

Aidons les poissons à déjouer les sonars

Sujet proposé par Lucas Chesnel
 Lucas.Chesnel@cmap.polytechnique.fr¹

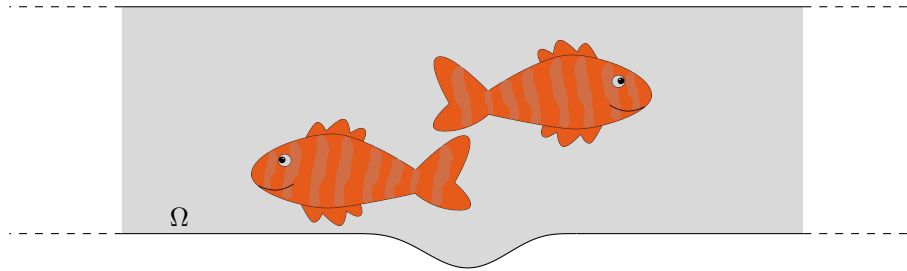


FIGURE 1 – Guide d’ondes comportant un défaut.

Dans ce projet, nous nous intéressons à la propagation d’ondes acoustiques dans un conduit Ω (voir Figure 1), gouvernée par l’équation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = F.$$

Ici, U correspond à la pression acoustique, c est la célérité des ondes égale à un dans la suite et F désigne un terme source. Nous supposons que Ω coïncide avec le guide de référence $\Omega_0 = \{z = (x, y) \in \mathbb{R} \times]0; 1[\}$ à l’extérieur d’un domaine borné. Nous supposons en outre que Ω est connexe. Notre objectif est de trouver des domaines Ω tels que les ondes se propagent dans Ω comme s’il n’y avait pas de perturbation de la géométrie. Par exemple, nous souhaitons aider les poissons de la Figure 1, considérer comme des obstacles non pénétrables, à se positionner de sorte qu’ils soient invisibles à un observateur générant des ondes incidentes et mesurant le champ diffracté résultant.

Lorsque F est de la forme $F(z, t) = \Re e(f(z)e^{-i\omega t})$ avec ω fixé, on peut chercher U sous la forme $U(z, t) = \Re e(u(z)e^{-i\omega t})$ (régime harmonique en temps). Nous ferons l’hypothèse que les parois du guide sont rigides, ce qui nous conduit à étudier le problème avec condition de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u - \omega^2 u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où n désigne la normale unité à $\partial\Omega$ orientée vers l’extérieur de Ω .

1 Problème de diffraction dans un guide d’ondes

Pour compléter le problème (1), il est nécessaire de prescrire des conditions sur le comportement de la solution u en $x = \pm\infty$, comme si l’on imposait des conditions aux limites à l’infini.

Question 1. Supposons $\omega \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, et travaillons d’abord dans le guide de référence Ω_0 . Montrer qu’à un facteur multiplicatif près, les solutions de (1) dans Ω_0 de la forme $v(x, y) = \alpha(x)\varphi(y)$ (à variables séparées) sont égales à

$$v_n^\pm(x, y) = \begin{cases} e^{\pm i\sqrt{\omega^2 - (n\pi)^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } n \in \mathbb{N}, n < \omega/\pi \\ e^{\mp \sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } n \in \mathbb{N}, n > \omega/\pi. \end{cases}$$

1. Si vous avez des questions n’hésitez pas à me contacter ou à passer au bureau 3.0.08 du CMAP.

Revenons à la situation $\Omega \neq \Omega_0$. Nous ferons l'hypothèse que Ω coïncide avec Ω_0 pour $|x| \geq L$, $L > 0$ étant une constante donnée. De plus, nous supposons $0 < \omega < \pi$. Dans ce cas, $v_0^+ = e^{i\omega x}$ (resp. $v_0^- = e^{-i\omega x}$) est une onde se propageant de $-\infty$ (resp. $+\infty$) vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)². Nous nous intéresserons au problème de diffraction de l'onde *incidente* $u_i := e^{i\omega x}$ par la géométrie Ω . Nous accepterons le fait que toute solution de (1) se décompose sur les v_n^\pm pour $|x| > L$. En outre, nous prescrirons le comportement de u en $x = \pm\infty$, en imposant au champ *diffraqué*³ $u_s = u - u_i$ d'être sortant, autrement dit de se décomposer uniquement sur les v_n^\pm pour $\pm x > L$. Finalement, cela nous amène à étudier le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \Delta u + \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\text{avec } u_s = u - u_i = \begin{cases} s^- e^{-i\omega x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^- e^{+\sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } x < -L \\ s^+ e^{+i\omega x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^+ e^{-\sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } x > L, \end{cases}$$

où s^\pm , α_n^\pm sont des constantes de \mathbb{C} . Ici $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions qui appartiennent à $H^1(D)$ pour tout domaine borné $D \subset \Omega$. Dans la littérature, on appelle *coefficient de réflexion* et *coefficient de transmission* les quantités $R = s^-$, $T = 1 + s^+$.

Le caractère non borné du domaine Ω ne permet pas d'appliquer directement les méthodes vues en cours pour étudier (2). Dans la suite, nous allons formuler un problème pour $u|_{\Omega_L}$ avec $\Omega_L := \{(x, y) \in \Omega \mid |x| < L\}$. Pour cela, il faut déterminer des conditions aux limites bien choisies sur Σ_L .

Question 2. Montrer que si u_s admet la décomposition ci-dessus, alors on a $\partial_n u_s = T^\pm u_s$ sur $\{\pm L\} \times]0; 1[$ où T^\pm désignent les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann définis par

$$T^\pm u_s = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_{\{\pm L\} \times]0; 1[} u_s(z) \cos(n\pi y) d\sigma \cos(n\pi y) \quad \text{avec } \beta_n = \begin{cases} i\omega & \text{pour } n = 0 \\ -2\sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} & \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Question 3. Établir que si u vérifie (2) alors $u|_{\Omega_L}$ est solution d'un problème variationnel

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } w \in H^1(\Omega_L) \text{ tel que} \\ a(w, w') = g(w'), \quad \text{pour tout } w' \in H^1(\Omega_L). \end{array} \right. \quad (3)$$

On donnera l'expression des formes a et g . Réciproquement, montrer que si w vérifie (3) alors w se prolonge en une solution de (2).

Question 4. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné $A : H^1(\Omega_L) \rightarrow H^1(\Omega_L)$ tel que $(A\varphi, \varphi')_{H^1(\Omega_L)} = a(\varphi, \varphi')$ pour tout $\varphi, \varphi' \in H^1(\Omega_L)$. Montrer que A se décompose sous la forme $A = \mathcal{S} + K$, où $\mathcal{S} : H^1(\Omega_L) \rightarrow H^1(\Omega_L)$ est un isomorphisme et $K : H^1(\Omega_L) \rightarrow H^1(\Omega_L)$ un opérateur compact. (*On pourra utiliser le lemme de Rellich et les indications fournies en annexe.*)

Avec l'alternative de Fredholm, ce résultat permet de prouver que A est à image fermée et que $\text{Im } A = (\ker A^*)^\perp$ où A^* désigne l'adjoint de A . On peut par ailleurs établir que $\ker A^* = \ker A$ ce qui implique que (3) possède une unique solution dès lors que A est injectif (comme en dimension finie).

Question 5. En multipliant par \bar{u} l'équation volumique de (2) et en intégrant par parties sur le domaine Ω_L , établir la relation

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (\text{conservation d'énergie}). \quad (4)$$

2. Pour comprendre cette phrase, il faut revenir en temps et étudier le comportement de $(z, t) \mapsto v_0^\pm(z)e^{-i\omega t}$.

3. « Diffraqué » se dit « scattered » en anglais, d'où l'indice s .

En effectuant le même calcul sur la différence de deux éventuelles solutions, prouver que R et T sont définis de manière unique. Montrer également que les éléments non nuls $w \in \ker A$ (s'ils existent) vérifient $\int_{\{\pm L\} \times]0;1[} w(z) d\sigma = 0$. En déduire que pour le g particulier que l'on a choisi dans (3), il existe toujours au moins une solution à (3), et donc à (2).

Question 6. Définissons $\Sigma_L = \{-L\} \times]0;1[\cup \{+L\} \times]0;1[$. Montrer que

$$2i\omega s^\pm = \int_{\Sigma_L} \frac{\partial u_s(z)}{\partial n} \overline{e^{\pm i\omega x}} - u_s(z) \overline{\frac{\partial e^{\pm i\omega x}}{\partial n}} d\sigma$$

où $\partial_n = \pm \partial_x$ en $x = \pm L$. Numériquement, ces formules permettront de calculer R et T à partir de u .

Dans la suite, notre objectif est de construire des géométries Ω telles que $R = 0$. Dans une telle situation, l'amplitude du champ diffracté par le guide est exponentiellement décroissante en $-\infty$ et pour un observateur situé en $x = -\infty$ produisant l'onde incidente $u_i = e^{i\omega x}$, tout se passe comme s'il n'y avait pas de perturbation. Nous étudierons deux approches. Pour la première, nous fournirons des éléments de justification théoriques. Pour la seconde, l'analyse sera avant tout numérique.

2 Invisibilité via l'utilisation de cavités

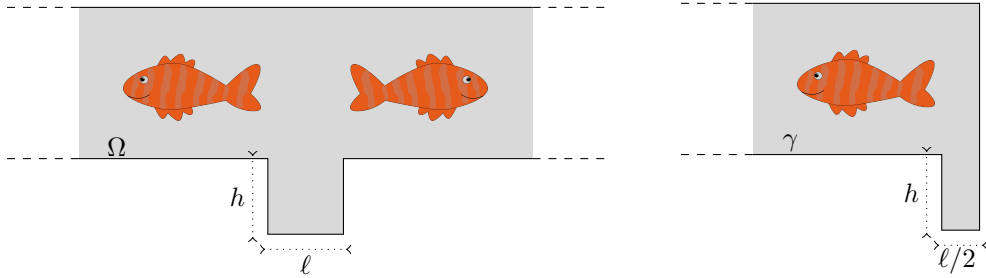


FIGURE 2 – Guide d'ondes symétrique Ω à gauche, demi-guide γ à droite.

Nous allons chercher une géométrie Ω qui est symétrique par rapport à l'axe (Oy) , autrement dit telle que $\Omega = \{(-x, y) \mid (x, y) \in \Omega\}$. Nous supposons en outre que Ω coïncide pour $y < 0$ avec le domaine $] -\ell/2; \ell/2[\times] -h; 0[$ pour $\ell > 0, h > 0$ donnés (voir Figure 2 à gauche). Nous allons utiliser la symétrie pour décomposer les solutions de (2) en composantes symétrique et antisymétrique par rapport à (Oy) . Définissons le demi-guide $\gamma := \{(x, y) \in \Omega \mid x < 0\}$ (voir Figure 2 à droite). Considérons les deux problèmes

$$(\mathcal{P}_N) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v \in H_{\text{loc}}^1(\gamma) \text{ tel que} \\ \Delta v + \omega^2 v = 0 \text{ dans } \gamma \\ \partial_n v = 0 \text{ sur } \partial\gamma \\ v - u_i \text{ sortant.} \end{array} \right. \quad (\mathcal{P}_D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } V \in H_{\text{loc}}^1(\gamma) \text{ tel que} \\ \Delta V + \omega^2 V = 0 \text{ dans } \gamma \\ \partial_n V = 0 \text{ sur } \partial\gamma \cap \partial\Omega \\ V = 0 \text{ sur } \partial\gamma \setminus \partial\Omega \\ V - u_i \text{ sortant.} \end{array} \right. \quad (5)$$

Dans (5), les expressions « $v - u_i$ sortant » et « $V - u_i$ sortant » signifient respectivement qu'on a les décompositions

$$v - u_i = R_N e^{-i\omega x} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{+\sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} x} \cos(n\pi y) \text{ pour } x < L$$

$$V - u_i = R_D e^{-i\omega x} + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n e^{+\sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} x} \cos(n\pi y) \text{ pour } x < L,$$

où R_N, R_D, A_n, B_n sont des constantes de \mathbb{C} . Comme pour (2), on peut prouver que $(\mathcal{P}_N), (\mathcal{P}_D)$ admettent toujours au moins une solution (existence) et que R_N, R_D sont définis de façon unique.

Question 7. Montrer que $|R_N| = |R_D| = 1$.

Question 8. Supposons que les problèmes (2), (\mathcal{P}_N) et (\mathcal{P}_D) admettent chacun une unique solution. Prouver que $u = (v + V)/2$ sur γ et $u(x, y) = (v(-x, y) - V(-x, y))/2$ sur $\Omega \setminus \bar{\gamma}$. En déduire les relations

$$R = \frac{R_N + R_D}{2} \quad \text{et} \quad T = \frac{R_N - R_D}{2}. \quad (6)$$

On admettra dans la suite que les relations (6) demeurent vraies lorsque (2), (\mathcal{P}_N) ou (\mathcal{P}_D) ne sont pas injectifs.

Les coefficients R, T, R_N et R_D dépendent de la géométrie, en particulier de ℓ et h .

Question 9. Supposons $\ell \in]0; \pi/k[$ fixé. On peut montrer que les applications $h \mapsto R_N, h \mapsto R_D$ sont continues de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{C} . Par ailleurs, en effectuant un développement asymptotique de ces quantités par rapport à $h \rightarrow +\infty$, on peut établir qu'il existe $R_D^\infty \in \mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ tel que $\lim_{h \rightarrow +\infty} R_D = R_D^\infty$. On peut établir également qu'il existe une fonction $R_N^\infty :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{S}$ de classe \mathcal{C}^∞ , π/k périodique surjective avec $dR_N^\infty/dh \neq 0$ pour tout $h > 0$ et telle que $\lim_{h \rightarrow +\infty} |R_N - R_N^\infty(h)| = 0$. Utiliser ces résultats pour prouver qu'il existe des valeurs de h pour lesquelles $R = 0$.

Question 10. Écrire un code de calcul *Freefem++* permettant d'approcher la solution du problème de diffraction (3). On utilisera la base donnée à la fin de ce document. Calculer numériquement les coefficients R, T et vérifier que la conservation d'énergie (4) est satisfaite (à une erreur d'approximation près). Dans un second temps, calculer les valeurs de R pour $h \in [0.5; 10]$ et identifier des géométries pour lesquelles $R = 0$. On pourra utiliser la portion de code fournie permettant d'écrire dans un fichier et tracer par exemple avec *Python* la courbe $h \mapsto -\ln |R(h)|$. Représenter également les courbes $h \mapsto R(h)$ et $h \mapsto T(h)$ dans le plan complexe. Commenter les résultats. On essaiera d'abord avec $\omega = 0.8\pi$ et $\ell = 1$, puis avec $\omega = 0.8\pi$ et $\ell = 2 > \pi/k$.

3 Invisibilité via l'utilisation de la résonance de Fano

La seconde idée que nous allons utiliser pour exhiber des géométries pour lesquelles $R = 0$ consiste à se servir de la résonance de Fano, un phénomène qui apparaît dans divers domaines de la physique. Pour fixer les idées, définissons le domaine $\Omega^\varepsilon = \Omega_0 \setminus \overline{B(M^\varepsilon, 0.4)}$ où $B(M^\varepsilon, 0.4)$ désigne la boule ouverte centrée en $M^\varepsilon = (0, 0.5 + \varepsilon)$ de rayon 0.4. Ici $\varepsilon \geq 0$ est un petit paramètre. Notons $R^\varepsilon, T^\varepsilon$ les coefficients de réflexion/transmission pour le problème (2) dans la géométrie Ω^ε . Le phénomène de résonance de Fano se traduit pour le problème que nous considérons ici par le fait que si l'opérateur A défini dans la question 4 possède un noyau non réduit à zéro pour $\omega = \omega_0 \in]0; \pi[$ et $\varepsilon = 0$ alors, pour $\varepsilon > 0$ petit, les fonctions $\omega \mapsto R^\varepsilon(\omega), \omega \mapsto T^\varepsilon(\omega)$ présentent une variation rapide dans un voisinage de ω_0 . De plus, si la géométrie est symétrique par rapport à l'axe (Oy) (ce qui est le cas avec notre choix), alors les courbes $\omega \mapsto R^\varepsilon(\omega)$ et $\omega \mapsto T^\varepsilon(\omega)$ passent exactement par zéro dans un voisinage de ω_0 .

Question 11. Résoudre le problème (3) avec *Freefem++* pour $\omega \in]0.1; \pi - 0.1[$ dans la géométrie Ω_L^ε avec $\varepsilon = 0$. Tracer les courbes $\omega \mapsto |R^0(\omega)|, \omega \mapsto |T^0(\omega)|, \omega \mapsto R^0(\omega)$ et $\omega \mapsto T^0(\omega)$. Dans un second temps, résoudre (3) avec g remplacé par g^\sharp tel que $g^\sharp(w') = \int_{\{-L\} \times]0; 1[} 2i\sqrt{\pi^2 - \omega^2} \cos(\pi y) w' d\sigma$. Tracer la courbe $\omega \mapsto \|w^\sharp\|_{H^1(\Omega_L^0)}$ où w^\sharp désigne la nouvelle solution de (3). Identifier ainsi un ω_0 pour lequel A n'est pas injectif. Pourquoi a-t-on remplacé g par g^\sharp ?

Question 12. Tracer les courbes $\omega \mapsto |R^\varepsilon(\omega)|, \omega \mapsto |T^\varepsilon(\omega)|, \omega \mapsto R^\varepsilon(\omega)$ et $\omega \mapsto T^\varepsilon(\omega)$ pour $\varepsilon = 0.05$ (et avec le g initial). Si besoin on zoomera dans un voisinage de ω_0 . Identifier un couple (géométrie, fréquence) pour lequel le coefficient de réflexion est nul.

La partie la plus difficile de tout ce travail consiste néanmoins à trouver un moyen de partager nos découvertes avec les poissons.

4 Annexe

4.1 Compléments pour la question 4

i) Définissons l'espace

$$H^{1/2}(\Sigma_L) := \{\varphi \in L^2(\Sigma_L) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + |\lambda_n|^{1/2})^2 (|a_n^+|^2 + |a_n^-|^2) < +\infty\},$$

où $a_n^\pm := \int_{\{\pm L\} \times]0;1[} \varphi(\pm L, y) \cos(n\pi y) dy$ et $\lambda_n = n\pi$. On peut montrer que cet espace est un Hilbert pour le produit scalaire

$$(\varphi, \psi)_{H^{1/2}(\Sigma_L)} := \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + |\lambda_n|^{1/2})^2 (a_n^+ \overline{b_n^+} + a_n^- \overline{b_n^-}),$$

où $b_n^\pm := \int_{\{\pm L\} \times]0;1[} \psi(\pm L, y) \cos(n\pi y) dy$.

En procédant comme dans l'exercice 1 de la PC4, on peut établir un résultat de continuité de la trace de $H^1(\Omega_L)$ dans $H^{1/2}(\Sigma_L)$. C'est un résultat plus fin que la continuité de la trace de $H^1(\Omega_L)$ dans $L^2(\Sigma_L)$. En particulier, il existe $C > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Sigma_L)} \leq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega_L)}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_L).$$

ii) Le théorème de Lax-Milgram pour une forme sesquilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ sur un espace de Hilbert X est encore valable si l'on suppose seulement que $\Re c(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $X \times X$, autrement dit, s'il l'on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\Re c(u, u) \geq \alpha \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

On pourra vérifier que si $c(\cdot, \cdot)$ est une forme sesquilinéaire coercive (au sens ci-dessus) continue sur $X \times X$, alors l'opérateur $C : X \rightarrow X$ tel que

$$(C\varphi, \varphi')_X = c(\varphi, \varphi'), \quad \forall \varphi, \varphi' \in X,$$

est un isomorphisme, autrement dit un opérateur linéaire continu bijectif d'inverse continu.

iii) On dit qu'un opérateur linéaire $K : X \rightarrow X$ est compact si de toute suite (u_n) bornée dans X , on peut extraire une sous-suite (v_n) telle que (Kv_n) converge dans X .

4.2 Compléments pour la question 10

Le code ci-dessous, à compléter, permet de résoudre le problème de diffraction (3).

```
real L=4; //parametres de la geometrie
real ell=1;
real h=1;
int m=20; //parametre de finesse du maillage
border a(t=-L,-ell/2){x =t; y = 0; label = 1;}
border b(t=0,h){x =-ell/2; y = -t; label = 1;}
border c(t=-ell/2,ell/2){x =t; y = -h; label = 1;}
border d(t=0,h){x =ell/2; y = -h+t; label = 1;}
border e(t=ell/2,L){x =t; y = 0; label = 1;}
border f(t=0,1){x =L; y = t; label = 2;} //reference 2 sur le bord droit
border g(t=-L,L){x =-t; y = 1; label = 1;}
border i(t=0,1){x =-L; y = 1-t; label = 3;} //reference 3 sur le bord gauche
border Cercle(t=0,2*pi){ x=0.3*cos(t); y=0.5+0.3*sin(t); label = 1;}
mesh Th=buildmesh(a(int((L-ell/2)*m))+b(int(h*m))+c(int(ell*m))+d(int(h*m)))
```

```

+e(int((L-ell/2)*m))+f(m)+g(2*L*m)+i(m)+Cercle(-int(50)));
plot(Th,wait=1,cmm="Appuyer sur Enter pour poursuivre");
fespace Vh(Th,P2); // espace elements finis
real w=0.8*pi; // frequence de travail
func uifonc=exp(1i*w*x);

// DEBUT DE LA PARTIE A NE PAS MODIFIER
/*****
Construction des Dirichlet-to-Neumann
*****/
int nbfpro = 15; //troncature dans le Dirichlet-to-Neumann
//fonction de la base de fourier
func complex expin(real x1,real x2, int n)
{
if (n==0)
return 1.;
else
return (sqrt(2.)*cos(n*pi*x2));
}
/*****
Dirichlet-to-Neumann à gauche
*****/
complex[int,int] vDtNG( Vh.ndof, nbfpro);
matrix<complex> DtNG;
for (int n=0;n<nbfpro;n++)
{
func f= expin(x,y,n);
varf FiniFourier(u,v) = int1d(Th,3)(v*f);
complex[int] temp = FiniFourier(0,Vh);
vDtNG(:,n)=temp;
}
DtNG=vDtNG;
// Construction de la matrice diagonale pour construire les EFL
matrix<complex> DG;
complex[int] diagofDG(nbfpro);
for (int n =0;n<nbfpro;n++)
{
if (n==0)
diagofDG[n] = -1i*w; // moins car dans la formu. varia., il y a un moins
else
diagofDG[n] = sqrt((n*pi)^2-w^2); // moins car dans la formu. varia., il y a un moins
}
DG = [diagofDG];
// Assemblage final et réorganisation pour intégration dans la formulation variationnelle
matrix<complex> EFLG ;
EFLG = DtNG*DG;
EFLG= EFLG*DtNG';

/*****
Dirichlet-to-Neumann à droite
*****/
complex[int,int] vDtND( Vh.ndof, nbfpro);
matrix<complex> DtND;
for (int n=0;n<nbfpro;n++)
{
func f= expin(x,y,n);
varf FiniFourier(u,v) = int1d(Th,2)(v*f); // integration sur le bord droit
complex[int] temp = FiniFourier(0,Vh);
vDtND(:,n)=temp;
}
DtND=vDtND;

```

```

matrix<complex> DD;
complex[int] diagofDD(nbfpro);
for (int n =0;n<nbfpro;n++)
{
if (n==0)
diagofDD[n] = -1i*w;
else
diagofDD[n] = sqrt((n*pi)^2-w^2);
}
DD = [diagofDD];
matrix<complex> EFLD ;
EFLD = DtND*DD;
EFLD= EFLD*DtND';
// FIN DE LA PARTIE A NE PAS MODIFIER

/*****
On passe à la formulation variationnelle
*****/
Vh<complex> u,v,ui=uifonc;
matrix<complex> A,B,C;
complex[int] G(Vh.ndof);
varf aForme(u,v) = COMPLETER ICI
varf gForme(u,v) = COMPLETER ICI
A= aForme(Vh,Vh);
C= A+EFLD+EFLG; //on rajoute les Dirichlet-to-Neumann
set(C,solver=UMFPACK);
G= gForme(0,Vh);
u[]=C^-1*G;
Vh uReel=real(u);
plot(uReel,fill=1,dim=2,nbiso=40,value=1,wait=1,cmm="Re u");

/*****
Affichage de la solution en régime harmonique en temps
*****/
real T=2*pi/w; //periode
int nbIter=200;
Vh uTemp;
Vh uAbs=abs(u); //module
real[int] viso(40); //5 lignes pour fixer l'echelle
real ValMin=-uAbs[].max;
real ValMax=uAbs[].max;
for (int i=0;i<viso.n;i++)
{viso[i]=ValMin+(ValMax-ValMin)*i/(viso.n-1);}
for(real t=0;t<3*T;t+=3*T/nbIter)
{uTemp=uReel*cos(w*t)+uImag*sin(w*t);
plot(uTemp,fill=1,dim=2,viso=viso(0:viso.n-1),value=1,wait=0,cmm="Re (u(x,y)exp(-iwt))");}

/*****
Portion de code pour ecrire dans un fichier
*****/
real [int] MesValeurs(3);
MesValeurs(0)=3.14;
MesValeurs(1)=10;
MesValeurs(2)=1;
ofstream f1("MonFichier.txt");
int nold=f1.precision(15); // pour regler la precision
for (int i=0;i<=2;i++)
{f1 << MesValeurs(i) << endl;};

```