemble des simplexes le composant (par convention, ce sont des fermés de $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$) : $\overline{\Omega} = \cup_{T_\ell \in \mathcal{T}_h} T_\ell$. Le *pas du maillage* $\mathcal{T}_h$ est égal à $h = \max_\ell h_\ell$, où h_ℓ est le rayon de la plus petite boule contenant T_ℓ.
Pour un simplexe T quelconque et $k \in \mathbb{N}$, on introduit [2] :

$$P^k(T) = \{q \in P(T) \text{ tel que } d^\circ(q) \leq k\}.$$

A partir de là, on définit classiquement V_h^0 en deux étapes. Soit $k \geq 1$.

1. On introduit d'abord [3] $V_h \subset H^1(\Omega)$:

$$V_h = \{v_h \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v_{h|T_\ell} \in P^k(T_\ell),\ \forall \ell = 1, L\}. \tag{3.19}$$

2. Puis on introduit $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$:

$$V_h^0 = V_h \cap H_0^1(\Omega) = \{v_h \in V_h \text{ tel que } v_{h|\partial\Omega} = 0\}. \tag{3.20}$$

Ceci correspond à la discrétisation conforme par *éléments finis de Lagrange d'ordre k*.
On fait en outre l'hypothèse que la famille de maillages $(\mathcal{T}_h)_h$ est régulière. Pour h donné, et pour un simplexe $T_\ell \in \mathcal{T}_h$, on introduit ρ_ℓ le rayon de la plus grande boule incluse dans T_ℓ. On dit que la famille de maillages $(\mathcal{T}_h)_h$ est *régulière* si

$$\exists \sigma > 0,\ \forall h,\ \forall T_\ell \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_\ell}{\rho_\ell} \leq \sigma.$$

2. Lorsque $k = 1$, on a aussi $P^1(T) = \{q \in P(T) \text{ tel que } q(\boldsymbol{x}) = a + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in T\}$.
3. On a la *définition équivalente* : $V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v_{h|T_\ell} \in P^k(T_\ell),\ \forall \ell = 1, L\}$.

Remarque 3.16 *Pour la discrétisation par éléments finis de Lagrange, nous donnons quelques détails pour réaliser les calculs élémentaires, c'est-à-dire les intégrations sur les simplexes du maillage. Pour cela, on peut effectuer un changement de variables et passer par le* simplexe de référence*, noté $\hat{T}$, dont les sommets sont l'origine, et les $\mathtt{d}$ points dont les coordonnées sont $(\mathtt{d}-1)$ 0, et un 1... Pour un simplexe T_ℓ, on note $F_\ell\ :\ \hat{T} \to T_\ell$ la transformation affine transformant $\hat{T}$ en T_ℓ, et on utilise le changement de variables $\boldsymbol{x} = F_\ell(\hat{\boldsymbol{x}}) = \mathbb{A}_\ell \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}_\ell$, avec $\mathbb{A}_\ell \in \mathbb{R}^{\mathtt{d}\times\mathtt{d}}$ et $\boldsymbol{b}_\ell \in \mathbb{R}^{\mathtt{d}}$. Le jacobien de la transformation vaut $J_{F_\ell}(\hat{\boldsymbol{x}}) = det(dF_\ell(\hat{\boldsymbol{x}})) = det(\mathbb{A}_\ell)$, et on a $d\boldsymbol{x} = |J_{F_\ell}(\hat{\boldsymbol{x}})|\, d\hat{\boldsymbol{x}}$; notons que $det(\mathbb{A}_\ell) = \pm 2 mes(T_\ell)$, selon l'orientation des sommets de T_ℓ. A une fonction v définie sur T_ℓ, on associe alors $\hat{v}$ définie sur $\hat{T}$ telle que $\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}) = v(F_\ell(\hat{\boldsymbol{x}})) = v(\boldsymbol{x})$ pour tout $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{T}$, et on a $\nabla v(\boldsymbol{x}) = (\mathbb{A}_\ell^T)^{-1}\hat{\nabla}\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})$.*

On montre que les fonctions de V_h peuvent être caractérisées par des valeurs ponctuelles (ce qui semble raisonnable, puisque qu'elles appartiennent à $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et sont donc définies partout).

Nous détaillons ci-dessous pour les éléments finis de Lagrange d'ordre $k = 1$. On note $(M_i)_{i=1,N}$ les sommets du maillage $\mathcal{T}_h$, et $(w_i)_{i=1,N}$ les fonctions de base associées aux sommets, caractérisées par : pour tout $1 \leq i \leq N$, on a $w_i \in V_h$ avec pour tout $1 \leq j \leq N$, $w_i(M_j) = \delta_{ij}$. Pour un élément $v_h \in V_h$, on vérifie que $v_h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1,N} v_h(M_i) w_i(\boldsymbol{x})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$. Ainsi, les *degrés de liberté* associés, c'est-à-dire les quantités caractérisant v_h, sont les quantités $(v_h(M_i))_{i=1,N}$. Ensuite, si on note $\mathcal{I}$ l'ensemble des indices correspondant aux sommets n'appartenant pas à la frontière, c'est-à-dire $\mathcal{I} = \{i \in \{1, \cdots, N\}$ tels que $M_i \notin \partial\Omega\}$, on note que $(w_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est une base de V_h^0.

Remarque 3.17 *En suivant le formalisme du lemme 3.1 avec $(w_i)_{i\in\mathcal{I}}$ comme base de V_h^0, on obtient un système linéaire équivalent à (3.18), et on peut montrer que la matrice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}|\times|\mathcal{I}|}$ est creuse, au sens suivant. Si on indice par le pas du maillage, alors le nombre d'éléments non-nuls de $\mathbb{A}_h$, noté $nnz(\mathbb{A}_h)$, peut en principe croître comme $|\mathcal{I}_h|^2$ lorsque h tend vers 0. On montre en fait que $nnz(\mathbb{A}_h)$ est borné par $C|\mathcal{I}_h|$, avec $C > 0$ une constante qui ne dépend pas de h. Ce résultat est toujours vrai lorsque $\mathtt{d} = 2$. Lorsque $\mathtt{d} = 3$, il faut que la famille des maillages $(\mathcal{T}_h)_h$ soit régulière.*

La propriété d'approximabilité (3.9) qui implique la convergence de l'erreur vers 0 est obtenue grâce à un opérateur d'interpolation. Nous rappelons le plus "classique" ci-dessous (à h donné).

$$\pi_h\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) & \to & V_h \\ v & \mapsto & \pi_h v = \sum_{i=1,N} v(M_i) w_i \end{array}\right. . \tag{3.21}$$

On utilise la définition de $H_0^1(\Omega)$: $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, et on introduit les opérateurs $r_h = \pi_{h|\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), V_h^0)$. On peut prouver par le calcul que, pour tout $v^\star \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\lim_{h\to 0} \|v^\star - \pi_h v^\star\|_{H^1(\Omega)} = 0$. D'après le théorème 3.8, la convergence suit :

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Pour les éléments finis de Lagrange d'ordre $k \geq 2$, les degrés de liberté sont les valeurs ponctuelles aux sommets, ainsi qu'en certains points des arêtes, des faces (si $\mathtt{d} = 3$) et de l'intérieur des simplexes. Concernant le nombre d'éléments non-nuls de $\mathbb{A}_h$, il est toujours borné par $C_k|\mathcal{I}_h|$, où $\mathcal{I}_h$ est l'ensemble des indices de degrés de liberté ne se trouvant pas sur $\partial\Omega$, avec $C_k > 0$ une constante qui dépend uniquement de k, mais pas de h. La propriété d'approximabilité (3.9) est obtenue comme ci-dessus, à l'aide d'un opérateur d'interpolation π_h défini à partir de tous les degrés de liberté.

Concernant la vitesse de convergence, on a le résultat suivant, que nous admettons.

Proposition 3.18 *Supposons que la solution u est de régularité H^{1+s} "par morceaux" sur une partition de Ω, où s appartient à $\mathbb{R}_+^*$,*[4] *alors si on utilise les éléments finis de Lagrange d'ordre k sur une famille régulière de maillages qui respectent la partition, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h^{\min(s,k)}.$$

Si maintenant on s'intéresse à la convergence en norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, qui est une *norme plus faible* que la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, on a en général une *meilleure vitesse de convergence*. On suppose (voir la proposition 1 de [5]) que la formulation variationnelle (2.4) possède la *propriété de décalage* suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } r_{max} \in]0,1] \text{ tel que, pour toute donnée } S_f \in L^2(\Omega), \\ \text{la solution } u \text{ appartient à } H^{1+r} \text{ "par morceaux",}^4 \text{ pour tout } r \in [0, r_{max}[. \end{array} \right. \tag{3.22}$$

Alors, à l'aide du lemme d'Aubin-Nitsche, on en déduit le

Corollaire 3.19 *Sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 3.18, il existe une constante $C' > 0$ indépendante de h telle que*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C'\, h^{\min(s,k)+r_{max}}.$$

Situation "typique" pour la résolution numérique de la diffusion à une inconnue : avec des éléments finis de Lagrange d'ordre $k = 1$, et un exposant de décalage $r_{max} = 1$, l'erreur $u - u_h$ converge vers 0 à l'ordre 1 en norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, et à l'ordre 2 en norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

4. Intuitivement, ceci signifie qu'il existe une partition de Ω en sous-domaines disjoints $(\Omega_p)_{p=1,P}$, telle que la solution restreinte à chaque sous-domaine Ω_p appartient à $H^{1+s}(\Omega_p)$. Si $s \in \mathbb{N}^*$, ce sont les espaces de Sobolev "usuels" de la définition 1.15. Si $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, on a une appartenance "par morceaux" à des espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire... Principale propriété des espaces de Sobolev d'ordre positif : pour tous $s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $s_1 < s_2$, $H^{1+s_2}(\Omega_p)$ est un sous-ensemble strict de $H^{1+s_1}(\Omega_p)$.

3.4.2 Diffusion à deux inconnues

On veut maintenant discrétiser alors $(u, \boldsymbol{p})$ est la formulation variationnelle (2.17), posée dans $L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$, où Ω est un domaine, qu'on réécrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \boldsymbol{p}) \in L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega) \text{ tel que} \\ \forall (w, \boldsymbol{r}) \in L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega), \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega \Big(-\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} + u(\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}) + w(\mathrm{div}\,\boldsymbol{p}) + \sigma u w\Big) d\Omega = \int_\Omega S_f w \, d\Omega. \end{array}\right.$$

On suppose toujours que le coefficient $\mathbb{D}$ est un champ de tenseurs *symétriques* vérifiant (2.2), et que le coefficient σ est un champ de scalaires vérifiant (2.3), qui est de plus *constant par morceaux* (nouvelle hypothèse simplificatrice ; on peut s'en abstraire, voir le §5.1 de [5]). On utilise à nouveau la méthode des éléments finis, dans un domaine Ω supposé polygonal si $\mathtt{d} = 2$, ou polyédrique si $\mathtt{d} = 3$. Dans ce cadre, le paramètre de discrétisation est égal au pas du maillage.

On note cette fois $(M_h)_h$ la suite des sous-espaces discrets de $L^2(\Omega)$, et $(\boldsymbol{Q}_h)_h$ la suite des sous-espaces discrets de $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$. Pour $h > 0$ donné, la formulation variationnelle discrète s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, \boldsymbol{p}_h) \in M_h \times \boldsymbol{Q}_h \text{ tel que} \\ \forall (w_h, \boldsymbol{r}_h) \in M_h \times \boldsymbol{Q}_h, \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega \Big(-\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{p}_h\cdot\boldsymbol{r}_h + u_h(\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}_h) + w_h(\mathrm{div}\,\boldsymbol{p}_h) + \sigma u_h w_h\Big) d\Omega = \int_\Omega S_f w_h \, d\Omega. \end{array}\right. \tag{3.23}$$

Comme on l'a noté au §3.3, il faut disposer d'une condition inf-sup discrète (uniforme) dans $V = L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$. Ceci signifie qu'*on ne peut pas choisir M_h et $\boldsymbol{Q}_h$ indépendamment l'un de l'autre*. Un choix possible est celui des *éléments finis de Raviart-Thomas d'ordre k*. Les maillages $(\mathcal{T}_h)_h$ sont similaires, et possèdent les mêmes propriétés, que ceux précédemment utilisés, avec la *contrainte supplémentaire* que le coefficient σ restreint à tout simplexe est *constant* sur ce simplexe (de façon plus imagée, si on partitionne Ω en sous-domaines sur lesquels σ est constant, alors les maillages respectent cette partition).

<u>Etape 1</u> : définition de $\boldsymbol{Q}_h \subset \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$.

En préambule, on note que, comme on discrétise des champs à valeurs vectorielles, on considère des approximations à l'aide de polynômes à coefficients vectoriels, c'est-à-dire qu'on se place localement dans des sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{P}(T) = (P(T))^{\mathtt{d}}$, où T est un simplexe.

Si on a un champ $\boldsymbol{q}_h$ régulier (polynomial) par simplexe, à quelles conditions a-t-on $\boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$? Pour répondre à cette question, soient deux simplexes distincts T, T' de $\mathcal{T}_h$ ayant une arête a en commun (si $\mathtt{d} = 2$) ; une face f en commun (si $\mathtt{d} = 3$). On peut établir une condition sur le saut [5] de la composante normale :

$$\boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,; int(T \cup T')) \iff \left\{\begin{array}{ll} [\boldsymbol{q}_h\cdot\boldsymbol{n}_a]_a = 0 & \text{si } \mathtt{d} = 2\,; \\ [\boldsymbol{q}_h\cdot\boldsymbol{n}_f]_f = 0 & \text{si } \mathtt{d} = 3. \end{array}\right. \tag{3.24}$$

5. De façon générale, pour g régulière de part et d'autre de l'interface Σ séparant T et T', le *saut* de g au

Et, plus globalement, l'appartenance de $\boldsymbol{q}_h$ à $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$ est garantie si, et seulement si, le saut de la composante normale sur toutes les arêtes communes à deux triangles de $\mathcal{T}_h$ est nul (si $\mathtt{d}=2$) ; le saut de la composante normale sur toutes les faces communes à deux tétraèdres de $\mathcal{T}_h$ est nul (si $\mathtt{d}=3$). On parle d'arêtes internes, respectivement de faces internes, de $\mathcal{T}_h$. A priori, on utilise donc des degrés de liberté associés à cette composante normale... Et d'autres, si besoin !

Remarque 3.20 *La continuité des autres composantes de la trace de $\boldsymbol{q}_h$ n'est pas requise. Par conséquent, les éléments de $\boldsymbol{Q}_h$ ne sont pas continus en général, c'est-à-dire que $\boldsymbol{Q}_h \not\subset \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega})$.*

Nous introduisons, pour $k \in \mathbb{N}$: [6] [7]

$$\boldsymbol{Q}_h = \{\boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega) \text{ tel que } \boldsymbol{q}_{h|T_\ell} \in \boldsymbol{P}^k(T_\ell) + P^k(T_\ell)\boldsymbol{x},\ \forall \ell = 1, L\}. \tag{3.25}$$

Nous détaillons ci-dessous pour les éléments finis de Raviart-Thomas d'ordre $k=0$. Notons que, si $\mathtt{d}=2$, dans tout triangle T_ℓ de $\mathcal{T}_h$ il y a 3 arêtes, et que, si $\mathtt{d}=3$, dans tout tétraèdre T_ℓ de $\mathcal{T}_h$ il y a 4 faces. Or $\dim(\boldsymbol{P}^0(T_\ell)+P^0(T_\ell)\boldsymbol{x}) = \mathtt{d}+1$! Intuitivement, il semble raisonnable de considérer un degré de liberté par arête si $\mathtt{d}=2$, par face si $\mathtt{d}=3$: on peut directement vérifier par le calcul que cette définition est possible. Globalement, on note $(a_i)_{i=1,A}$ les arêtes du maillage $\mathcal{T}_h$ (si $\mathtt{d}=2$) ; $(f_i)_{i=1,F}$ les faces du maillage $\mathcal{T}_h$ (si $\mathtt{d}=3$). Dans ce cas, les *degrés de liberté* associés, c'est-à-dire les quantités caractérisant $\boldsymbol{q}_h$, sont les quantités :

$$\left\{\begin{array}{ll} \left(\displaystyle\int_{a_i} \boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{n}_a \, dl\right)_{i=1,A} & \text{si } \mathtt{d}=2\,; \\ \left(\displaystyle\int_{f_i} \boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{n}_f \, dS\right)_{i=1,F} & \text{si } \mathtt{d}=3. \end{array}\right. \tag{3.26}$$

Observons que ce ne sont plus des valeurs ponctuelles, mais des moments.
On peut construire une base de $\boldsymbol{Q}_h$ avec, pour chaque arête interne (si $\mathtt{d}=2$), ou pour chaque face interne (si $\mathtt{d}=3$), commune à deux simplexes T et T', une fonction de base associée, de support égal à $T\cup T'$, dont le degré de liberté vaut 1 sur ladite arête, ou face, et 0 ailleurs. Et pour chaque arête de la frontière (si $\mathtt{d}=2$), ou pour chaque face de la frontière (si $\mathtt{d}=3$), appartenant à un simplexe T, une fonction de base associée, de support égal à T, dont le degré

travers de l'interface Σ est égal à

$$[g]_\Sigma := g_{|\partial T'} - g_{|\partial T},$$

avec par convention un vecteur unitaire normal $\boldsymbol{n}_\Sigma$ dirigé de T vers T'.

6. Lorsque $k=0$, on a aussi $\boldsymbol{P}^0(T)+P^0(T)\boldsymbol{x} = \{q \in \boldsymbol{P}(T) \text{ tel que } q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + b\,\boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in T\}$.
7. Par construction, on observe que :
   - Si $\mathtt{d}=2$: alors, pour tout h, pour tout $T_\ell \in \mathcal{T}_h$, pour toutes les arêtes $(a_\alpha)_{\alpha=1,3}$ de ∂T_ℓ, et pour tout $\boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{Q}_h$, on a $\boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{n}_{|a_\alpha} \in P^k(a_\alpha)$;
   - Si $\mathtt{d}=3$: alors, pour tout h, pour tout $T_\ell \in \mathcal{T}_h$, pour toutes les faces $(f_\alpha)_{\alpha=1,4}$ de ∂T_ℓ, et pour tout $\boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{Q}_h$, on a $\boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{n}_{|f_\alpha} \in P^k(f_\alpha)$.

de liberté vaut 1 sur ladite arête, ou face, et 0 ailleurs.

Pour les éléments finis de Raviart-Thomas d'ordre $k \geq 1$. Le processus de construction est similaire, nous renvoyons au chapitre 2 de [2]. Notons qu'on doit définir des degrés de liberté supplémentaires, toujours de type moment, avec notamment des intégrales sur les simplexes (et des fonctions de bases associées dont le support est égal à ce simplexe).

Etape 2 : définition de $M_h \subset L^2(\Omega)$. Le point de départ est la définition de l'espace discret $\boldsymbol{Q}_h$ par (3.25). On observe que, pour tout $\boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{Q}_h$, on a d'une part $\mathrm{div}\, \boldsymbol{q}_h \in L^2(\Omega)$, et de plus, pour tout $T_\ell \in \mathcal{T}_h$, on a $\mathrm{div}\, \boldsymbol{q}_{h|T_\ell} \in P^k(T_\ell)$. Ceci suggère de définir

$$M_h = \{v_h \in L^2(\Omega) \text{ tel que } v_{h|T_\ell} \in P^k(T_\ell),\ \forall \ell = 1, L\}. \tag{3.27}$$

De cette façon, on a $\mathrm{div}\, \boldsymbol{Q}_h \subset M_h$. *L'intérêt de la définition de M_h à partir de celle de $\boldsymbol{Q}_h$ est qu'on va pouvoir directement transposer la démonstration de la condition inf-sup de la diffusion à deux inconnues (cf. §2.3.3) au cas discret.*
Pour cela, pour $(v_h, \boldsymbol{q}_h) \in M_h \times \boldsymbol{Q}_h$ non-nul, nous allons chercher $(w_h^\star, \boldsymbol{r}_h^\star) \in M_h \times \boldsymbol{Q}_h$ tel que

$$|a((v_h, \boldsymbol{q}_h), (w_h^\star, \boldsymbol{r}_h^\star))| \geq \alpha_\dagger \|(v_h, \boldsymbol{q}_h)\|_V \, \|(w_h^\star, \boldsymbol{r}_h^\star)\|_V,$$

avec une constante $\alpha_\dagger > 0$ indépendante de $(v_h, \boldsymbol{q}_h)$. En s'inspirant des calculs du §2.3.3, on choisit $(w_h^\star, \boldsymbol{r}_h^\star) = (\frac{1}{2}(v_h + \sigma^{-1}\mathrm{div}\, \boldsymbol{q}_h), -\boldsymbol{q}_h)$. Par construction, et puisque par hypothèse σ^{-1} est constant par morceaux, on a, pour tout $T_\ell \in \mathcal{T}_h$, $\sigma^{-1}\mathrm{div}\, \boldsymbol{q}_{h|T_\ell} \in P^k(T_\ell)$, et ainsi $w_h^\star \in M_h$. En reprenant exactement les calculs du §2.3.3, avec des indices $_h$ en plus, on trouve que

$$a((v_h, \boldsymbol{q}_h), (w_h^\star, \boldsymbol{r}_h^\star)) \geq \frac{\min\left(D_{min}^{-1}, \frac{1}{2}(\sigma_{max})^{-1}, \frac{1}{2}\sigma_{min}\right)}{\left(\frac{1}{2}(\sigma_{min})^{-2} + 1\right)^{1/2}} \|(v_h, \boldsymbol{q}_h)\|_V \, \|(w_h^\star, \boldsymbol{r}_h^\star)\|_V,$$

ce qui est le résultat cherché.

Avant de conclure à la convergence de l'erreur vers 0 dans $L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,; \Omega)$, on note que la propriété d'approximabilité (3.9) est obtenue :
— pour $(M_h)_h$ dans $L^2(\Omega)$, grâce aux opérateurs d'interpolation $(\pi_h)_h$ définis en (3.21), avec $V^\star = \mathcal{D}(\Omega)$, où la convergence en norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ est une conséquence de celle déjà énoncée au §3.4.1 ;
— pour $(\boldsymbol{Q}_h)_h$ dans $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,; \Omega)$, grâce à un opérateur d'interpolation avec $V^\star = \boldsymbol{C}^\infty(\overline{\Omega})$, nous renvoyons p. 110 de [2].

D'après le théorème 3.15, la convergence suit :

$$\lim_{h \to 0} \left(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_h\|_{\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)}\right) = 0.$$

Concernant la vitesse de convergence, on a le résultat suivant, que nous admettons.

Proposition 3.21 *Supposons que la solution* $(u, \boldsymbol{p})$ *est de régularité* $H^1 \times \boldsymbol{H}^1$ *"par morceaux", alors si on utilise les éléments finis de Raviart-Thomas d'ordre* $k \geq 0$ *sur une famille régulière de maillages qui respectent la partition, il existe une constante* $C > 0$ *indépendante de* h *telle que*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_h\|_{\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)} \leq C\, h.$$

Si la solution est plus régulière, la vitesse de convergence est meilleure, si bien sûr on augmente l'ordre de l'élément fini de façon adéquate (voir à nouveau p. 110 de [2]).

Remarque 3.22 *Pour la discrétisation par éléments finis de Raviart-Thomas, nous donnons quelques détails pour réaliser les calculs élémentaires (intégrations sur les simplexes du maillage), en reprenant les notations de la remarque 3.16. Pour un simplexe* T_ℓ*, si on effectue le changement de variables* $F_\ell\ :\ \hat{T} \to T_\ell$ *avec* $\boldsymbol{x} = F_\ell(\hat{\boldsymbol{x}}) = \mathbb{A}_\ell \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}_\ell$*, alors, à une fonction vectorielle* $\hat{\boldsymbol{q}}$ *définie sur* $\hat{T}$*, on associe* $\boldsymbol{q}$ *définie sur* T_ℓ *telle que :*

$$\forall \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{T}, \quad \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|det(\mathbb{A}_\ell)|} \mathbb{A}_\ell \hat{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{x}}), \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|det(\mathbb{A}_\ell)|} \hat{\mathrm{div}}\, \hat{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{x}}).$$

C'est la transformation de Piola*, utilisée pour transformer des éléments de* $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$ *(voir par ex. p. 59 de [2]). Pour les éléments de* M_h*, on procède comme pour les éléments finis de Lagrange, cf. la remarque 3.16. Le choix de la transformation de Piola pour les éléments de* $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$ *peut-être "justifié" via les changements de variables dans les intégrales, mettant en jeu des éléments de* $\boldsymbol{Q}_h$ *et* M_h *:*

$$\begin{aligned}
\int_{T_\ell} v_h(\boldsymbol{x}) \mathrm{div}\, \boldsymbol{q}_h(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int_{\hat{T}} \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}) \frac{1}{|det(\mathbb{A}_\ell)|} \hat{\mathrm{div}}\, \hat{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{x}})\, |det(\mathbb{A}_\ell)| d\hat{\boldsymbol{x}} = \int_{\hat{T}} \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}) \hat{\mathrm{div}}\, \hat{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{x}})\, d\hat{\boldsymbol{x}},\\
\int_{T_\ell} \nabla v_h(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{q}_h(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int_{\hat{T}} (\mathbb{A}_\ell^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}) \cdot \frac{1}{|det(\mathbb{A}_\ell)|} \mathbb{A}_\ell \hat{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{x}})\, |det(\mathbb{A}_\ell)| d\hat{\boldsymbol{x}} = \int_{\hat{T}} \hat{\nabla} \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{x}})\, d\hat{\boldsymbol{x}}.
\end{aligned}$$

On peut également montrer que :

$$\int_{\partial T_\ell} v_h(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{q}_h(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\Gamma_{\boldsymbol{x}} = \int_{\partial \hat{T}} \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}) \hat{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, d\Gamma_{\hat{\boldsymbol{x}}}.$$

Remarque 3.23 *En suivant le formalisme du lemme 3.1, on peut montrer, mais c'est un peu fastidieux, que la matrice associée à la formulation variationnelle discrète (3.23) est creuse.*

3.4.3 Comparaison des discrétisations

Donnons quelques éléments de comparaison entre la discrétisation u_h^L par élément fini de Lagrange d'ordre 1 (utilisée pour la diffusion à une inconnue), et la discrétisation $(u_h^{RT}, \boldsymbol{p}_h)$ par élément fini de Raviart-Thomas d'ordre 0 (utilisée pour la diffusion à deux inconnues), en supposant que la solution u est H^2 "par morceaux", et que $\boldsymbol{p} = -\mathbb{D}\nabla u$ est $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ "par morceaux" :

— D'après la proposition 3.18 et son corollaire 3.19, on a

$$\|u - u_h^L\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h, \quad \|u - u_h^L\|_{L^2(\Omega)} \leq C\, h^2.$$

— D'après la proposition 3.21, on a

$$\|u - u_h^{RT}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\, h, \quad \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_h\|_{\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)} \leq C\, h.$$

En général $u_h^L \neq u_h^{RT}$: en effet, u_h^L est un champ continu par définition, ce qui n'est pas le cas de u_h^{RT}. L'approximation est *a priori* meilleure pour u_h^L que pour u_h^{RT} en norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$; elle est du même ordre en norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ où, pour l'approximation par élément fini de Raviart-Thomas, on passe par la convergence en norme $\|\cdot\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$ de $\nabla u = -\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{p}$...

Bibliographie

[1] **R.A. Adams, J.J.F. Fournier**, *Sobolev spaces. Second edition*, Academic Press, New York (2003).

[2] **D. Boffi, F. Brezzi, M. Fortin**, *Mixed and hybrid finite element methods and applications*, Springer-Verlag (2013).

[3] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris (1983). *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer (2011).

[4] **J. Bussac, P. Reuss**, *Traité de neutronique*, Hermann, Paris (1985).

[5] **P. Ciarlet Jr., E. Jamelot, F. Kpadonou**, Domain decomposition methods for the diffusion equation with low-regularity solution, *Computers Math. Applic.*, **74**, p. 2369–2384 (2017).

[6] **P. Ciarlet Jr., E. Lunéville**, *La méthode des éléments finis : aspects fondamentaux, de la théorie à la pratique*, Editions ISTE (à paraître).

[7] **V. Girault, P.-A. Raviart**, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer Series in Computational Mathematics, **5**, Springer Verlag, Berlin (1986).

[8] **P. Grisvard**, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, 24, Pitman, London (1985).

Index