

# Conception d'objet invisibles

Sujet proposé par Lucas Chesnel  
 Lucas.Chesnel@cmap.polytechnique.fr<sup>1</sup>

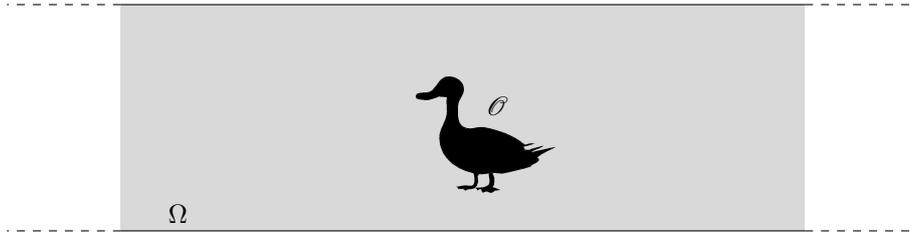


FIGURE 1 – Guide d’ondes comportant un défaut.

Dans ce projet, nous nous intéressons à la propagation d’ondes acoustiques dans un conduit  $\Omega = \{z = (x, y) \in \mathbb{R} \times (0; 1)\}$  contenant un objet  $\mathcal{O}$  (voir Figure 1) et gouvernée par l’équation

$$\frac{\rho}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = F.$$

Ici,  $U$  correspond à la pression acoustique,  $\rho$  est un paramètre adimensionalisé caractéristique du milieu de propagation,  $c$  est la célérité des ondes égale à un dans la suite et  $F$  désigne un terme source. Nous supposons que  $\rho = 1$  dans  $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$  avec  $\rho \neq 1$  dans  $\Omega$ . Notre objectif est de trouver des fonctions  $\rho$  telles que les ondes se propagent dans  $\Omega$  comme s’il n’y avait pas de défaut, autrement dit comme si on avait  $\rho \equiv 1$ .

Lorsque  $F$  est de la forme  $F(z, t) = \Re e(f(z)e^{-i\omega t})$ , on peut chercher  $U$  sous la forme  $U(z, t) = \Re e(u(z)e^{-i\omega t})$  (régime harmonique en temps). Nous faisons l’hypothèse que les parois du guide sont rigides, ce qui conduit à étudier le problème avec condition de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u - \omega^2 \rho u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_y u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

## 1 Problème de diffraction dans un guide d’ondes

Pour compléter le problème (1), il est nécessaire de prescrire des conditions sur le comportement de la solution  $u$  en  $x = \pm\infty$ , comme si l’on imposait des conditions aux limites à l’infini.

**Question 1.** Supposons  $\omega \neq n\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et considérons le cas  $\rho \equiv 1$ ,  $f \equiv 0$  dans  $\Omega$ . Montrer qu’à un facteur multiplicatif près, les solutions de (1) de la forme  $v(x, y) = \alpha(x)\varphi(y)$  (à variables séparées) sont égales à

$$v_n^\pm(x, y) = \begin{cases} e^{\pm i\sqrt{\omega^2 - (n\pi)^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } n \in \mathbb{N}, n < \omega/\pi \\ e^{\mp \sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } n \in \mathbb{N}, n > \omega/\pi. \end{cases}$$

Revenons à la situation  $\rho \neq 1$ . Nous faisons l’hypothèse que  $\rho \in L^\infty(\Omega)$  est une fonction à valeurs réelles telle que  $\rho \geq 0$  dans  $\Omega$  et  $\rho = 1$  pour  $|x| \geq L$ ,  $L > 0$  étant une constante donnée. De plus,

1. Si vous avez des questions n’hésitez pas à me contacter ou à passer au bureau 3.0.08 du CMAP.

nous supposons  $0 < \omega < \pi$ . Dans ce cas,  $v_0^+ = e^{i\omega x}$  (resp.  $v_0^- = e^{-i\omega x}$ ) est une onde se propageant de  $-\infty$  (resp.  $+\infty$ ) vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ )<sup>2</sup>. Nous nous intéressons au problème de diffraction de l'onde incidente  $u_i := e^{i\omega x}$  par l'objet  $\mathcal{O}$ . Nous acceptons le fait que toute solution de (1) se décompose sur les  $v_n^\pm$  pour  $|x| > L$ . En outre, nous prescrivons le comportement de  $u$  en  $x = \pm\infty$ , en imposant au champ diffracté<sup>3</sup>  $u_s = u - u_i$  d'être sortant, autrement dit de se décomposer uniquement sur les  $v_n^\pm$  pour  $\pm x > L$ . Finalement, cela nous amène à étudier le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \Delta u + \omega^2 \rho u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_y u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\text{avec } u_s = u - u_i = \begin{cases} s^- e^{-i\omega x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^- e^{+\sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } x < L \\ s^+ e^{+i\omega x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^+ e^{-\sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} x} \cos(n\pi y) & \text{pour } x > L, \end{cases}$$

où  $s^\pm, \alpha_n^\pm$  sont des constantes de  $\mathbb{C}$ . Ici  $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions qui appartiennent à  $H^1(D)$  pour tout domaine borné  $D \subset \Omega$ . Dans la littérature, on appelle *coefficient de réflexion* et *coefficient de transmission* les quantités  $R = s^-$ ,  $T = 1 + s_+$ .

**Question 2.** En multipliant par  $\bar{u}$  l'équation volumique de (2) et en intégrant par parties sur le domaine  $\Omega_L := \{(x, y) \in \Omega \mid |x| < L\}$ , établir la relation

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (\text{conservation d'énergie}). \quad (3)$$

**Question 3.** Définissons  $\Sigma_L = \{-L\} \times (0; 1) \cup \{+L\} \times (0; 1)$ . Calculer les quantités

$$I^\pm = \int_{\Sigma_L} \frac{\partial u_s(z)}{\partial n} \frac{\overline{e^{\pm i\omega x}}}{e^{\pm i\omega x}} - u_s(z) \frac{\overline{\partial e^{\pm i\omega x}}}{\partial n} d\sigma$$

où  $\partial_n = \pm \partial_x$  en  $x = \pm L$ .

**Question 4.** En déduire

$$R = \frac{i\omega}{2} \int_{\mathcal{O}} (\rho(z) - 1) u(z) e^{+i\omega x} dz. \quad (4)$$

Le caractère non borné du domaine  $\Omega$  ne permet pas d'appliquer directement les méthodes éléments finis vues en cours pour calculer une approximation numérique de  $u$  solution de (2). Dans la suite, nous allons expliquer comment approcher  $u|_{\Omega_L}$ . Pour cela, il faut déterminer des conditions aux limites bien choisies sur  $\Sigma_L$ .

**Question 5.** Montrer qu'on a  $\frac{\partial u_s}{\partial n} = T^\pm u_s$  sur  $\{\pm L\} \times (0; 1)$  où  $T^\pm$  désignent les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann défini par

$$T^\pm u_s = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_{\{\pm L\} \times (0; 1)} u_s(z) \cos(n\pi y) d\sigma \cos(n\pi y).$$

Dans ces expressions,  $\beta_n \in \mathbb{C}$  désignent des constantes dont on donnera la valeur.

**Question 6.** Établir que si  $u$  vérifie (2) alors  $u_s = u - u_i$  est solution d'un problème variationnel

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_s \in H^1(\Omega_L) \text{ tel que} \\ a(u_s, v) = \ell(v), \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega_L). \end{array} \right. \quad (5)$$

2. Pour comprendre cette phrase, il faut revenir en temps et étudier le comportement de  $(z, t) \mapsto v_0^\pm(z) e^{-i\omega t}$ .

3. « Diffracté » se dit « scattered » en anglais, d'où l'indice  $s$ .

On donnera l'expression des formes  $a$  et  $\ell$ . Réciproquement, montrer que si  $u_s$  vérifie (5) alors  $u = u_s + u_i$  se prolonge en une solution de (2).

**Question 7.** En utilisant le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné  $A : H^1(\Omega_L) \rightarrow H^1(\Omega_L)$  tel que  $(A\varphi, \varphi') = a(\varphi, \varphi')$  pour tout  $\varphi, \varphi' \in H^1(\Omega_L)$ . Montrer que  $A$  se décompose sous la forme  $A = \mathcal{S} + K$ , où  $\mathcal{S} : H^1(\Omega_L) \rightarrow H^1(\Omega_L)$  est un isomorphisme et  $K : H^1(\Omega_L) \rightarrow H^1(\Omega_L)$  un opérateur compact. (*Indice : on pourra utiliser le lemme de Rellich.*)

Avec l'alternative de Fredholm, ce résultat permet de prouver que (5) possède une unique solution dès lors que  $A$  est injectif (comme en dimension finie). Par ailleurs, on peut établir, cela demande un peu plus de travail, que  $A$  est injectif pour tout  $k \in (0; \pi) \setminus \mathcal{E}$  où  $\mathcal{E}$  est un ensemble discret sans point d'accumulation. Dorénavant, nous supposons que  $k \notin \mathcal{E}$  de sorte que (5), et donc (2) admet une unique solution.

## 2 Invisibilité

Dans la suite, notre objectif est de construire une fonction  $\rho$  telle que  $\rho - 1$  soit à support dans  $\overline{\mathcal{O}}$  et telle que  $R = 0$ . Dans une telle situation, l'amplitude du champ diffracté par l'objet est exponentiellement décroissante en  $-\infty$  et pour un observateur situé en  $x = -\infty$  produisant l'onde incidente  $u_i = e^{i\omega x}$ , tout se passe comme s'il n'y avait pas d'objet dans le guide d'ondes.

Nous allons chercher un matériau de l'objet tel que  $\rho$  soit une petite perturbation du milieu de référence. Plus précisément, nous allons chercher  $\rho$  sous la forme  $\rho = \rho^\varepsilon = 1 + \varepsilon\mu$  où  $\varepsilon$  est un petit paramètre et où  $\mu$  est une fonction à support dans  $\overline{\mathcal{O}}$  à déterminer. Nous noterons  $u^\varepsilon, R^\varepsilon$  les quantités définies en (2), (4) avec  $\rho$  remplacé par  $\rho^\varepsilon$ .

**Question 8.** En décomposant  $u^\varepsilon$  sous la forme  $u^\varepsilon = u_i + u_s^\varepsilon$ , montrer que

$$R^\varepsilon = \varepsilon dR^\varepsilon(0)(\mu) + \varepsilon \tilde{R}^\varepsilon \quad \text{avec} \quad dR^\varepsilon(0)(\mu) = \frac{i\omega}{2} \int_{\mathcal{O}} \mu(z) e^{+2i\omega x} dz,$$

où  $\tilde{R}^\varepsilon$  désigne un reste dont on donnera l'expression. On peut prouver que lorsqu'on effectue une perturbation d'ordre  $\varepsilon$  du milieu,  $u_s^\varepsilon$  est en  $O(\varepsilon)$ . Cela permet de montrer que  $\tilde{R}^\varepsilon = O(\varepsilon)$  et justifie le fait que  $\tilde{R}^\varepsilon$  est bien un « reste » dans ce développement de Taylor.

Pour fixer les idées, nous prenons  $\mathcal{O} = (-1; 1) \times (1/4; 3/4)$  et nous divisons ce domaine en quatre briques (voir Figure 2)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= (-1; -1/2) \times (1/4; 3/4) & \mathcal{O}_3 &= (0; 1/2) \times (1/4; 3/4) \\ \mathcal{O}_2 &= (-1/2; 0) \times (1/4; 3/4) & \mathcal{O}_4 &= (1/2; 1) \times (1/4; 3/4). \end{aligned}$$

De plus, nous imposons à  $\mu$  (et donc à  $\rho$ ) de prendre des valeurs constantes réelles  $\mu_i$  sur  $\mathcal{O}_i, i = 1, \dots, 4$ . Cela nous conduit à définir l'espace  $X := \{\varphi \in L^\infty(\Omega) \mid \varphi|_{\mathcal{O}_i} = \text{cste réel et } \varphi = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}\}$

**Question 9.** Trouver des fonctions  $\mu^0, \mu^1, \mu^2 \in X \setminus \{0\}$  telles que

$$dR^\varepsilon(0)(\mu^0) = 0, \quad dR^\varepsilon(0)(\mu^1) = 1, \quad dR^\varepsilon(0)(\mu^2) = i. \quad (6)$$

Nous supposons à présent que les fonctions  $\mu^0, \mu^1, \mu^2 \in X \setminus \{0\}$  sont fixées satisfaisant (6). On cherche  $\mu$  sous la forme

$$\mu = \mu^0 + \tau_1 \mu^1 + \tau_2 \mu^2 \quad (7)$$

où  $\tau_1, \tau_2$  sont des nombres réels à déterminer.

**Question 10.** Prouver que  $R^\varepsilon = 0$  si et seulement si  $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2)^T$  vérifie un problème de la forme

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{\tau} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que} \\ \vec{\tau} = G^\varepsilon(\vec{\tau}), \end{array} \right. \quad (8)$$

où l'on donnera l'expression de  $G^\varepsilon$ , application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , en fonction de  $\vec{R}^\varepsilon$ . On admettra dans la suite que pour tout  $R > 0$  donné, l'application  $\vec{\tau} \mapsto G^\varepsilon(\vec{\tau})$  est une contraction de  $\overline{B(O, R)}$  dans  $\overline{B(O, R)}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Cela permet de montrer avec le théorème de point fixe de Banach que (8) admet une unique solution dans  $\overline{B(O, R)}$ .

**Question 11.** Montrer que le  $\mu$  ainsi construit est non identiquement nul, de sorte que  $\rho \neq 1$  (on a bien construit une brique invisible qui n'est pas la brique nulle).

**Question 12.** Quelle est la dimension de l'espace des  $\rho \in L^\infty(\Omega)$  tels que  $R = 0$  et tels que  $\rho - 1$  soit à support dans  $\overline{\mathcal{O}}$  ?

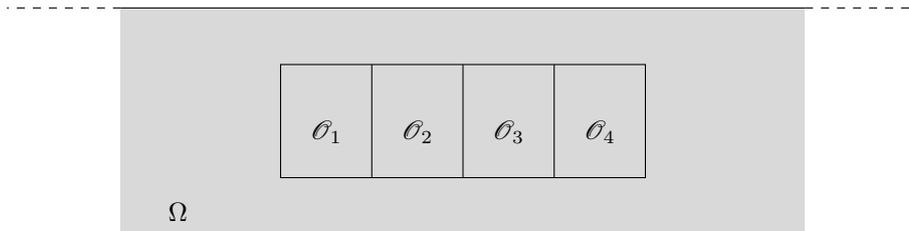


FIGURE 2 – Géométrie du guide d'ondes.

### 3 Mise en œuvre numérique

**Question 13.** Écrire un code de calcul *Freefem++* permettant d'approcher la solution du problème de diffraction (5). On utilisera la base de code donnée à la fin de ce document. Calculer numériquement les coefficients  $R$ ,  $T$  et vérifier que la conservation d'énergie (3) est satisfaite (à une erreur d'approximation près).

Pour résoudre le problème de point fixe (8), on va procéder par récurrence. Posons  $\vec{\tau}_0 = (0, 0)^T$  et, pour  $n \geq 0$ , définissons  $\vec{\tau}_{n+1} = G^\varepsilon(\vec{\tau}_n)$ . Lorsque  $|\vec{\tau}_{n+1} - \vec{\tau}_n| \leq \eta$ , où  $\eta$  est un critère donné (et petit), le point fixe a convergé et nous avons obtenu une bonne approximation de la solution de  $\vec{\tau} = G^\varepsilon(\vec{\tau})$ . Dans la suite, nous notons  $R_n^\varepsilon$ ,  $u_n^\varepsilon$ ,  $\rho_n^\varepsilon$  les quantités introduites précédemment avec  $\mu$  remplacé par  $\mu_n = \mu^0 + \tau_n^1 \mu^1 + \tau_n^2 \mu^2$  (formule (7)). Observer qu'à chaque étape de l'itération, il faut calculer  $R_n^\varepsilon$ , ce qui nécessite de résoudre numériquement (5).

**Question 14.** Exprimer  $\vec{\tau}_{n+1}$  en fonction de  $\vec{\tau}_n$ ,  $\varepsilon$  et  $R_n^\varepsilon$ .

**Question 15.** Coder en *Freefem++* l'algorithme de point fixe. On pourra débiter avec  $\varepsilon = 0.1$  et diminuer la valeur si l'algorithme ne converge pas (on rappelle que  $G^\varepsilon$  est une contraction pour  $\varepsilon$  suffisamment petit). Pour le critère d'arrêt  $\eta$ , on prendra  $\eta = 10^{-5}$ . On veillera en outre à imposer un nombre maximum d'itérations dans la boucle, disons 50. Lorsque l'algorithme aura convergé, on affichera  $\rho$  ainsi que  $\Re u_s$ ,  $\Im u_s$  pour vérifier que le champ diffracté en  $-\infty$  est exponentiellement décroissant. On pourra également tracer la courbe  $n \mapsto R_n^\varepsilon$ .

**Question 16 (optionnelle).** Proposer une méthode pour construire un  $\rho$  tel que  $T = 1$ . Dans ce cas, l'objet est invisible pour l'observateur générant l'onde incidente  $u_i = e^{i\omega x}$  et mesurant le champ diffracté à la fois en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

### 4 Annexe

Le code ci-dessous, à compléter, permet de résoudre le problème de diffraction (5). Le défaut dans le guide est ici un disque dans lequel  $\rho$  vaut 2.

```

real R=4; //domaine [-R;R]x[0;1]
real rho=2; //coefficient physique du default
border a(t=-R,R){x =t; y = 0; label = 1;}
border b(t=0,1){x =R; y = t; label = 2;} //reference 2 sur le bord droit
border c(t=-R,R){x =-t; y = 1; label = 1;}
border d(t=0,1){x =-R; y = 1-t; label = 3;} //reference 3 sur le bord gauche
border Defaut(t=0,2*pi){ x=0.3*cos(t); y=0.5+0.3*sin(t); label = 1;}
mesh ThDefaut=buildmesh(Defaut(50));
mesh ThSansDefaut=buildmesh(a(200)+b(20)+c(200)+d(20)+Defaut(-50));
mesh Th = ThDefaut+ThSansDefaut;
plot(Th,wait=1,cmm="Appuyer sur Enter pour poursuivre");
fespace Vh(Th,P2); // espace elements finis
real w=0.8*pi; // frequence de travail
func uifonc=exp(1i*w*x);

// DEBUT DE LA PARTIE A NE PAS MODIFIER
/*****
Construction des Dirichlet-to-Neumann
*****/
int nbfpro = 15; //troncature dans le Dirichlet-to-Neumann
//fonction de la base de fourier
func complex expin(real x1,real x2, int n)
{
if (n==0)
return 1.;
else
return (sqrt(2.)*cos(n*pi*x2));
}
/*****
Dirichlet-to-Neumann à gauche
*****/
complex[int,int] vDtNG( Vh.ndof, nbfpro);
matrix<complex> DtNG;
for (int n=0;n<nbfpro;n++)
{
func f= expin(x,y,n);
varf FiniFourier(u,v) = int1d(Th,3)(v*f);
complex[int] temp = FiniFourier(0,Vh);
vDtNG(:,n)=temp;
}
DtNG=vDtNG;
// Construction de la matrice diagonale pour construire les EFL
matrix<complex> DG;
complex[int] diagofDG(nbfpro);
for (int n =0;n<nbfpro;n++)
{
if (n==0)
diagofDG[n] = -1i*w; // moins car dans la formu. varia., il y a un moins
else
diagofDG[n] = sqrt((n*pi)^2-w^2); // moins car dans la formu. varia., il y a un moins
}
DG = [diagofDG];
// Assemblage final et réorganisation pour intégration dans la formulation variationnelle
matrix<complex> EFLG ;
EFLG = DtNG*DG;
EFLG= EFLG*DtNG';

/*****
Dirichlet-to-Neumann à droite
*****/
complex[int,int] vDtND( Vh.ndof, nbfpro);

```

```

matrix<complex> DtND;
for (int n=0;n<nbfpro;n++)
{
func f= expin(x,y,n);
varf FiniFourier(u,v) = int1d(Th,2)(v*f); // integration sur le bord droit
complex[int] temp = FiniFourier(0,Vh);
vDtND(:,n)=temp;
}
DtND=vDtND;
matrix<complex> DD;
complex[int] diagofDD(nbfpro);
for (int n =0;n<nbfpro;n++)
{
if (n==0)
diagofDD[n] = -1i*w;
else
diagofDD[n] = sqrt((n*pi)^2-w^2);
}
DD = [diagofDD];
matrix<complex> EFLD ;
EFLD = DtND*DD;
EFLD= EFLD*DtND';
// FIN DE LA PARTIE A NE PAS MODIFIER

/*****
On passe à la formulation variationnelle
*****/
Vh<complex> us,u,v,ui=ufonc;
matrix<complex> A,B,C;
complex[int] F(Vh.ndof);
varf aForme(us,v) = ; COMPLETER ICI
varf lForme(us,v) = ; COMPLETER ICI
A= aForme(Vh,Vh);
C= A+EFLD+EFLG; //on rajoute les Dirichlet-to-Neumann
set(C,solver=UMFPACK);
F= lForme(0,Vh);
us[]=C^-1*F;
Vh usReel=real(us);
plot(usReel,fill=1,dim=2,nbiso=40, value=10,wait=1,cmm="Re us");

```