

Propagation d'ondes dans un canal

Sujet proposé par Lucas Chesnel
 Lucas.Chesnel@cmap.polytechnique.fr¹

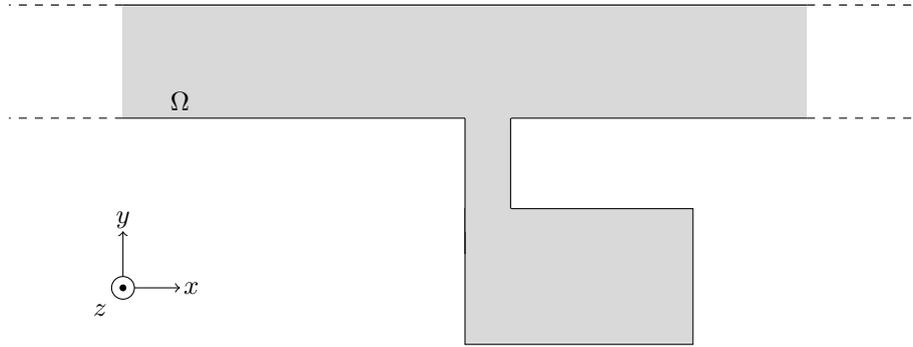


FIGURE 1 – Le canal et son port (vue aérienne).

Dans ce projet, nous nous intéressons à la propagation d'ondes dans un canal $\Omega \times]-d; 0[$ de profondeur (en z) constante $d > 0$ en régime harmonique en temps. Ici $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ représente la section horizontale du canal. Nous supposons que Ω est connexe et coïncide avec le guide de référence $\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times]0; 1[\}$ à l'extérieur d'un domaine borné (voir Figure 1). Pour un écoulement potentiel et incompressible, nous sommes conduits à étudier l'équation

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times]-d; 0[$$

où Φ désigne le potentiel de vitesses tel que $\vec{v} = \nabla \Phi$. Sur la surface libre $\Gamma_0 = \Omega \times \{0\}$, nous imposons la condition cinématique $\partial_z \Phi = (\omega^2/g)\Phi$ où g désigne l'accélération de la gravité et où ω correspond à la pulsation de l'excitation harmonique. Sur $\partial\Omega \times]-d; 0[$ et sur le fond du canal, nous imposons la condition de mur rigide (Neumann homogène). En cherchant des solutions Φ sous la forme $\Phi(x, y, z) = u(x, y) \cosh(\eta(z + d))$, on trouve que $\eta > 0$ doit satisfaire $\eta \tanh(\eta d) = \omega^2/g$ tandis que u doit vérifier

$$\begin{cases} \Delta u + \eta^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où n désigne la normale unité à $\partial\Omega$ orientée vers l'extérieur de Ω . Dans la suite, nous concentrons nos efforts sur l'analyse du problème (1).

1 Problème de diffraction dans un guide d'ondes

Pour compléter le problème (1), il est nécessaire de prescrire des conditions sur le comportement de la solution u en $x = \pm\infty$, comme si l'on imposait des conditions aux limites à l'infini.

Question 1. Supposons $\eta \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, et travaillons d'abord dans le guide de référence Ω_0 . Montrer qu'à un facteur multiplicatif près, les solutions de (1) dans Ω_0 de la forme $v(x, y) = \alpha(x)\varphi(y)$ (à variables séparées) sont égales à

$$v_n^\pm(x, y) = \begin{cases} e^{\pm i\sqrt{\eta^2 - (n\pi)^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } n \in \mathbb{N}, n < \eta/\pi \\ e^{\mp \sqrt{(n\pi)^2 - \eta^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } n \in \mathbb{N}, n > \eta/\pi. \end{cases}$$

1. Si vous avez des questions n'hésitez pas à me contacter ou à passer au bureau 3.0.08 du CMAP.

Revenons à la situation $\Omega \neq \Omega_0$. Nous ferons l'hypothèse que Ω coïncide avec Ω_0 pour $|x| \geq L$, $L > 0$ étant une constante donnée. De plus, nous supposons $0 < \eta < \pi$. Dans ce cas et avec une convention de régime harmonique en temps en $e^{-i\omega t}$, $v_0^+ = e^{i\eta x}$ (resp. $v_0^- = e^{-i\eta x}$) est une onde se propageant de $-\infty$ (resp. $+\infty$) vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)². Nous nous intéresserons au problème de diffraction de l'onde *incidente* $u_i := e^{i\eta x}$ par la géométrie Ω . Nous acceptons le fait que toute solution de (1) se décompose sur les v_n^\pm pour $|x| > L$. En outre, nous prescrivons le comportement de u en $x = \pm\infty$, en imposant au champ *diffraqué*³ $u_s = u - u_i$ d'être sortant, autrement dit de se décomposer uniquement sur les v_n^\pm pour $\pm x > L$. Finalement, cela nous amène à étudier le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \Delta u + \eta^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\text{avec } u_s = u - u_i = \begin{cases} s^- e^{-i\eta x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^- e^{+\sqrt{(n\pi)^2 - \eta^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } x < -L \\ s^+ e^{+i\eta x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^+ e^{-\sqrt{(n\pi)^2 - \eta^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } x > L, \end{cases}$$

où s^\pm , α_n^\pm sont des constantes de \mathbb{C} . Ici $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions qui appartiennent à $H^1(D)$ pour tout domaine borné $D \subset \Omega$. Dans la littérature, on appelle *coefficient de réflexion* et *coefficient de transmission* les quantités $R = s^-$, $T = 1 + s^+$.

Le caractère non borné du domaine Ω ne permet pas d'appliquer directement les méthodes vues en cours pour étudier (2). Dans la suite, nous allons formuler un problème pour $u|_{\Omega_L}$ avec $\Omega_L := \{(x, y) \in \Omega \mid |x| < L\}$. Pour cela, il faut déterminer des conditions aux limites bien choisies en $x = \pm L$.

Question 2. Montrer que si u_s admet la décomposition ci-dessus, alors on a $\partial_n u_s = T^\pm u_s$ sur $\{\pm L\} \times]0; 1[$ où T^\pm désignent les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann définis par

$$T^\pm u_s = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^1 u_s(\pm L, y) \cos(n\pi y) dy \cos(n\pi y) \quad \text{avec } \beta_n = \begin{cases} i\eta & \text{pour } n = 0 \\ -2\sqrt{(n\pi)^2 - \eta^2} & \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Question 3. Établir que si u vérifie (2) alors $u|_{\Omega_L}$ est solution d'un problème variationnel

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } w \in H^1(\Omega_L) \text{ tel que} \\ a(w, w') = g(w'), \quad \text{pour tout } w' \in H^1(\Omega_L). \end{array} \right. \quad (3)$$

On donnera l'expression des formes a et g . Réciproquement, montrer que si w vérifie (3) alors w se prolonge en une solution de (2).

Question 4. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné $A : H^1(\Omega_L) \rightarrow H^1(\Omega_L)$ tel que $(A\varphi, \varphi')_{H^1(\Omega_L)} = a(\varphi, \varphi')$ pour tout $\varphi, \varphi' \in H^1(\Omega_L)$. Montrer que A se décompose sous la forme $A = \mathcal{S} + K$, où $\mathcal{S} : H^1(\Omega_L) \rightarrow H^1(\Omega_L)$ est un isomorphisme et $K : H^1(\Omega_L) \rightarrow H^1(\Omega_L)$ un opérateur compact. (On pourra utiliser le lemme de Rellich et les indications fournies en annexe.)

Avec l'alternative de Fredholm, ce résultat permet de prouver que A est à image fermée et que $\text{Im } A = (\ker A^*)^\perp$ où A^* désigne l'adjoint de A . On peut par ailleurs établir que $\ker A^* = \ker A$ ce qui implique que (3) possède une unique solution dès lors que A est injectif (comme en dimension finie).

Question 5. En multipliant par \bar{u} l'équation volumique de (2) et en intégrant par parties sur le domaine Ω_L , établir la relation

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (\text{conservation d'énergie}). \quad (4)$$

2. Pour comprendre cette phrase, il faut revenir en temps et étudier le comportement de $(x, y, t) \mapsto v_0^\pm(x, y)e^{-i\omega t}$.
3. « Diffraqué » se dit « scattered » en anglais, d'où l'indice s .

En effectuant le même calcul sur la différence de deux éventuelles solutions, prouver que R et T sont définis de manière unique. Montrer également que les éléments non nuls $w \in \ker A$ (s'ils existent) vérifient $\int_0^1 w(\pm L, y) dy = 0$. En déduire que pour le g particulier que l'on a choisi dans (3), il existe toujours au moins une solution à (3), et donc à (2).

Question 6. Montrer que

$$s^\pm = \int_0^1 u_s(\pm L, y) e^{\mp i\eta L} dy.$$

Numériquement, ces formules permettront de calculer R et T à partir de u .

2 Construction portuaire

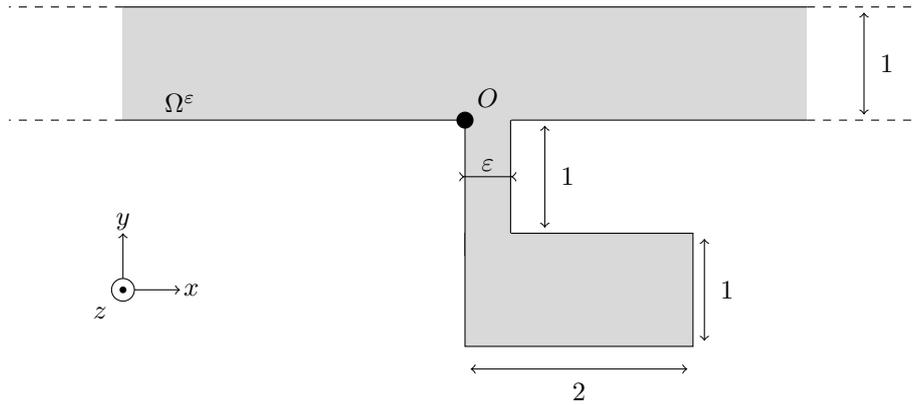


FIGURE 2 – Domaine Ω^ε .

Dans ce paragraphe, nous souhaitons étudier les propriétés de la construction portuaire définie en Figure 2. En particulier, nous souhaitons analyser la dépendance du champ dans la région $P =]0; 2[\times]-2; -1[$ (le port) en fonction de la fréquence de travail et de ε . Ici ε , qui correspond à la largeur du chenal pour accéder au port, est supposé petit devant la longueur d'onde des ondes se propageant dans le canal. Définissons $\Omega^0 = \mathbb{R} \times]0; 1[$ et $R^\varepsilon =]0; \varepsilon[\times]-1; 0[$ de sorte que $\Omega^\varepsilon = \Omega^0 \cup R^\varepsilon \cup P$. Notons u^ε une solution de (2). Commençons par calculer de manière formelle un développement de u^ε par rapport à ε pour ε petit.

★ Dans Ω^0 , nous considérons le développement

$$u^\varepsilon = u^0 + \dots \quad (5)$$

où les points de suspension correspondent à des termes en $O(1)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. En injectant (5) dans (2), on obtient que u^0 doit être solution du problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u^0 \in H_{\text{loc}}^1(\Omega^0) \text{ tel que} \\ \Delta u^0 + \eta^2 u^0 = 0 \quad \text{dans } \Omega^0 \\ \partial_n u^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^0 \end{array} \right. \quad (6)$$

avec $u^0 - u_i = u^0 - e^{i\eta x}$ sortant.

★ Dans P , nous considérons le développement

$$u^\varepsilon = v^0 + \dots \quad (7)$$

En injectant (7) dans (2), on obtient que v^0 doit être solution du problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } v^0 \in H^1(R) \text{ tel que} \\ \Delta v^0 + \eta^2 v^0 = 0 \quad \text{dans } R \\ \partial_n v^0 = 0 \quad \text{sur } \partial R. \end{array} \right. \quad (8)$$

★ Dans R^ε , nous considérons le développement

$$u^\varepsilon = w^0 + \dots \quad (9)$$

En injectant (9) dans (2), on obtient que w^0 est solution du problème 1D

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } w^0 \in H^1(I) \text{ tel que} \\ (w^0)'' + \eta^2 w^0 = 0 \quad \text{dans } I = (-1; 0) \\ w^0(0) = u^0(0, 0) \quad \text{et} \quad w^0(-1) = v^0(0, -1). \end{array} \right. \quad (10)$$

Question 7. Pour $\eta \in]0; \pi[$, montrer que le problème (8) admet une unique solution pour $\eta \neq \eta_p$ où η_p est une fréquence que l'on précisera. Pour ce faire, on admettra que toutes les solutions de (8) sont à variables séparées, i.e. s'écrivent sous la forme $v^0(x, y) = \alpha(x)\varphi(y)$. Lorsque $\eta \neq \eta_p$, donner les expressions de u^0 , v^0 et w^0 .

Question 8. Écrire un code de calcul *Freefem++* permettant d'approcher la solution du problème de diffraction (3) posé dans Ω^ε . On utilisera la base donnée à la fin de ce document. Calculer numériquement les coefficients R^ε , T^ε (coefficients de réflexion et de transmission pour u^ε) et vérifier que la conservation d'énergie (4) est satisfaite. On se placera dans un premier temps à $\eta \neq \eta_p$ (prendre $\eta = 0.8\pi$). En calculant numériquement u^ε pour $\varepsilon = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.05$, retrouvez-vous le développement formel (5)–(7)–(9) ?

Question 9. Fixons $\varepsilon = 0.2$. Résoudre le problème (3) dans Ω^ε pour $\eta \in]\eta_p - 0.4; \eta_p + 0.4[$. On discrétisera cet intervalle avec, disons, 200 fréquences. Tracer la courbe

$$\eta \mapsto \int_P |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy.$$

Comment choisir la forme du port P en fonction de la fréquence des ondes se propageant dans le canal ?

3 À bas la réflexion

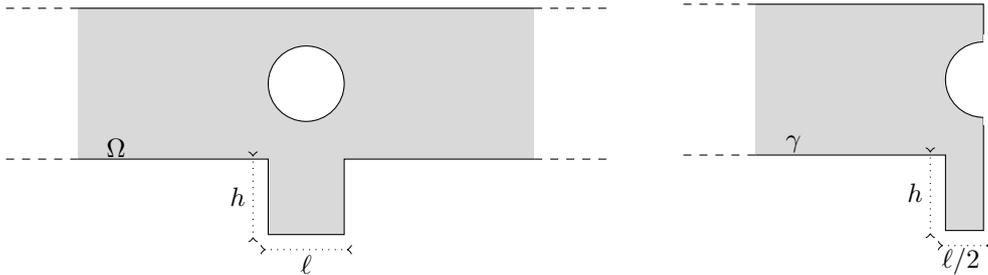


FIGURE 3 – Canal Ω symétrique à gauche, demi-canal γ à droite.

Intéressons-nous à présent à un second problème lié à la propagation d'ondes dans les canaux. Considérons la Figure 3 à gauche. Un malheureux pilier de pont gêne la propagation des ondes et produit de désagréables réflexions. Notre objectif dans cette partie est de dimensionner la cavité dessinée sur le bord du canal de façon à annihiler la réflexion, autrement dit, de façon à avoir $R = 0 \Leftrightarrow |T| = 1$. On précise que R et T sont des fonctions de la géométrie mais que la dépendance n'est en général pas simple à appréhender.

Nous allons étudier des canaux Ω symétriques par rapport à l'axe (Oy) , i.e. tels que $\Omega = \{(-x, y) \mid (x, y) \in \Omega\}$. Nous supposons en outre que Ω coïncide pour $y < 0$ avec le domaine $] -\ell/2; \ell/2[\times] -h; 0[$ pour $\ell > 0$, $h > 0$ donnés (voir Figure 3 à gauche). Nous allons utiliser la symétrie pour décomposer

les solutions de (2) en composantes symétrique et antisymétrique par rapport à (Oy) . Définissons le demi-guide $\gamma := \{(x, y) \in \Omega \mid x < 0\}$ (voir Figure 3 à droite). Considérons les deux problèmes

$$(\mathcal{P}_N) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v \in H_{\text{loc}}^1(\gamma) \text{ tel que} \\ \Delta v + \eta^2 v = 0 \text{ dans } \gamma \\ \partial_n v = 0 \text{ sur } \partial\gamma \\ v - u_i \text{ sortant.} \end{array} \right. \quad (\mathcal{P}_D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } V \in H_{\text{loc}}^1(\gamma) \text{ tel que} \\ \Delta V + \eta^2 V = 0 \text{ dans } \gamma \\ \partial_n V = 0 \text{ sur } \partial\gamma \cap \partial\Omega \\ V = 0 \text{ sur } \partial\gamma \setminus \partial\Omega \\ V - u_i \text{ sortant.} \end{array} \right. \quad (11)$$

Dans (11), les expressions « $v - u_i$ sortant » et « $V - u_i$ sortant » signifient respectivement qu'on a les décompositions

$$\begin{aligned} v - u_i &= R_N e^{-i\eta x} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{+\sqrt{(n\pi)^2 - \eta^2} x} \cos(n\pi y) \text{ pour } x < -L \\ V - u_i &= R_D e^{-i\eta x} + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n e^{+\sqrt{(n\pi)^2 - \eta^2} x} \cos(n\pi y) \text{ pour } x < -L, \end{aligned}$$

où R_N, R_D, A_n, B_n sont des constantes de \mathbb{C} . Comme pour (2), on peut prouver que $(\mathcal{P}_N), (\mathcal{P}_D)$ admettent toujours au moins une solution (existence) et que R_N, R_D sont définis de façon unique.

Question 10. Montrer que $|R_N| = |R_D| = 1$.

Question 11. Supposons que les problèmes (2), (\mathcal{P}_N) et (\mathcal{P}_D) admettent chacun une unique solution. Prouver que $u = (v + V)/2$ sur γ et $u(x, y) = (v(-x, y) - V(-x, y))/2$ sur $\Omega \setminus \bar{\gamma}$. En déduire les relations

$$R = \frac{R_N + R_D}{2} \quad \text{et} \quad T = \frac{R_N - R_D}{2}. \quad (12)$$

On admettra dans la suite que les relations (12) demeurent vraies lorsque (2), (\mathcal{P}_N) ou (\mathcal{P}_D) ne sont pas injectifs.

Les coefficients R, T, R_N et R_D dépendent de la géométrie, en particulier de ℓ et h .

Question 12. Supposons $\ell \in]0; \pi/k[$ fixé. On peut montrer que les applications $h \mapsto R_N, h \mapsto R_D$ sont continues de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{C} . Par ailleurs, en effectuant un développement asymptotique de ces quantités par rapport à $h \rightarrow +\infty$, on peut établir qu'il existe $R_D^\infty \in \mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ tel que $\lim_{h \rightarrow +\infty} R_D = R_D^\infty$. On peut établir également qu'il existe une fonction $R_N^\infty :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{S}$ de classe \mathcal{C}^∞ , π/k périodique surjective avec $dR_N^\infty/dh \neq 0$ pour tout $h > 0$ et telle que $\lim_{h \rightarrow +\infty} |R_N - R_N^\infty(h)| = 0$. Utiliser ces résultats pour démontrer qu'il existe des valeurs de h pour lesquelles $R = 0$. Remarque : l'écriture d'une preuve rigoureuse n'est pas forcément. On se contentera d'expliquer le mécanisme.

Question 13. Écrire un code de calcul *Freefem++* permettant d'approcher la solution du problème de diffraction (3). On utilisera la base donnée à la fin de ce document (on gardera la même géométrie). Calculer numériquement les coefficients R, T et vérifier que la conservation d'énergie (4) est satisfaite. Dans un second temps, calculer les valeurs de R pour $h \in [0.5; 10]$ et identifier des géométries pour lesquelles $R = 0$. On pourra utiliser la portion de code fournie permettant d'écrire dans un fichier et tracer par exemple avec *Python* la courbe $h \mapsto -\ln |R(h)|$. Représenter également les courbes $h \mapsto R(h)$ et $h \mapsto T(h)$ dans le plan complexe. Commenter les résultats. On essaiera d'abord avec $\eta = 0.8\pi$ et $\ell = 1$, puis avec $\eta = 0.8\pi$ et $\ell = 2 > \pi/k$.

4 Annexe

4.1 Compléments pour la question 4

i) Définissons $\Sigma_L = \{-L\} \times]0; 1[\cup \{+L\} \times]0; 1[$ et l'espace

$$H^{1/2}(\Sigma_L) := \left\{ \varphi \in L^2(\Sigma_L) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + |\lambda_n|^{1/2})^2 (|a_n^+|^2 + |a_n^-|^2) < +\infty \right\},$$

où $a_n^\pm := \int_0^1 \varphi(\pm L, y) \cos(n\pi y) dy$ et $\lambda_n = n\pi$. On peut montrer que cet espace est un Hilbert pour le produit scalaire

$$(\varphi, \psi)_{H^{1/2}(\Sigma_L)} := \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + |\lambda_n|^{1/2})^2 (a_n^+ \overline{b_n^+} + a_n^- \overline{b_n^-}),$$

où $b_n^\pm := \int_0^1 \psi(\pm L, y) \cos(n\pi y) dy$.

En procédant comme dans l'exercice 1 de la PC4, on peut établir un résultat de continuité de la trace de $H^1(\Omega_L)$ dans $H^{1/2}(\Sigma_L)$. C'est un résultat plus fin que la continuité de la trace de $H^1(\Omega_L)$ dans $L^2(\Sigma_L)$. En particulier, il existe $C > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Sigma_L)} \leq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega_L)}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_L).$$

ii) Le théorème de Lax-Milgram pour une forme sesquilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ sur un espace de Hilbert X est encore valable si l'on suppose seulement que $\Re c(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $X \times X$, autrement dit, s'il l'on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\Re c(u, u) \geq \alpha \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

On pourra vérifier que si $c(\cdot, \cdot)$ est une forme sesquilinéaire coercive (au sens ci-dessus) continue sur $X \times X$, alors l'opérateur $C : X \rightarrow X$ tel que

$$(C\varphi, \varphi')_X = c(\varphi, \varphi'), \quad \forall \varphi, \varphi' \in X,$$

est un isomorphisme, autrement dit un opérateur linéaire continu bijectif d'inverse continu.

iii) On dit qu'un opérateur linéaire $K : X \rightarrow X$ est compact si de toute suite (u_n) bornée dans X , on peut extraire une sous-suite (v_n) telle que (Kv_n) converge dans X .

4.2 Compléments pour la question 10

Le code ci-dessous, à compléter, permet de résoudre le problème de diffraction (3).

```
real L=4; //parametres de la geometrie
real ell=1;
real h=1;
int m=20; //parametre de finesse du maillage
border a(t=-L,-ell/2){x =t; y = 0; label = 1;}
border b(t=0,h){x =-ell/2; y = -t; label = 1;}
border c(t=-ell/2,ell/2){x =t; y = -h; label = 1;}
border d(t=0,h){x =ell/2; y = -h+t; label = 1;}
border e(t=ell/2,L){x =t; y = 0; label = 1;}
border f(t=0,1){x =L; y = t; label = 2;} //reference 2 sur le bord droit
border g(t=-L,L){x =-t; y = 1; label = 1;}
border i(t=0,1){x =-L; y = 1-t; label = 3;} //reference 3 sur le bord gauche
border Cercle(t=0,2*pi){ x=0.3*cos(t); y=0.5+0.3*sin(t); label = 1;}
mesh Th=buildmesh(a(int((L-ell/2)*m))+b(int(h*m))+c(int(ell*m))+d(int(h*m))
+e(int((L-ell/2)*m))+f(m)+g(2*L*m)+i(m)+Cercle(-int(50)));
```

```

plot(Th,wait=1,cmm="Appuyer sur Enter pour poursuivre");
fespace Vh(Th,P2); // espace elements finis
real eta=0.8*pi; // frequence de travail
func uifonc=exp(1i*eta*x);

// DEBUT DE LA PARTIE A NE PAS MODIFIER
/*****
Construction des Dirichlet-to-Neumann
*****/
int nbfpro = 15; //troncature dans le Dirichlet-to-Neumann
//fonction de la base de fourier
func complex expin(real x1,real x2, int n)
{
if (n==0)
return 1.;
else
return (sqrt(2.)*cos(n*pi*x2));
}
/*****
Dirichlet-to-Neumann à gauche
*****/
complex[int,int] vDtNG( Vh.ndof, nbfpro);
matrix<complex> DtNG;
for (int n=0;n<nbfpro;n++)
{
func f= expin(x,y,n);
varf FiniFourier(u,v) = int1d(Th,3)(v*f);
complex[int] temp = FiniFourier(0,Vh);
vDtNG(:,n)=temp;
}
DtNG=vDtNG;
// Construction de la matrice diagonale pour construire les EFL
matrix<complex> DG;
complex[int] diagofDG(nbfpro);
for (int n =0;n<nbfpro;n++)
{
if (n==0)
diagofDG[n] = -1i*eta; // moins car dans la formu. varia., il y a un moins
else
diagofDG[n] = sqrt((n*pi)^2-eta^2); // moins car dans la formu. varia., il y a un moins
}
DG = [diagofDG];
// Assemblage final et réorganisation pour intégration dans la formulation variationnelle
matrix<complex> EFLG ;
EFLG = DtNG*DG;
EFLG= EFLG*DtNG';

/*****
Dirichlet-to-Neumann à droite
*****/
complex[int,int] vDtND( Vh.ndof, nbfpro);
matrix<complex> DtND;
for (int n=0;n<nbfpro;n++)
{
func f= expin(x,y,n);
varf FiniFourier(u,v) = int1d(Th,2)(v*f); // integration sur le bord droit
complex[int] temp = FiniFourier(0,Vh);
vDtND(:,n)=temp;
}
DtND=vDtND;
matrix<complex> DD;

```

```

complex[int] diagofDD(nbfpro);
for (int n =0;n<nbfpro;n++)
{
if (n==0)
diagofDD[n] = -1i*eta;
else
diagofDD[n] = sqrt((n*pi)^2-eta^2);
}
DD = [diagofDD];
matrix<complex> EFLD ;
EFLD = DtND*DD;
EFLD= EFLD*DtND';
// FIN DE LA PARTIE A NE PAS MODIFIER

/*****
On passe à la formulation variationnelle
*****/
Vh<complex> u,v,ui=uifonc;
matrix<complex> A,B,C;
complex[int] G(Vh.ndof);
varf aForme(u,v) = COMPLETER ICI
varf gForme(u,v) = COMPLETER ICI
A= aForme(Vh,Vh);
C= A+EFLD+EFLG; //on rajoute les Dirichlet-to-Neumann
set(C,solver=UMFPACK);
G= gForme(0,Vh);
u[]=C^-1*G;
Vh uReel=real(u);
plot(uReel,fill=1,dim=2,nbiso=40,value=1,wait=1,cmm="Re u");

/*****
Affichage de la solution en régime harmonique en temps
*****/
real T=2*pi/eta; //periode
int nbIter=200;
Vh uTemp;
Vh uAbs=abs(u); //module
real[int] viso(40); //5 lignes pour fixer l'echelle
real ValMin=-uAbs[].max;
real ValMax=uAbs[].max;
for (int i=0;i<viso.n;i++)
{viso[i]=ValMin+(ValMax-ValMin)*i/(viso.n-1);}
for(real t=0;t<3*T;t+=3*T/nbIter)
{uTemp=uReel*cos(eta*t)+uImag*sin(eta*t);
plot(uTemp,fill=1,dim=2,viso=viso(0:viso.n-1),value=1,wait=0,cmm="Re (u(x,y)exp(-i eta t))");}

/*****
Portion de code pour ecrire dans un fichier
*****/
real [int] MesValeurs(3);
MesValeurs(0)=3.14;
MesValeurs(1)=10;
MesValeurs(2)=1;
ofstream f1("MonFichier.txt");
int nold=f1.precision(15); // pour regler la precision
for (int i=0;i<=2;i++)
{f1 << MesValeurs(i) << endl;};

```