AMS 303 2020 - 2021

Examen - 16 Novembre 2020 - 3h

Exercice 1 : Problème avec changement de signe

Soit Ω l'ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$ défini comme suit :

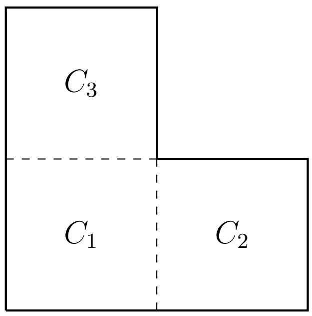
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 2 \text{ et } 0 < y < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1 \text{ et } 1 \leq y < 2\}.$$

On introduit également les 3 carrés suivants :

$$C_1 =]0,1[\times]0,1[,\ C_2 =]1,2[\times]0,1[,\ C_3 =]0,1[\times]1,2[,$$

de sorte que comme indiqué sur la figure, $\overline{\Omega} = \overline{C_1 \cup C_2 \cup C_3}$. On pourra noter Σ_2 et Σ_3 les deux segments indiqués en ligne pointillée :

$$\Sigma_2 = \{1\}\times]0,1[,\ \Sigma_3 =]0,1[\times\{1\}.$$



Etant données 3 valeurs réelles $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et $\sigma_3 < 0$, on note σ la fonction définie presque partout dans Ω par $\sigma(x,y) = \sigma_j$ dans C_j, pour $j = 1,2,3$.

Enfin, on considère la forme bilinéaire suivante définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Pour une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$, on notera u_j sa restriction à C_j.

1. On considère l'opérateur $\mathtt{T}$ suivant : pour $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\mathtt{T}u = \left\{ \begin{array}{ccc} u_1 - 2S_3u_3 & \text{dans} & C_1, \\ u_2 & \text{dans} & C_2, \\ -u_3 & \text{dans} & C_3 \end{array} \right.$$

où $S_3u(x,y) = u(x, 2-y)$.

Montrer que $\mathtt{T}u \in H_0^1(\Omega)$ (on calculera en particulier $S_3 u_3$ sur Σ_2 et Σ_3) et que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est T-coercive sur $H_0^1(\Omega)$ si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} > -1. \tag{1}$$

2. On considère maintenant l'opérateur T′ suivant : pour $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\mathtt{T}'u = \left\{ \begin{array}{cl} u_1 & \text{dans } \; C_1, \\ u_2 & \text{dans } \; C_2, \\ -u_3 + 2S_3u_1 - 2S_3S_2u_2 & \text{dans } \; C_3 \end{array} \right.$$

où $S_2 u(x,y) = u(2-x,y)$.

Expliquer seulement pourquoi le terme $-2S_3S_2u_2$ est nécessaire pour assurer que $\mathtt{T}'u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer ensuite que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est T-coercive sur $H_0^1(\Omega)$ si la condition suivante est vérifiée :

$$\max\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) < -2. \tag{2}$$

3. En déduire que dans le cas $\sigma_1 = \sigma_2$, le problème suivant, où $f \in L^2(\Omega)$,

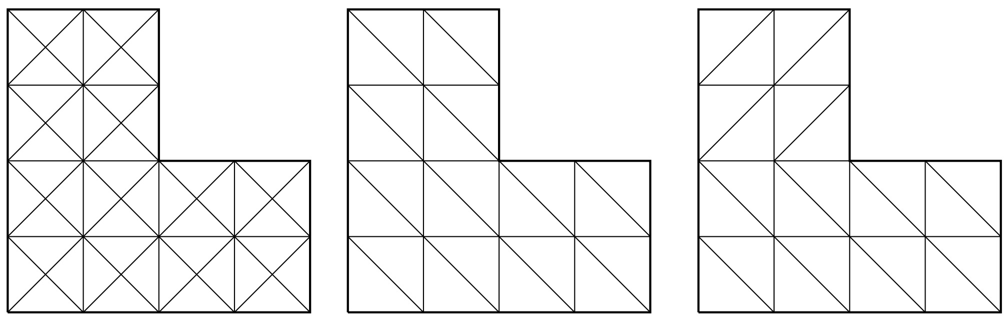
$$(P) \quad \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } -\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = f \text{ dans } \Omega,$$

est bien posé si le contraste $\kappa = \sigma_1/\sigma_3$ n'appartient pas à l'intervalle $[-2,-1]$.

4. On veut résoudre le problème (P) par éléments finis. Expliquer parmi les maillages suivants ceux que vous choisiriez d'utiliser dans les deux cas suivants :

Cas 1 : $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ et $\sigma_3 = -2$

Cas 2 : $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$ et $\sigma_3 = -1$



Maillage A Maillage B Maillage C

Exercice 2 : Problème T-coercif + compact

On se place dans V un espace de Hilbert, de produit scalaire hermitien $(\cdot,\cdot)_V$. On note $\|\cdot\|_V$ la norme associée. Soient $b(\cdot,\cdot)$, $c(\cdot,\cdot)$ deux forme sesquilinéaires et continues sur V, telles que :

— $b(\cdot,\cdot)$ est $\mathtt{T}$-*coercive* ;

— $c(\cdot,\cdot)$ est une *perturbation compacte* : $\mathtt{C} \in \mathcal{L}(V)$ associée à $c(\cdot,\cdot)$ et définie par

$$\forall v, w \in V, \quad (\mathtt{C}v, w)_V = c(v, w),$$

est compacte. On rappelle que si $\mathtt{C}$ est compacte alors, pour toute suite $(v_k)_k$ de V qui tend faiblement vers 0, c'est-à-dire que

$$\forall w \in V,\ \lim_{k\to\infty} (v_k, w)_V = 0,$$

on a $(\mathtt{C}v_k)_k$ qui tend (fortement) vers 0 : $\lim_{k\to\infty} \|\mathtt{C}v_k\|_V = 0$.

On note $a = b + c$. Pour $\ell \in V'$ donné, on étudie la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \qquad \forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle \ell, v\rangle_V. \tag{3}$$

0. Donner un exemple d'une telle situation.

Dans la suite, on suppose que (3) est *bien posée*.

1. Que peut-on en déduire sur $\mathtt{A} \in \mathcal{L}(V)$ associée à $a(\cdot,\cdot)$ et définie par

$$\forall v, w \in V, \quad (\mathtt{A}v, w)_V = a(v, w) \ ?$$

Soit $(V_h)_h$ une famille de sous-espaces vectoriels de dimension finie de V indexés par $h > 0$, vérifiant la propriété d'approximabilité

$$\forall v \in V, \quad \lim_{h\to 0} \left(\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V \right) = 0. \tag{4}$$

$\mathtt{T}$-*coercivité discrète* de la forme $b(\cdot,\cdot)$: on suppose que

$$\exists \alpha^\star, \beta^\star > 0,\ \forall h > 0,\ \exists \mathtt{T}_h \in \mathcal{L}(V_h),\ |||\mathtt{T}_h||| \le \beta^\star \text{ et } \forall v_h \in V_h,\ |b(v_h, \mathtt{T}_h v_h)| \ge \alpha^\star \|v_h\|_V^2. \tag{5}$$

Le but de cet exercice est de démontrer que la forme $a(\cdot,\cdot)$ vérifie une condition inf-sup discrète uniforme :

$$\exists \alpha_\dagger > 0,\ \exists h_\dagger > 0,\ \forall h \in]0, h_\dagger[,\ \forall v_h \in V_h, \sup_{w_h \in V_h\setminus\{0\}} \frac{|a(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_V} \ge \alpha_\dagger \|v_h\|_V. \tag{6}$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde.

2. Montrer que si (6) est fausse, alors il existe une sous-suite $(V_{h_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $(V_h)_h$ avec $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$, il existe une suite $(\mu_{h_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs de limite 0, telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists v_{h_k}^0 \in V_{h_k}, \quad \|v_{h_k}^0\|_V = 1 \text{ et } \sup_{w_h \in V_h\setminus\{0\}} \frac{|a(v_{h_k}^0, w_h)|}{\|w_h\|_V} \le \mu_{h_k}. \tag{7}$$

Dans la suite, on écrit (7) avec $(V_h)_h$, $(\mu_h)_h$ et $(v_h^0)_h$ afin d'alléger les notations.

3a. Montrer que

$$\forall w \in V,\ \forall h,\ \forall w_h \in V_h, \quad |a(v_h^0, w)| \leq |||\mathtt{A}|||\ \|w - w_h\|_V + \mu_h\ \|w_h\|_V.$$

3b. En déduire que

$$\forall w \in V,\ \lim_{h\to 0} a(v_h^0, w) = 0.$$

On rappelle que si $\mathtt{F} \in \mathcal{L}(V)$, alors son adjoint $\mathtt{F}^*$ défini par

$$\forall v, w \in V, \quad (\mathtt{F}v, w)_V = (v, \mathtt{F}^* w)_V$$

appartient également à $\mathcal{L}(V)$.

4. Montrer que la suite $(v_h^0)_h$ tend faiblement vers 0 dans V :

$$\forall w \in V,\ \lim_{h\to 0} (v_h^0, w)_V = 0.$$

5. Montrer que

$$\forall h, \quad |b(v_h^0, \mathtt{T}_h v_h^0)| \leq \big(\mu_h + \|\mathtt{C} v_h^0\|_V\big)\ \|\mathtt{T}_h v_h^0\|_V.$$

Conclure qu'on aboutit à une contradiction, en utilisant la $\mathtt{T}$-coercivité discrète (5) de la forme $b(\cdot,\cdot)$.

6. En reprenant l'exemple que vous avez proposé à la question **0**, dans quelle condition peut-on affirmer que (6) est vérifiée ?