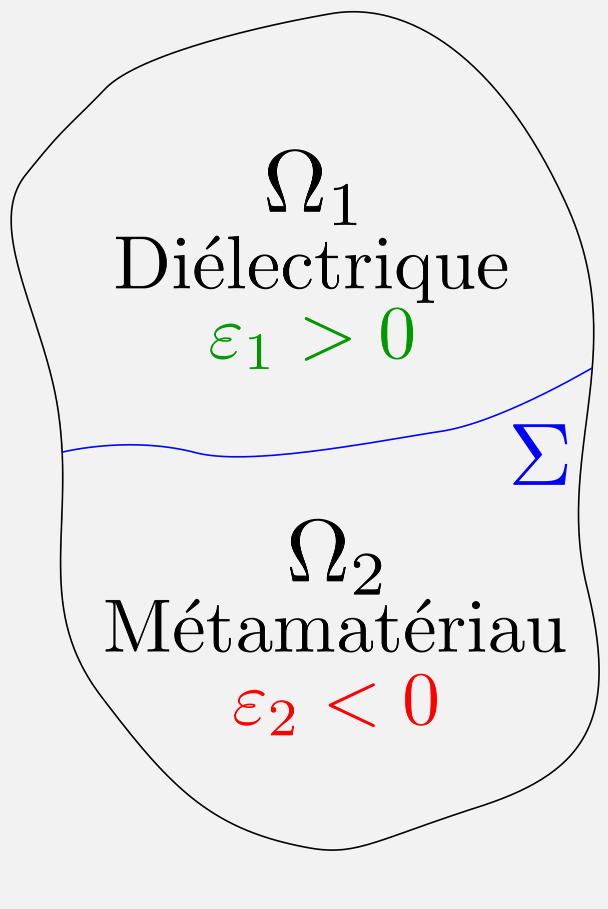
Problèmes de propagation d'ondes dans un milieu diélectrique/métamatériau - Aspects mathématiques

L. Chesnel avec A.S. Bonnet-Ben Dhia et P. Ciarlet Jr.
POEMS, UMR 7231 CNRS-ENSTA-INRIA, École Polytechnique, Paris

Problème modèle étudié

► Problème d'électromagnétisme en régime harmonique dans un milieu hétérogène Ω. La difficulté est concentrée dans le cas de l'électrostatique.



► Définissons l'espace des champs d'énergie finie :

$$H = \{v \in L^2(\Omega) \,|\, \int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\Omega < \infty;\ v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{|l} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que :} \\ -\mathrm{div}(\varepsilon \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array}$$

► $(\mathcal{P})$ est équivalent au problème variationnel :

$$(\mathcal{P}_V) \quad \begin{array}{|l} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega \ , \forall v \in H. \end{array}$$

Difficultés :

- Perte de positivité : il n'existe pas de constante C telle que
$$\int_\Omega \varepsilon |\nabla u|^2 \, d\Omega > C \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega, \ \forall u \in H.$$
- Mettre un peu de dissipation (modélisée par η) ne suffit pas :
$$|\int_\Omega \varepsilon^\eta |\nabla u^\eta|^2 \, d\Omega| > \frac{C}{\eta} \int_\Omega |\nabla u^\eta|^2 \, d\Omega.$$

Questions :

▷ Le problème $(\mathcal{P})$ est-il bien posé ?
▷ Comment calculer une approximation numérique de la solution ?
▷ Nouvelle modélisation lorsque $(\mathcal{P})$ est mal posé ?

La méthode de la T-coercivité

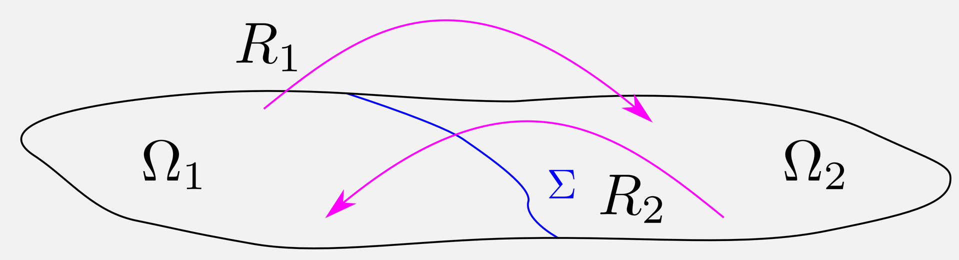
① Considérons $T_1 u = \begin{array}{|ll} u_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 + 2R_1 u_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{array}$, où R_1 est tel que $T_1 u \in H$.

② $\displaystyle\int_\Omega \varepsilon \nabla u \cdot \nabla(T_1 u) \, d\Omega \geq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega$ pour $\varepsilon_1 \geq \|R_1\|^2 |\varepsilon_2|$.

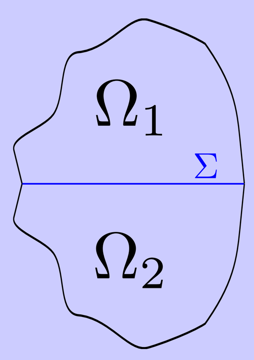
③ Puisque $T_1 u$ décrit H lorsque u décrit H (remarquer que $T_1^{-1} = T_1$), $(\mathcal{P}_V)$, et donc $(\mathcal{P})$, possède une unique solution lorsque $\varepsilon_1 \geq \|R_1\|^2 |\varepsilon_2|$.

④ On procède de même avec T_2 construit à partir de $R_2 : \Omega_2 \to \Omega_1$.

Théorème. Si le contraste $\kappa_\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1 \notin I_\Sigma = [-\|R_2\|^2; -1/\|R_1\|^2]$ (intervalle critique) alors le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution dépendant continûment de f.

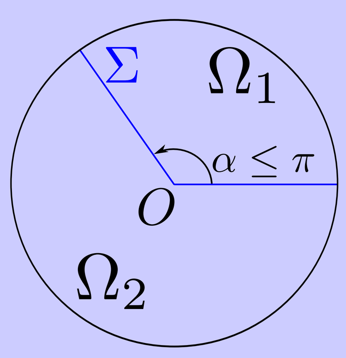


► Assure la convergence de la méthode des éléments finis.
► Idée exploitable pour étudier le problème de Maxwell.



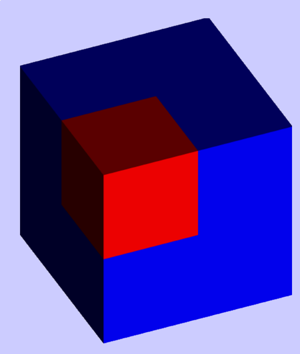
Ouvert symétrique

$R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$ (symétrie).
$I_\Sigma = \{-1\}$.



Coin interface 2D

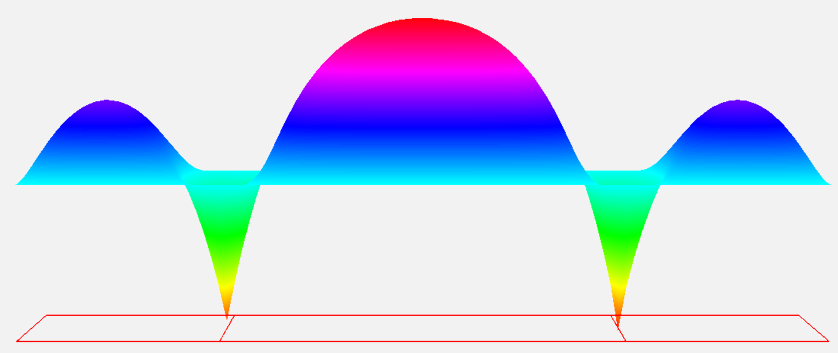
R_1 et R_2 obtenus à partir de symétrie/dilatation en θ.
$I_\Sigma = [-\frac{2\pi-\alpha}{\alpha}; -\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}]$.

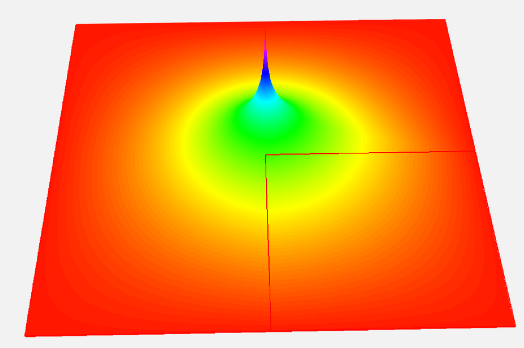


Cube de Fichera

R_1 et R_2 obtenus à partir des symétries S_{Ox}, S_{Oy}, S_{Oz}.
$I_\Sigma = [-7; -1/7]$.

► Si Σ est régulière, $(\mathcal{P})$ est bien posé pour $\kappa_\varepsilon \neq -1$.
► Si Σ présente un coin, $(\mathcal{P})$ est bien posé pour $\kappa_\varepsilon \notin I_\Sigma$ (intervalle ouvert). Néanmoins, on observe un champ de forte intensité au voisinage du coin.
⇒ Que se passe-t-il dans l'intervalle critique I_Σ ?



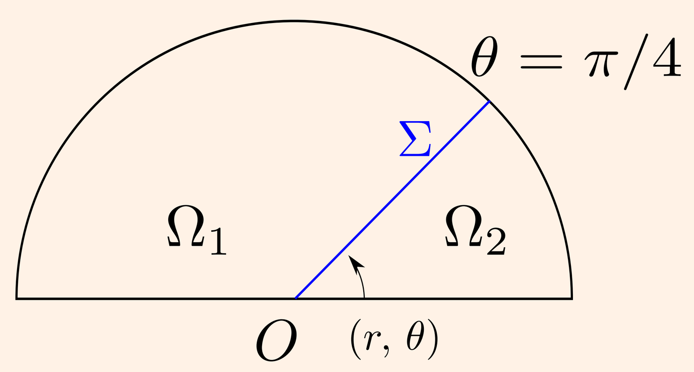


Un phénomène de trou noir

Problème de singularité

Équation de Helmholtz dans le secteur borné Ω

$$-\mathrm{div}(\varepsilon \nabla u) = -r^{-2}(\varepsilon (r\partial_r)^2 + \partial_\theta \varepsilon \partial_\theta) u = f.$$



$$(z, \theta) = (-\ln r, \theta)$$

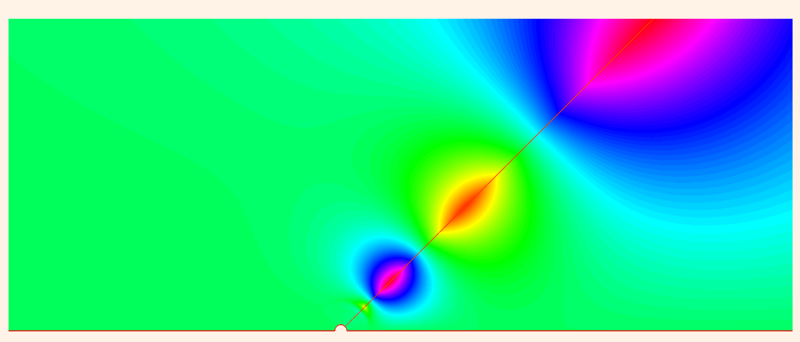
$$(r, \theta) = (e^{-z}, \theta)$$

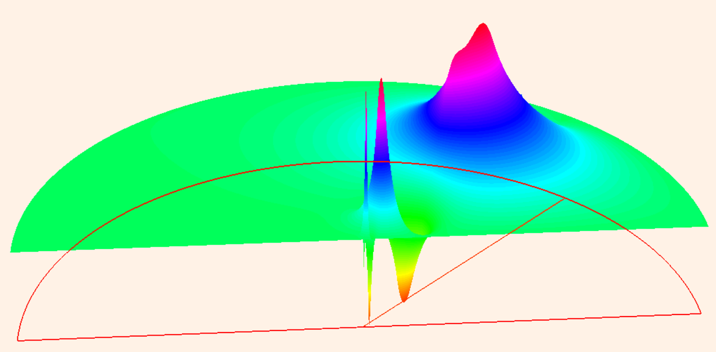
► Pour $\kappa_\varepsilon \in]-1; -1/3[$, apparition de singularités propagatives :

$$s_1^{\mp}(r, \theta) = \varphi_1(\theta) e^{\mp i\eta \ln r} \text{ où } \eta \text{ est un réel qui dépend de } \kappa_\varepsilon.$$

► Condition de radiation en O pour sélectionner la bonne singularité.

► Utilisation de PMLs en O pour approcher la solution qui n'est pas d'énergie finie.

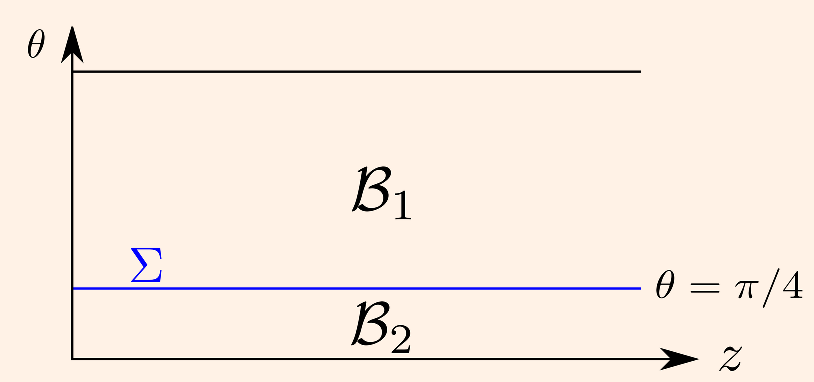




Problème de guide d'ondes

Équation de Helmholtz dans la bande $\mathcal{B}$

$$-\mathrm{div}(\varepsilon \nabla u) = -(\varepsilon \partial_z^2 + \partial_\theta \varepsilon \partial_\theta) u = e^{-2z} f.$$



► Pour $\kappa_\varepsilon \in]-1; -1/3[$, apparition de modes propagatifs :

$$m_1^{\pm}(z, \theta) = \varphi_1(\theta) e^{\pm i\eta z} \text{ où } \eta \text{ est un réel qui dépend de } \kappa_\varepsilon.$$

► Condition de radiation en $+\infty$ pour sélectionner le mode sortant.

► Utilisation de PMLs en $+\infty$ pour tronquer le domaine de calcul et résoudre par éléments finis.